REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

CLAUDE BARDOS
MOÏSE SIBONY

Sur l'approximation d'une classe de problèmes d'évolution non linéaires

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 3, nº R3 (1969), p. 99-111
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_3_99_0>

R.I.R.O.
(3e année, N° R-3, 1969, p. 99-111)

SUR L'APPROXIMATION D'UNE CLASSE DE PROBLEMES D'EVOLUTION NON LINEAIRES

par Claude BARDOS (1) et Moïse SIBONY (2)

Résumé. — *On se donne un opérateur A non nécessairement linéaire, monotone d'un Banach V dans son dual V'. Soit $\Lambda_V : D(\Lambda) \cap V \to V'$ où $-\Lambda$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu de contraction dans H (espace de Hilbert). Sous certaines hypothèses ; l'équation*

$$\Lambda_V u + Au = f \tag{2}$$

admet une solution unique.

On donne ensuite une méthode d'approximation de cette solution basée essentiellement sur une décomposition de l'équation (1) *en deux équations distinctes dont les solutions sont elles-mêmes calculées à l'aide d'une méthode itérative.*

Les problèmes du type (1) *régissent une classe de problèmes d'évolution non linéaires.*

Le but de ce travail est de généraliser à certains problèmes d'évolution non linéaires, une variante de la méthode des pas fractionnaires, qui a été introduite par Lions et Téman (cf. [6], [7], et également la bibliographie de ces travaux), puis étudiée par Brezis [3] pour des inéquations variationnelles elliptiques non linéaires.

I. LE PROBLEME EXACT

Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbf{R}$, et V un espace de Banach inclus algébriquement et topologiquement dans H, dense dans H, et V' le dual de V. Comme V est dense dans H, on a les injections usuelles

$$V \subset H \subset V'.$$

(1) Chargé d'Enseignement à la Fac. des Sciences de Paris.
(2) Chargé d'Enseignement à la Fac. des Sciences de Tours.

On note respectivement $(\,,)$, $|\;|$, $\|\;\|$, $\|\;\|'$, le produit scalaire et la norme sur H, la norme sur V et la norme duale; et on désigne également par $(,)$ le produit scalaire entre V et V'.

Soit A un opérateur non linéaire de V dans V', vérifiant les hypothèses suivantes :

(1) A est strictement monotone :

$$(Au - Av, u - v) > 0 \quad , \quad \forall\, u \neq v \in V\,;$$

(2) A est hémicontinu : pour tout couple $u, v \in V$, l'application

$$t \longmapsto A[tu + (1-t)v]$$

est continue de $(0, 1)$ dans V faible ;

(3) A est borné ;

(4) A est coercif :

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \frac{(Av, v)}{\|v\|} = +\infty.$$

REMARQUE 1. — On sait (cf. Brezis [2]) que, sous les hypothèses (1) et (2), A est de type M, c'est-à-dire que :

(5) Si $u_i \rightharpoonup u$ dans V faible, et si $Au_i \rightharpoonup \eta$ dans V' faible, $Au = \eta$ dès que

$$\limsup\, (Au_i, u_i) \leqslant (\eta, u).$$

Il en résulte en particulier que, sous les hypothèses (1), (2), (3), A est demi-continu, c'est-à-dire continu de V fort dans V' faible.

D'autre part, soit $\Lambda \in g(H)$ (on désigne par $g(H)$ l'ensemble des opérateurs non bornés dans H, tels que — Λ soit générateur d'un semi-groupe fortement continu de contraction dans H); on dira que Λ est V-régulier si :

(6) $D(\Lambda^*) \cap V$ est dense dans V (1) ;

(7) Pour tout couple $(u, f) \in V \times V'$, tels que

$$(u, \Lambda^* v) = (f, v) \quad , \quad \forall\, v \in D(\Lambda^*) \cap V,$$

il existe une suite $\{ u_n \} \subset D(\Lambda) \cap V$ vérifiant :

