

C. F. DUCATEAU

**Brève communication. Interpolation par  
des fonctions de  $C^k[a, b]$**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 4, n° R3 (1970), p. 125-130

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1970\\_\\_4\\_3\\_125\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_125_0)

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## INTERPOLATION PAR DES FONCTIONS DE $C^k[a, b]$

par C. F. DUCATEAU (1)

**Résumé.** — Après avoir rappelé la définition d'un champ de Taylor, on donne des propriétés sur un intervalle du polynôme de degré  $2k - 1$  prenant aux extrémités des valeurs données ainsi que  $k$  de ses dérivées. Ayant un champ de Taylor sur un fermé  $X$  contenu dans l'intervalle  $[a, b]$  nous effectuons un prolongement de  $T$  par une fonction  $\varphi$  qui sur  $\mathbb{C}F$  est formé de polynôme de degré  $2k - 1$ . Ayant une suite  $T_n$  de champ de Taylor sur  $F$  convergeant vers  $T$ , nous donnons des conditions nous assurant la convergence des prolongements. Nous appliquons ces résultats au cas de l'interpolation d'un champ de Taylor par un champ défini en un nombre fini de points. Utilisant les  $Q$ -projections de Whitney nous construisons un interpolant  $C^k$  d'une fonction  $f$  et nous donnons les résultats de convergence uniforme de ces prolongements.

### I. NOTATION ET DEFINITION

Une fonction numérique  $w(x)$  définie sur un intervalle  $[0, d]$  ( $d > 0$ ) de la droite  $R$  sera appelée un *module de continuité* si elle est continue, nulle pour  $x = 0$ , et croissante, nous supposons de plus dans la suite qu'un tel module de continuité est concave.

Soit  $F$  un sous-ensemble de  $[a, b]$  une application de  $F$  dans  $\mathbf{R}^{k+1}$ ,

$$x \mapsto T_x^k = (T_x^0, \dots, T_x^k)$$

peut être interprété comme un *champ de polynôme*. En effet en tout  $x$  considérons le polynôme :

$$T_x^k(X) = \sum_{i=0}^k \frac{(X-x)^i}{i!} T_x^i.$$

Soient  $f$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $[a, b]$  et  $F$  un fermé  $[a, b]$ . En chaque point  $x \in F$  nous pouvons considérer le *jet d'ordre  $k$  de  $f$*

$$f_x^k = (f(x), f^1(x), \dots, f^k(x))$$

et le champ des polynômes  $f_x^k(X) = \sum_{i=0}^k \frac{(X-x)^i}{i!} f^{(i)}(x)$ . Nous dirons qu'un tel champ est un *champ de Taylor*. Whitney a donné une condition nécessaire

---

(1) Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

et suffisante sur un champ de polynôme  $T$  pour qu'il soit un champ de Taylor. Glaeser [1] et Coatmelec [1] ont donné la formulation.

**Théorème**

Pour que  $T^k$  soit un champ de Taylor il faut et il suffit qu'il existe un module de continuité  $w$  tel que pour tout  $x, x'$  de  $F$  et pour tout  $i$   $0 \leq i \leq k$  on ait :

$$\left| \frac{d^i}{dx^i} (T_x^k(x') - T_{x'}^k(x)) \right| \leq |x - x'|^{k-i} w(|x - x'|) \quad (WT)$$

Soient  $x_0, \dots, x_p(p + 1)$  points de  $[a, b]$ ,  $k_0, \dots, k_p(p + 1)$  nombres entiers positifs. A chaque  $x_i$  nous supposons associé un  $k_i$  — uple  $f_i^0, \dots, f_i^{k_i}$ . On désignera par  $[x_0 : k_0, \dots, x_p : k_p]$  la différence divisée à arguments  $x_0, \dots, x_p$  répétées  $k_0, \dots, k_p$  fois associée au  $f_i$ . Rappelons que  $[x_0 : k_0, \dots, x_p : k_p]$  est le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme de degré  $k_0 + \dots + k_p - 1$  admettant en  $x_i$  le jet  $f_i^0, \dots, f_i^{k_i}$ .

