

B. MARTINET

**Brève communication. Régularisation d'inéquations  
variationnelles par approximations successives**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R3 (1970), p. 154-158

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_154\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_154_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## REGULARISATION D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

par B. MARTINET <sup>(1)</sup>

Résumé. — Soit l'inéquation variationnelle :

$$(1) \quad \text{trouver } \bar{x} \in C : (T\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C$$

où  $B$  est une application de l'espace de Hilbert  $H$  dans  $H'$ , monotone et hémicontinue.  $C$  est une partie bornée et fermée de  $H$ . On construit la suite  $\{x^n\}$  par récurrence :

$$(2) \quad x^{n+1} \in C : (Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) + \langle x^{n+1} - x^n, x - x^{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$$

On montre que toute valeur d'adhérence faible de  $\{x^n\}$  est solution de (1). Dans le cas d'un problème de minimisation convexe :

$$(3) \quad \min (f(x) \mid x \in C), \text{ on montre que la suite } \{x^n\} \text{ définie par } \tau$$

$$(4) \quad x^{n+1} \in C \text{ solution unique de } \min_{x \in C} (f(x) + \|x - x^n\|^2)$$

est une suite minimisante.

### I. INTRODUCTION

Ce procédé de régularisation par approximations successives est signalé, en particulier, par Bellman [2] dans le cas d'un problème quadratique (étudié pour la résolution approchée de systèmes linéaires mal conditionnés). Cette idée ne semble pas très utilisée en pratique, elle offre cependant l'avantage par rapport à la régularisation habituelle de poser à chaque itération un « bon problème ». Nous n'étudions ici que l'aspect mathématique de ces questions.

---

(1) Centre d'Études nucléaires de Grenoble, Laboratoire de calcul numérique.

## II. REGULARISATION D'INEQUATIONS VARIATIONNELLES

### 2.1. Hypothèses et notations

Soit  $H$  un espace de Hilbert, muni du produit scalaire noté  $\langle , \rangle$  avec la norme  $\| \cdot \|$ .

On note  $(, )$  la dualité entre  $H'$  et  $H$ .  $T$  est une application de  $H$  dans  $H'$  : monotone dans  $C$  :  $\forall x, y \in C : (Tx - Ty, x - y) \geq 0$

hémicontinue dans  $C$  :  $\forall x, y \in C$  l'application qui à  $t \in [0, 1]$  fait correspondre  $T((1 - t)x + ty)$  dans  $H'$  muni de la topologie faible est continue.

$C$  est une partie convexe, fermée, bornée de  $H$ . Soit l'inéquation variationnelle :

$$(1) \quad \text{trouver } \bar{x} \in C : (T\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C$$

On sait (voir par exemple [1]) que (1) a, au moins, une solution, on notera  $M$  l'ensemble des solutions de (1).

### 2.2. Algorithme de régularisation

Connaissant  $x^n \in C$  on détermine  $x^{n+1} \in C$  unique tel que :

$$(2) \quad (Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) + \langle x^{n+1} - x^n, x - x^{n+1} \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C$$

### 2.3. Théorème 1

Toute valeur d'adhérence faible de  $\{x^n\}$  est solution de (1).

*Démonstration :*

Des propriétés de monotonie et d'hémicontinuité de  $B$  on déduit (voir [1]) que :

$$(5) \quad M = \{ \bar{x} \in C \mid (T\bar{x}, x - \bar{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C \}$$

Nous décomposons la démonstration en deux lemmes.

— **Lemme 1** :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{n+1} - x^n\| = 0$

*Démonstration :*

Soit  $\bar{x} \in M$  quelconque. On pose :  $d^n = \|x^n - \bar{x}\|^2$ . D'où :

$$d^{n+1} = d^n - \|x^{n+1} - x^n\|^2 + 2 \langle x^{n+1} - x^n, x^{n+1} - \bar{x} \rangle$$

Or, par construction :

$$(6) \quad (Tx^{n+1}, \bar{x} - x^{n+1}) + \langle x^{n+1} - x^n, \bar{x} - x^{n+1} \rangle \geq 0$$

Donc :

$$d^{n+1} \leq d^n - \|x^{n+1} - x^n\|^2 + 2(Tx^{n+1}, \bar{x} - x^{n+1})$$

d'où, grâce à (5) :

$$(7) \quad d^{n+1} \leq d^n - \|x^{n+1} - x^n\|^2$$

Comme  $0 \leq d^{n+1} \leq d^n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (d^{n+1} - d^n) = 0$  ce qui, compte tenu de (7) démontre le lemme 1. C. Q. F. D.

— **Lemme 2 :**

Toute valeur d'adhérence faible de  $\{x^n\}$  appartient à  $M$ .