(8) $$\lim_{n \to \infty} u_n = u \qquad \text{dans } V \text{ faible},$$

(9) $$\lim_{n \to \infty} \Lambda u_n = f \qquad \text{dans } V' \text{ faible}.$$

Dans l'article de Bardos-Brezis [1], on montre que si l'hypothèse (6) est vérifiée, l'opérateur Λ, restreint à $D(\Lambda) \cap V$ considéré comme opérateur non

(1) Λ^* désignant bien entendu l'adjoint de Λ dans H.

borné de V dans V', est fermable; on désignera par Λ_V sa fermeture (de domaine $D(\Lambda_V)$).

Dans ce même article [1], on établit le théorème suivant :

Théorème 1. — *Soient A un opérateur non linéaire de V dans V' vérifiant les hypothèses* (1), (2), (3) *et* (4), *et* $\Lambda \in g(H)$ *un opérateur V-régulier (vérifiant donc les hypothèses* (6) *et* (7)), Λ_V *la fermeture de sa restriction à* $D(\Lambda) \cap V$, *considérée comme opérateur non borné de V dans V'; alors, pour tout $v \in V$, il existe un unique $u \in D(\Lambda_V)$ vérifiant*

$$\Lambda_V u + Au = f. \tag{10}$$

Ce théorème généralise, pour les équations, un théorème d'existence et d'unicité démontré, dans le cas des inéquations, par Brezis [2], en supposant alors que le semi-groupe $\exp(-t\Lambda)$ opère dans V.

Voici un exemple où cette dernière hypothèse n'est pas réalisée.

Exemple 1. — Soient Ω l'ouvert $]a, b[$ de $\mathbf{R}$ $(a < 0 < b)$, et Q l'ouvert $\Omega \times]0, T[$, $0 < T < +\infty$. On désigne par H l'espace $L^2(Q)$, et par V l'espace

$$L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \qquad (2 \leqslant p < +\infty).$$

L'opérateur Λ,

$$D(\Lambda) = \begin{cases} (11) \quad u \in L^2(Q), \qquad x\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(Q)\,(^1), \\[2ex] (12) \quad \begin{cases} u(x, 0) = 0, & \text{pour} \quad 0 < x < b, \\ u(x, T) = 0, & \text{pour} \quad a < x < 0, \end{cases} \end{cases}$$

$$\Lambda u = x\frac{\partial u}{\partial t},$$

appartient à $g(H)$, et est V-régulier; on en déduit (cf. [1]) que, pour tout $f \in V' = L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1\right)$, il existe un unique $u \in V$ tel que

$$x\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x} = f, \tag{13}$$

$$\begin{cases} u(x, T) = 0 \quad , & \text{pour} \quad a < x < 0, \\ u(x, 0) = 0 \quad , & \text{pour} \quad 0 < x < b. \end{cases} \tag{14}$$

On trouvera de nombreux autres exemples dans [1].

---

(1) Compte tenu de (11), (12) a bien un sens (cf. [1]).

II. APPROXIMATION PAR ECLATEMENT DE LA SOLUTION DE (10)

On introduit une variable supplémentaire s, et on considère $u_\varepsilon(s)$ solution du problème d'évolution :

$$(15) \qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial s} + \Lambda_V u_\varepsilon(s) + A u_\varepsilon(s) = f(s), \\ u_\varepsilon(0) = u_0, \qquad \text{donné quelconque dans } H. \end{cases}$$

On vérifie que, sous des hypothèses convenables (cf. [1], § IV), (15) admet une unique solution, et que

$$\frac{1}{S}\int_0^S u_\varepsilon(s)\, d\sigma \qquad (S > 0 \text{ fixé})$$

converge lorsque ε tend vers zéro, vers u, solution de (10).

On approche ensuite la solution de (15) par une méthode de pas fractionnaires, et on est ainsi conduit à introduire : S, nombre positif définitivement fixé, ε paramètre positif destiné à tendre vers zéro, N entier destiné à tendre vers l'infini, et $u_0 \in H$, u_0 étant donné.