On a la formule de récurrence

$$[x_0 : k_0, \dots, x_p : k_p] = \frac{[x_0 : k_0, \dots, x_p : k_p - 1] - [x_0 : k_0 - 1, \dots, x_p : k_p]}{(x_0 - x_p)}$$

Soient 2 points  $a, b$  et en ces points la donnée de  $T_a^k = (T_a^0, \dots, T_a^k)$  et nous pouvons considérer le polynôme  $P_{abT}$  de degré  $2k - 1$  dont les dérivées en  $a$  et  $b$  sont  $T_a^i$  et  $T_b^i$ . Ce polynôme s'écrit :

$$P_{a,b,T} = \sum_{i=1}^{k+1} [a : i](x - a)^{i-1} + \sum_{i=1}^{k+1} [a : k + 1, b : i](x - a)^{k+1}(x - b)^{i-1}$$

Si  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_k\}$  on désigne  $[a_0, \dots, a_k]$  par  $[\mathcal{A}]$ .

Soit  $\mathcal{B} = \{b_0, \dots, b_k\}$ , on définit une distance  $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{\sigma \in S} \sum |a_i - b_{\sigma(i)}|$

où  $S$  désigne l'ensemble des permutations à  $k$  éléments.

**II. ETUDE DU POLYNOME DE LAGRANGE HERMITE  
DONT EN 2 POINTS  $\alpha, \beta$  ON DONNE  $k$   
DE SES DERIVEES  $(T_\alpha^0, \dots, T_\alpha^k)$  et  $(T_\beta^0, \dots, T_\beta^k)$**

**Proposition 1**

Nous avons pour  $q(1 \leq q \leq k + 1)$  la relation suivante :

$$[\alpha : k + 1 - q, \beta : q] = [\alpha : k + 1] + \sum_{i=1}^q \lambda_{k,q}^i \left( [\beta : i] - \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (T_\alpha^k(\beta)) \right) / (\beta - \alpha)^{k+1-i}$$

Les coefficients  $\lambda_{k,q}^i$  vérifient la relation de récurrence

$$\lambda_{p,q}^i = \lambda_{p-1,q}^i - \lambda_{p-1,q-1}^i \quad i < q \text{ et } q > 1$$

$$\lambda_{p,q}^i = 0 \quad \text{si } i < q \text{ et } q > 1$$

$$\lambda_{k,q}^q = \lambda_{k-1,q}^q = \dots = \lambda_{qq}^q = 1.$$

$P_{\alpha,\beta,T}$  désigne le polynôme de Lagrange-Hermite construit sur les 2 points  $\alpha$ ,  $\beta$  et admettant en  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) les dérivées  $(T_\alpha^0, \dots, T_\alpha^k)$  (resp.  $T_\beta^0, \dots, T_\beta^k$ ).

**Proposition 2**

Supposons que pour les 2 points  $\alpha$ ,  $\beta$  il existe un module de continuité  $w$  tel que la condition *WI* soit vérifiée pour  $T$  sur  $\alpha$ ,  $\beta$ , alors il existe une constance  $M$  ne dépendant que de  $k$  telle que  $P_{\alpha,\beta,T}$  admette  $Mw$  comme module de continuité de sa dérivée  $k$ -ième.

**Proposition 3**

Pour tout couple de nombre strictement positifs  $\eta$ ,  $A$  avec  $\eta < A$  pour tout  $k + 1$ -uple  $\varepsilon_0 > 0, \dots, \varepsilon_n > 0$  il existe  $k + 1$  nombre  $\xi_0 > 0, \dots, \xi_k > 0$  tel que pour tout couple de nombre  $\beta$ ,  $\alpha$  vérifiant  $\eta < |\beta - \alpha| < A$  et tout  $k + 1$ -uple  $T_\alpha$  et  $T_\beta$  vérifiant pour tout  $j$  ( $0 \leq j \leq k$ )  $|T_\alpha^j| \leq \xi_j$  et  $|T_\beta^j| \leq \xi_j$ , on ait pour tout  $j$  ( $0 \leq j \leq k$ )

