

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

MICHEL GONDRAN

Brèves communications. Programmation entière non linéaire

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, n° R3 (1970), p. 107-110

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_107_0

© AFCET, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Brèves communications

PROGRAMMATION ENTIÈRE NON LINÉAIRE

par Michel GONDRAN ⁽¹⁾

Résumé. — On montre ici qu'une grande famille de programmes en nombres entiers à fonction économique non linéaire et à contraintes linéaires se ramène à un problème d'allocation à une ressource qu'on peut résoudre par programmation dynamique (cf. Gomory [2] pour le cas linéaire).

Considérons le programme entier non linéaire :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Min } \hat{\varphi}(x) = cx + \sum_{i \in I} \varphi_i[L_i(x)] \\ \text{sous les contraintes } L_i(x) \geq 0 \quad \text{pour } i \in J, x \in Z^n \end{cases}$$

ou

• les $L_i(x)$ sont des fonctions linéaires indépendantes à coefficients entiers, ce qui entraîne en particulier

$$(1) \quad r = |I \cup J| \leq n$$

(I et J pouvant avoir une intersection non vide),

- $c = (c_k)$ est $1 \times n$ vecteur à composantes réelles,
- les φ_i sont des fonctions convexes.

REMARQUE. — La condition (1) sera toujours vérifiée dans le cas d'un programme quadratique sans contraintes.

Faisons alors le changement de variable

$$s_i = L_i(x) \quad \text{pour } i \in I \cup J$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad s = Lx + L^0$$

(1) Électricité de France, Direction des Études et Recherches, service informatique et mathématiques appliquées.

cherchons alors, à quelles conditions sur les variables s , x est entier. Dans [4], Smith donne la construction de deux matrices unimodulaires G ($\dim r \times r$) et F ($\dim n \times n$) permettant d'obtenir la matrice de Smith de la matrice L par

$$G L F = \begin{array}{|c|} \hline \varepsilon_1 \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \cdot \\ \hline \varepsilon_r \\ \hline \end{array}$$

avec $\varepsilon_i \mid \varepsilon_{i+1}$. Voir la construction dans [1].

De plus $\Delta = \Delta(L) = \prod_{i=1}^r \varepsilon_i$ est le pgcd de la matrice L , c'est-à-dire le pgcd de tous les r sous-déterminants de L .

En posant $y = F^{-1} x$ l'équation (2) devient après multiplication à gauche par G

$$(3) \quad G(s - L^0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_r y_r \end{pmatrix}$$

Comme F est unimodulaire, x entier équivaut à y entier et l'équation (3) s'écrit

$$\sum_{i \in I \cup J} g^i s_i - \sum_{i \in I \cup J} g^i L_i^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{dans } G_\Delta)$$

- où G_Δ est le groupe somme directe des classes Z_{ε_i} (Z_{ε_i} étant la classe résiduelle des entiers modulo ε_i),
- \equiv sera l'égalité dans G_Δ .

En posant

$$\sum_{i \in I \cup J} g^i L_i^0 \equiv g^0$$

le problème (P) est équivalent au problème

$$(Q) \begin{cases} \text{Min } \varphi(s) = \sum_{i \in I} \varphi_i(s_i) + \sum_{i \in J} \lambda^i s_i \\ \text{sous les contraintes } s \in Z^n, s_J \geq 0 \\ \sum_{i \in I \cup J} g^i s_i \equiv g^0 \end{cases}$$

avec $\lambda_i \geq 0$ (condition de possibilité).

Remarque sur le problème (Q) [3]

L'ordre du groupe G_Δ est $\prod_{i=1}^r \varepsilon_i = \Delta$.

Soit \hat{s}_i la valeur continue qui minimise $\varphi_i(s_i)$.

Dans le cas où \hat{s}_i est entier et où $I \cap J = \emptyset$

Il existe une solution optimale s de (Q) tel que

$$\sum_{i \in J} s_i + \sum_{i \in I} |s_i - \hat{s}_i| \leq \Delta - 1$$

Si r_i est l'ordre du sous-groupe engendré par g^i il existe alors une solution optimale s de (Q) tel que

$$\begin{aligned} 0 \leq s_i \leq r_i - 1 & \quad \text{pour } i \in J - I \\ [\hat{s}_i] - r_i \leq s_i \leq [\hat{s}_i] + r_i & \quad \text{pour } i \in I \end{aligned}$$

La résolution du problème (Q) par programmation dynamique [3] se fera en moins de $3|J|\Delta + 2|I|\Delta^2$ opérations.

On obtient x solution de (P) à partir d'une solution optimale s de (Q) en résolvant l'équation (2) (cf. [1]).

EXEMPLE

$$(P) \begin{cases} \text{Min } \hat{\varphi}(x) = 3(x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4)^2 \\ \quad + 5(2x_1 + 3x_2 + x_3 - 17)^2 + 7(3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 25)^2 \\ \text{avec } x \in Z^3 \end{cases}$$

Le changement de variable donne

$$(Q) \begin{cases} \text{Min } \varphi(s) = 3s_1^2 + 5s_2^2 + 7s_3^2 \\ \text{sous la contrainte } s_1 + s_3 \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

D'où $s = (1, 0, 0)$ la solution de (Q).

On déduit alors la valeur de $x_{\text{opt}} = (3, 3, 2)$

$$\hat{\varphi}_{\text{opt}} = 3$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FIOROT (J. Ch.) et GONDRAN (M.), « *Résolution d'un système linéaire en nombres entiers* », Bulletin des Études et Recherches de l'E.D.F., série C, 1969, n° 2, p. 65-116.
- [2] GOMORY (R. E.), *On the relation between integer and non integer solutions to linear programs*. Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 53 (1965), p. 260-265.
- [3] GONDRAN (M.), *Dualité diophantienne*, Électricité de France, note HI 364/2 du 7 août 1970.
- [4] SMITH (J. H. S.), « *On systems of linear indeterminate equations and congruences* ». Philosophical Transactions, CLI (1861), p. 293-326.