On définit les suites u^n et $u^{n+\frac{1}{2}}$ comme solutions des problèmes :

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) + A u^{n+\frac{1}{2}} = f, \\ u^{n+\frac{1}{2}} \in V, \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}) + \Lambda u^{n+1} = 0, \\ u^{n+1} \in D(\Lambda), \end{cases}$$

($k = S/N$ et $u^0 = u_0 \in H$). Comme Λ appartient à $g(H)$, (17) admet bien une unique solution; d'autre part, il résulte des hypothèses faites sur A (hypothèses (1), (2), (3) et (4) que (16) admet également une unique solution.

Théorème 2. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *si* ε *et* k *tendent vers zéro de manière à ce que* $\sqrt{\dfrac{k}{\varepsilon}}$ *tende vers zéro.*

$$u_{1\varepsilon} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u^{n+\frac{1}{2}}$$

et

$$u_{2\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+1}$$

tendent vers u respectivement dans V faible et dans H faible.

La démonstration de ce théorème se fait à l'aide de 3 lemmes (les 2 premiers étant obtenus en généralisant un peu des méthodes de Brezis [3]).

On pose

$$\varphi(r) = \inf_{\|x\|=r} \frac{(Ax, x)}{\|x\|}.$$

Lemme 1. — *Pour tout $a \in \mathbf{R}$, il existe une constante C telle que*

(18) $$ar - \varphi(r)r \leqslant C \quad , \quad \forall\, r \geqslant 0.$$

D'après l'hypothèse (4), $\varphi(r)$ tend vers l'infini lorsque r tend vers l'infini, donc il existe ρ tel que

(19) $$\varphi(r) \geqslant a \quad , \quad \forall\, r \geqslant \rho,$$

et donc $ar - \varphi(r) \leqslant 0$, $\forall\, r \geqslant \rho$.

D'autre part, d'après la monotonie de A,

(20) $$(Ax, x) \geqslant (A(0), x) \geqslant -\|A(0)\|' \, \|x\|,$$

et donc

(21) $$\inf_{\|x\|=r} \frac{(Ax, x)}{\|x\|} \geqslant -\|A(0)\|',$$

et ainsi, pour $r < \rho$, on a

(22) $$ar - \varphi(r)r \leqslant a\rho + \|A(0)\|'\rho,$$

ce qui, compte tenu de (19), implique (18).

Lemme 2. — *On a les majorations suivantes :*

(23) $$\sqrt{\varepsilon}\, |u^N| \leqslant C,$$

(24) $$|u_{2\varepsilon} - u_{1\varepsilon}| \leqslant C \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}},$$

(25) $$\|u_{1\varepsilon}\| \leqslant C\ (^1).$$

Démonstration. — On multiplie scalairement l'équation

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) + Au^{n+\frac{1}{2}} = f$$

(1) C désignera par la suite plusieurs constantes, toutes indépendantes de ε et de k.

par $u^{n+\frac{1}{2}}$, et on obtient

$$(26)\quad \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}}|^2 - |u^n|^2) + \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2) \leqslant \|f\|' \, \|u^{n+\frac{1}{2}}\| - (Au^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+\frac{1}{2}}) \leqslant \|f\|' \, \|u^{n+\frac{1}{2}}\| - \varphi(\|u^{n+\frac{1}{2}}\|) \, \|u^{n+\frac{1}{2}}\|.$$

Soit, d'après le lemme 1,

$$(27)\quad \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}}|^2 - |u^n|^2) + \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2) \leqslant C.$$

De même, on multiplie

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}) + \Lambda u^{n+1} = 0$$

par u^{n+1}, ce qui, compte tenu de la positivité de Λ, donne

$$(28)\quad \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+1}|^2 - |u^{n+\frac{1}{2}}|^2) + \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2) \leqslant 0.$$