$$\sup_{x \in [a,b]} |P_{\alpha,\beta,T}^j| \leq \varepsilon_j.$$

**III. PROLONGEMENT D'UN CHAMP DE TAYLOR  
PAR UNE INTERPOLATION DE LAGRANGE-HERMITE  
PAR MORCEAU**

Soit  $T$  un champ de Taylor d'ordre  $k$  sur un fermé  $F \subset [a, b]$ . Définissons une fonction  $\varphi$  : si  $x \in F$  posons  $\varphi(x) = T_x^0$ , si  $x \notin F$  et si il existe 2 points  $\alpha$  et  $\beta \in F$  avec  $x \in ]\alpha, \beta[$  et  $]\alpha, \beta[ \subset F$  alors nous prenons sur  $]\alpha, \beta[$   $\varphi$  égal au polynôme  $P_{\alpha,\beta,T}$ . Si  $x$  est tel que  $F$  est situé à sa droite ou à sa gauche si  $\alpha$  est le point de  $F$  le plus près  $\varphi(x)$  est alors égal à  $T_\alpha^k(x)$ .  $\varphi$  est ainsi défini sur tout l'intervalle  $[a, b]$ ,  $\varphi$  est  $k$  fois différentiable en  $x \in F$  ou  $F$ , par contre il se pourrait qu'en un point  $x$  de la frontière de  $F$  on n'ait pas la propriété de différentiable. La proposition ci-dessus nous indique cette propriété.

**Proposition 4**

Soit  $T$  un champ de Taylor sur  $F$  alors la fonction  $\varphi$  est  $K$  fois continûment différentiable, si de plus  $T^j$  a un module de continuité  $w_j$  alors  $\varphi^j(x)$  aura pour module de continuité  $Mw_j$  ( $M$  ne dépendant que de  $j$  et  $k$ ).

Considérons une suite de champ de Taylor  $T_n$  défini sur  $F$  fermé de  $[a, b]$ .  $\varphi_n$  la suite des prolongements définis par la méthode précédente. Considérons pour  $T_n$  les conditions ci-dessous.

C1 : la suite des champs de Taylor converge simplement vers un champ de polynôme  $B$  sur  $F$ .

C2 : il existe  $k + 1$  modules de continuités  $w_0, \dots, w_k$  qui sont des modules de continuité sur  $F$  de  $T_n^0, \dots, T_n^k$ .

### **Théorème de convergence 1**

Si la suite  $T_n$  vérifie les conditions C1 et C2 alors les champs  $T_n$  convergent uniformément ainsi que les dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  vers un champ de Taylor  $T$ .

La suite des prolongements converge uniformément dans  $C^k[a, b]$  vers une fonction  $\varphi$   $k$ -fois continûment différentiable prolongeant le champ  $T$ .

## **IV. INTERPOLATION D'UN CHAMP DE TAYLOR**

Soit  $F$  un fermé de  $[a, b]$ ,  $x_1, \dots, x_n \dots$  une suite partout dense dans  $F$ . Soit  $T$  un champ de Taylor sur  $F$ . Considérons la suite finie  $x_1, \dots, x_n$  limitée aux  $n$  premiers éléments, nous notons  $X_n$  le prolongement construit par la méthode précédente appliquée au champ  $T$  sur le fermé  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

### **Proposition 5**

La suite des champs de Taylor sur  $X$  associe à  $X_n$  converge uniformément vers le champ de Taylor  $T$  sur  $F$ .

La suite des fonctions  $X_n$  converge uniformément vers le prolongement du champ  $T$  défini ci-dessus.

Nous avons aussi la convergence uniforme des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  vers les données du prolongement de  $T$ .

## **V. $\mathcal{A}$ -PROJECTIONS DE WHITNEY ET INTERPOLATION $C^k$ D'UNE FONCTION**

Rappelons ce *théorème de Whitney*.

Soit  $F$  un fermé de l'intervalle  $[a, b]$ ,  $f$  une fonction définie sur  $F$  une condition nécessaire et suffisante pour que  $f$  puisse être prolongée en une fonction de classe  $C^k$  sur  $[a, b]$  est qu'il existe un module  $w$  de continuité tel que pour tout couple  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de suites de  $k$  points, on ait  $|\mathcal{A}[f] - \mathcal{B}[f]| \leq w(d(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ .

Pour démontrer ce théorème, Whitney introduit la notion de  $\mathcal{Q}$ -projections, qui à  $a \in F$  associe un ensemble de  $k + 1$  points  $\mathcal{Q}(a)$ . Si  $a$  est point d'accumulation de  $F$ , alors nous avons  $\mathcal{Q}(a) = \{a, \dots, a\}$ ; si  $a$  n'est pas un point d'accumulation, on construit  $\mathcal{Q}(a)$  par récurrence sur le nombre d'éléments, supposons connu  $(a, a_1, \dots, a_i)_{a_{i+1}}$  le point de  $F$  le plus près de l'ensemble précédent et non dans cet ensemble (si ce point n'existe pas, cela signifie qu'il y a deux points le plus près, on en choisit un des deux, ou que  $a_i$  est point d'accumulation, dans ce cas on choisit alors  $a_{i+1} = a_i$ ).

$\mathcal{Q}(a)$  étant connu, on choisit alors un champ de polynôme  $T$  en définissant  $\overset{k}{T}_a$  comme le jet d'ordre  $k$  en  $a$  du polynôme de Lagrange (éventuellement Lagrange-Hermite si  $\mathcal{Q}(a)$  contient plusieurs fois le même point), construit sur  $\mathcal{Q}(a)$  avec la fonction  $f$ . Ce champ est un champ de Taylor  $T$ , et nous pouvons lui associer le prolongement  $\varphi$  défini par la méthode précédente.

Soient  $x_1, \dots, x_n, \dots$  une suite dense dans un fermé  $F$ , considérons les  $n$  premiers éléments de cette suite. Ils forment évidemment un fermé. Nous pouvons si  $n > k$ ,  $y$  définir des  $\mathcal{Q}$ -projections et ainsi construire par prolongement une fonction  $\Psi_n$ , appliquant la méthode précédente à cet ensemble  $F$  de  $n$  points.

### Proposition 6

Les champs de Taylor  $\overset{k}{\Psi}_n$  sur les  $n$  premiers points vérifient

$$|\overset{k}{\Psi}_{\alpha n, x_j}(x_j) - \overset{k}{\Psi}_{\alpha n x_i}(x_j)| \leq |x_i - x_j|^{k-\alpha} K w(|x_i - x_j|)$$

pour  $\alpha = 0, \dots, k$ ,  $i$  et  $j \leq n$ .  $w$  étant un module de continuité vérifiant le théorème de Whitney pour  $f$ ,  $K$  étant une constante indépendante de  $n$ .

### Proposition 7

La suite des fonctions  $\Psi_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $F$ , les dérivées  $\Psi_n^j$  convergent uniformément vers les  $\overset{k}{T}^j$  associé sur  $X$  à  $F$  par la méthode des  $\mathcal{Q}$ -projections.

La proposition 6 permet de vérifier que les champs de Taylor sur  $X$  associé à  $\Psi_n$  vérifie C2 et utilisant la proposition 7 et le théorème de convergence nous obtenons :

### Théorème

La suite des fonctions  $\Psi_n$  converge uniformément sur  $F$ , vers une fonction  $\Psi$  prolongeant  $f$ , la suite des dérivées  $\Psi^j$  converge aussi uniformément vers les dérivées de  $\Psi$  sur  $F$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- WHITNEY [1], « Differentiable function defined in closed set », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 8, 1934.
- [2] « Analytic extensions of differentiable function defined in closed sets », *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 1, 1934.
- COATMELEC [1], *Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables*. Thèse.
- GLAESER [1], « Étude de quelques algèbres tayloriennes », *Journal d'Analyse. Math de Jérusalem*, t. 6 (1958).
- DUCATEAU [1], « Interpolation par des fonctions de classe  $C^k$  sur un intervalle  $[a, b]$  », Séminaire d'Analyse Numérique, Faculté des Sciences de Grenoble, 1968-1969.