*Démonstration :*

Soit  $x \in C$  quelconque. On a :

$$(Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) \geq \langle x^{n+1} - x^n, x^{n+1} - x \rangle$$

donc  $(Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) \geq -\|x^{n+1} - x^n\| \cdot \|x^{n+1} - x\|$

Puisque les  $x^n$  sont bornés ( $C$  l'est) et grâce au lemme 1 on a :

$$(8) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) \geq 0$$

donc (monotonie de  $T$ ) :

$$(9) \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} (Tx, x - x^n) \geq 0$$

Soit  $\tilde{x}$  une valeur d'adhérence faible de  $\{x^n\}$  (existe,  $x^n$  borné dans un espace de Hilbert) on déduit facilement de (10) que :

$$(Tx, x - \tilde{x}) \geq 0 \quad \forall x \in C$$

ce qui, compte tenu de (5), démontre le lemme 2.

**Corollaire.** Si (1) a une solution unique  $\bar{x}$ , la suite  $x^n$  converge faiblement vers  $\bar{x}$ .

REMARQUE 1. Ces résultats restent valables pour l'algorithme :

$$x^{n+1} \in C : (Tx^{n+1}, x - x^{n+1}) + 1(\|x^{n+1} - x^n\|) \langle x^{n+1} - x^n, x - x^n \rangle \geq 0$$

$$\forall x \in C$$

où 1 est une fonction bornée sur tout borné de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$ .

REMARQUE 2. On peut supprimer l'hypothèse  $C$  borné s'il existe  $y \in C$  tel que :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{(Tx, x - y)}{\|x\|} = +\infty$$

### III. CAS D'UN PROBLEME MIN-MAX

$$(10) \quad \min_{x \in C_1} \max_{x_2 \in C_2} J(x_1, x_2)$$

où on suppose que :

- $J$  est convexe en  $x_1$ , concave en  $x_2$  et monotone.
- $J'x_1, J'x_2$  (dérivées au sens de Frechet) existent et sont hémicontinues.
- $C_1$  et  $C_2$  sont des parties convexes, fermées, bornées des espaces de Hilbert  $H_1$  et  $H_2$ .

Soit  $v$  la valeur du jeu (10).

On voit qu'on est dans un cas particulier du II. L'algorithme de régularisation correspondant est le suivant :

On passe de  $(x_1^n, x_2^n)$  à  $(x_1^{n+1}, x_2^{n+1}) \in C_1 \times C_2$  :

$(x_1^{n+1}, x_2^{n+1})$  est la solution unique du problème :

$$\min_{x_1 \in C_1} \max_{x_2 \in C_2} J(x_1, x_2) + \|x_1 - x_1^n\|^2 - \|x_2 - x_2^n\|^2$$

On peut montrer le résultat suivant :

**Théorème 2.** Si en plus des hypothèses ci-dessus, on suppose que  $J'_{x_1}(x)$  et  $J'_{x_2}(x)$  sont faiblement continues alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_1^n, x_2^n) = v$$

### IV. CAS D'UN PROBLEME DE MINIMISATION CONVEXE

#### 4.1. Enoncé du problème et hypothèses

$$(12) \quad \min (f(x) \mid x \in C)$$

où :

- $C$  est un convexe fermé de  $H$  : espace de Hilbert.
- $f$  fonctionnelle convexe et semi-continue inférieurement.
- $\{x \in C \mid f(x) \leq a\}$  est borné  $\forall a \in \mathbb{R}$ .

Ces hypothèses assurent l'existence d'une solution pour (12).

#### 4.2. Algorithme de régularisation

On construit la suite  $\{x^n\} \subset C$  :

$$(13) \quad x^{n+1} \in C \text{ solution unique de } \min (f(x) + \|x - x^n\|^2 \mid x \in C)$$

### 4.3. Théorème 3

Toute valeur d'adhérence faible de  $\{x^n\}$  est solution de (12). La suite  $\{x^n\}$  est minimisante. On peut faire une démonstration directe de ce théorème. On remarquera que le résultat est plus précis qu'en II.

REMARQUE 1 : Si  $f$  est uniformément convexe,  $x^n$  converge fortement vers la solution unique de (12).

REMARQUE 2 : L'hypothèse de convexité semble ici indispensable contrairement au cas de la régularisation classique.

EXEMPLE

$$\min_{x \in H_1} \|Ax - b\|^2$$

$A$  application linéaire continue de  $H_1$  dans  $H_2$ ,

$b \in H_2$  fixé,

$H_1, H_2$  espaces de Hilbert.

$x^{n+1}$  est alors solution du système linéaire :

$$(A * A + 2I)x^{n+1} = A * b + 2x^n$$

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. L. LIONS et G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, C.P.A.M., vol. XX, 493-519 (1967).
- [2] R. E. BELLMAN, R. E. KALABA et J. LOCKETT, *Numerical inversion of the Laplace transform*, Elsevier, New York (1966), pages 143-144.