En additionnant (27) et (28), puis en sommant ces inégalités de 0 à $N - 1$, on obtient

$$(29)\quad \frac{\varepsilon}{2k}|u^N|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2 + |u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2) \leqslant CN.$$

Soit

$$(30)\quad \varepsilon \, |u^N|^2 \leqslant C,$$

$$(31)\quad \sum_{n=0}^{N-1} \varepsilon(|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2) \leqslant C.$$

Comme la fonction $u \longmapsto |u|^2$ est convexe,

$$(32)\quad \varepsilon \, |u_{2\varepsilon} - u_{1\varepsilon}|^2 = \varepsilon \left| \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}) \right|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2 \leqslant C/N,$$

et donc

$$(33)\quad |u_{2\varepsilon} - u_1| \leqslant C\sqrt{\frac{k}{\varepsilon}}.$$

On a ainsi démontré les inégalités (23) et (33). Pour démontrer l'inégalité (25), on multiplie l'équation

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) + Au^{n+\frac{1}{2}} = f$$

par $u^{n+\frac{1}{2}} - v$, grâce à la monotonie de A, on obtient ($v \in V$),

$$(34)\quad \frac{\varepsilon}{2k}(|u^{n+\frac{1}{2}}|^2 - |u^n|^2) + \frac{\varepsilon}{2k}|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2 - \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n, v) + (Av, u^{n+\frac{1}{2}} - v) \leqslant (f, u^{n+\frac{1}{2}} - v).$$

On somme ensuite cette expression de 0 à $N - 1$, on divise par N, et on remplace v par $\frac{1}{2} u_{1\varepsilon}$, ce qui est loisible car $u_{1\varepsilon}$ appartient à V, ainsi on a

$$(35)\quad \frac{\varepsilon}{2S}\sum_{n=0}^{N-1}(|u^{n+\frac{1}{2}}|^2 - |u^n|^2) + \frac{\varepsilon}{2S}\sum_{n=0}^{N-1}|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2k}(u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}, u_{1\varepsilon}) + \left(A\frac{1}{2}u_{1\varepsilon}, \frac{1}{2}u_{1\varepsilon}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f, u_{1\varepsilon}).$$

De même, on multiplie

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+1} - u^n) + \Lambda u^{n+1} = 0$$

par $u^{n+1} - v$, en supposant cette fois que v appartient à $D(\Lambda)$; en procédant comme ci-dessus, et en particulier en utilisant la paritivité de V, on obtient

$$(36)\quad \frac{\varepsilon}{2S}\sum_{n=0}^{N-1}(|u^{n+1}|^2 - |u^{n+\frac{1}{2}}|^2) + \frac{\varepsilon}{2k}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2 - \frac{\varepsilon}{k}(u_{2\varepsilon} - u_{1\varepsilon}, v) + (\Lambda v, u_{2\varepsilon} - v) \leqslant 0.$$

On remplace v par $\frac{1}{2} u_{2\varepsilon}$, puis on additionne à (35) l'équation ainsi obtenue, et en remarquant que

$$(\Lambda u_{2\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \geqslant 0,$$

il vient

$$(37)\quad \frac{\varepsilon}{2S}[|u^N|^2 - |u^0|^2] + \frac{\varepsilon}{2k}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}|u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{\varepsilon}{2k}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2k}|u_{2\varepsilon} - u_{1\varepsilon}|^2 + \left(A\frac{1}{2}u_{1\varepsilon}, \frac{1}{2}u_{1\varepsilon}\right) \leqslant \left(f, \frac{1}{2}u_{1\varepsilon}\right).$$

Mais, d'après la convexité de la fonction $u \mapsto |u|^2$,

$$(38)\quad Z_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2k}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}|[u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}|^2 + \frac{\varepsilon}{2k}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{N}|u^{n+\frac{1}{2}} - u^n|^2 - \frac{\varepsilon}{2k}|u_{2\varepsilon} - u_{1\varepsilon}|^2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2k}[2|u_{1,\varepsilon} - u_{2,\varepsilon}|^2 - |u_{1\varepsilon} - u_{2\varepsilon}|^2] \geqslant 0.$$

Et ainsi, compte tenu de (23), on peut, en utilisant la coercitivité de A, déduire de (38) l'inégalité (25), ce qui termine la démonstration du lemme 2.

Lemme 3. — *Si $u \in V$ vérifie l'inégalité*

(39) $(\Lambda v, v - u) + (Av, v - u) \geqslant (f, v - u) \quad , \quad \forall\, v \in D(\Lambda) \cap V,$

u appartient à $D(\Lambda_V)$, et est solution de l'équation

(40) $$\Lambda_V u + Au = f.$$

Démonstration. — Comme Λ, restreint à $D(\Lambda) \cap V$, est dense dans $D(\Lambda_V)$ muni de la norme du graphe, et comme l'application $v \mapsto Av$ est demi-continue (cf. remarque 1), il résulte de (32) que l'on a

(41) $(\Lambda_V v, v - u) + (Av, v - u) \geqslant (f, v - u) \quad , \quad \forall\, v \in D(\Lambda_V).$

Ceci posé, on remarque que l'opérateur monotone

$$v \mapsto \Lambda_V v + Av - f,$$

de domaine $D(\Lambda_V)$, est surjectif sur V' (d'après le théorème 1), il est donc maximal monotone (cf. Browder [5]), c'est-à-dire qu'il n'admet pas de prolongement monotone.

Si u n'appartenait pas à $D(\Lambda_V)$, l'opérateur L, défini par

$$\begin{aligned} &D(L) = D(\Lambda_V) \cup \{ u \}, \\ &Lv = \Lambda_V v + Av - f \quad , \quad \text{si } v \in D(\Lambda_V), \\ &Lu = 0, \end{aligned}$$

serait un prolongement de l'opérateur $v \mapsto \Lambda_V v + Av - f$, monotone d'après (41), aussi u appartient à $D(\Lambda_V)$.

De même, si

$$\Lambda_V u + Au - f \neq 0,$$

l'opérateur L multivoque, défini en posant

$$\begin{aligned} &Lu = \{ \Lambda_V u + Au - f, 0 \}, \\ &Lv = \Lambda_V v + Av - f \quad , \quad \text{si } v \neq u, \end{aligned}$$

serait un prolongement monotone (toujours d'après (41)) de l'opérateur

$$v \mapsto \Lambda_V v + Av - f,$$

aussi u doit appartenir à $D(\Lambda_V)$ et vérifier

$$\Lambda_V u + Au = f,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Compte tenu de ces trois lemmes, la démonstration du théorème 2 est maintenant facile :

On commence par extraire, en utilisant le lemme 2, des suites $u_{1\varepsilon}$ et $u_{2\varepsilon}$ deux sous-suites, encore notées $u_{1\varepsilon}$ et $u_{2\varepsilon}$, telles que

$$u_{1\varepsilon} \to u_1 \quad \text{dans} \quad V \text{ faible,}$$
$$u_{2\varepsilon} \to u_2 \quad \text{dans} \quad H \text{ faible.}$$

D'après l'hypothèse $\lim \sqrt{\dfrac{k}{\varepsilon}} = 0$ et l'inégalité (24),

$$u_1 = u_2 = w.$$

On multiplie alors l'équation

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n) + Au^{n+\frac{1}{2}} = f$$

par $u^{n+\frac{1}{2}} - v$, et l'équation

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+1} - u^n) + \Lambda u^{n+1} = 0$$

par $u^{n+1} - v$, en choisissant $v \in D(\Lambda) \cap V$, on en déduit alors les inégalités

$$\text{(42)} \quad \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}} - u^n, u^{n+\frac{1}{2}} - v) + (Av, u^{n+\frac{1}{2}} - v) \leqslant (f, u^{n+\frac{1}{2}} - v)$$

et

$$\text{(43)} \quad \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}, u^{n+1} - v) + \Lambda v, u^{n+1} - v) \leqslant 0.$$

En sommant ces deux inégalités pour n compris entre 0 et $N - 1$, on obtient après avoir divisé par N,

$$\text{(44)} \quad \frac{\varepsilon}{s}[|u^N|^2 - |u_0|^2] + \frac{\varepsilon}{s}(u_0 - u^N, v)$$
$$+ (Av, u_{1\varepsilon} - v) + (\Lambda v, u_{2\varepsilon} - v) \leqslant (f, u_{1\varepsilon} - v).$$

Soit, en passant à la limite, compte tenu de (23),

$$\text{(45)} \quad (Av, w - v) + (\Lambda v, w - v) \leqslant (f, w - v).$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $v \in D(\Lambda) \cap V$, on en déduit, d'après le lemme 3, que $w = u$ est solution de l'équation (10).

Comme cette solution est unique, non seulement les sous-suites extraites, mais les suites $u_{1\varepsilon}$ et $u_{2\varepsilon}$, dans leur ensemble, convergent vers u, respectivement dans V faible et dans H faible.

Théorème 3. — *Sous les hypothèses du théorème 2, si de plus A est lipschitzienne sur les bornés de V, et si, pour toute suite ξ_k d'éléments de V tendant vers ξ dans V faible, la relation*

$$\limsup\,(A\xi_k, \xi_k - \xi) \leqslant 0 \tag{46}$$

implique la convergence de ξ_k vers ξ, non seulement dans V faible, mais aussi dans V fort (1), *$u_{1\varepsilon}$ converge vers u dans V fort, tandis que $u_{2\varepsilon}$ converge vers u dans H fort.*

Démonstration. — Soit $\hat{u} \in D(\Lambda) \cap V$; dans (34), on remplace v par

$$w_{1\varepsilon} = \frac{1}{2}(u_{1\varepsilon} + \hat{u}),$$

ce qui est loisible car $\hat{u}$ et u_1 appartiennent à V, puis on somme, pour n variant de 0 à $N - 1$, l'inégalité obtenue, et on divise par N; dans (36), on remplace v par $\hat{w}_{2\varepsilon} = \frac{1}{2}(u_{2\varepsilon} + \hat{u})$, ce qui est également possible car $\hat{u}$ et $u_{2\varepsilon}$ appartiennent à $D(\Lambda)$.

En additionnant les deux inéquations ainsi obtenues, il vient, en utilisant comme dans la démonstration du lemme 2 le fait que Z_ε (défini par (38)) est positif.

(47)
$$\begin{aligned}(Aw_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon} - w_{1\varepsilon}) &\leqslant (\Lambda w_{2\varepsilon}, w_{2\varepsilon} - u_{2\varepsilon}) + (f, u_{1\varepsilon} - w_{1\varepsilon}) + \varepsilon C(|\hat{u}| + 1)\\ &\leqslant \frac{1}{2}(\Lambda\hat{u}, \hat{u} - u_{2\varepsilon}) + (f, u_{1\varepsilon} - w_{1\varepsilon}) + \varepsilon C(|\hat{u}| + 1),\end{aligned}$$

d'après la positivité de Λ.

Enfin, soit $\xi > 0$; comme $D(\Lambda) \cap V$ est dense dans $D(\Lambda_V)$, et comme A est lipschitzienne sur les bornés de V, il existe $\hat{u}$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{1}{2}(\Lambda\hat{u}, \hat{u} - u_{2\varepsilon}) + (f, u_{1\varepsilon} - w_{1\varepsilon}) - \frac{1}{2}(\Lambda\hat{u}, u - u_{2\varepsilon}) - \left(f, \frac{u_{1\varepsilon} - u}{2}\right)\right| \leqslant \xi. \tag{48}$$

D'autre part,

$$\left|(Aw_{1\varepsilon}, u_{1\varepsilon} - w_{1\varepsilon}) - \left(A\frac{u_{1\varepsilon} + u}{2}, \frac{u_{1\varepsilon} - u}{2}\right)\right| \leqslant \xi, \tag{49}$$

---

(1) Ceci est vérifié par exemple (cf. Brezis et Sibony [4]) si V est un espace de Banach uniformément convexe, et s'il existe une application $\theta : \mathbf{R}^+ \longmapsto \mathbf{R}^+$ strictement croissante avec $\lim_{r\to\infty} \theta(r) = +\infty$ telle que, pour tout couple

$$(u, v) \in V \times V,$$

on ait

$$(Au - Av, u - v) \geqslant (\theta(\|u\|) - \theta(\|v\|))(\|u\| - \|v\|).$$

et ainsi

$$(50)\quad \left(A\frac{u_{1\varepsilon}+u}{2}, \frac{u_{1\varepsilon}-u}{2}\right) \leqslant 2\xi + \varepsilon C(1+|\hat{u}|) + \frac{1}{2}[(\Lambda\hat{u}, u-u_{2\varepsilon}) + (f, u-u_{1\varepsilon})].$$

Il en résulte, comme $u_{1\varepsilon}$ converge vers u dans V faible, tandis que $u_{2\varepsilon}$ converge vers u dans H faible, que

$$(51)\qquad \limsup \left(A\frac{u_{1\varepsilon}+u}{2}, \frac{u_{1\varepsilon}-u}{2}\right) \leqslant 2\xi \qquad (\forall\, \xi \geqslant 0).$$

On en déduit, d'après (46), que $\frac{1}{2}(u_{1\varepsilon}+u)$ converge vers u dans V fort.

Application. — Dans le cas de l'exemple 1, on remarque que les équations qui définissent u^n et u^{n+1} sont

$$(52)\qquad \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}}-u^n) - \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} = f,$$

avec les conditions aux limites,

$$(53)\qquad u(a,t) = u(b,t) = 0 \quad , \quad \forall\, t \in (0,T)$$

et

$$(54)\qquad \frac{\varepsilon}{k}(u^{n+1}-u^{n+\frac{1}{2}}) + x\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = 0.$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$(55)\qquad \begin{cases} u(x,0) = 0 \quad , & \text{si } a < x < 0, \\ u(x,T) = 0 \quad , & \text{si } 0 < x < b, \end{cases}$$

ce sont toutes deux des équations différentielles ordinaires.

Dans le cas général, les solutions des équations du type

$$\frac{\varepsilon}{k}(u^{n+\frac{1}{2}}-u^n) + Au^{n+\frac{1}{2}} = f$$

se calculent par les méthodes d'itération de Sibony [8].

Remarque 2. — Les théorèmes 2 et 3 se généralisent, sans modifications importantes, aux situations suivantes :

Soient $V_i (1 \leqslant i \leqslant p)$, p espaces de Banach réflexifs tels que

$$V \subset V_i \subset H,$$

les injections étant continues, et chaque espace étant dense dans le suivant.

On suppose que

(56) $$V = \bigcap_{i=1}^{p} V_i \quad \text{(algébriquement et topologiquement).}$$

V' s'identifie alors à l'espace

(57) $$V' = \sum_{i=1}^{p} V_i'.$$

Soient A_i, p opérateurs monotones hémicontinus et coercifs de V dans V', tels que, pour tout $v \in V$, on ait

(58) $$Av = \sum_{i=1}^{p} A_i v,$$

et $f_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ une décomposition de f en éléments de V_i' (ce qui est possible d'après (57)).

(59) $$f = \sum_{i=1}^{p} f_i.$$

D'autre part, soient $\Lambda_j (1 \leqslant j \leqslant q)$, q opérateurs non bornés dans H, appartenant à $g(H)$, tels que l'opérateur

$$\mathring{\Lambda} = \sum_{j=1}^{q} \Lambda_j,$$

défini sur $\bigcap_{j=1}^{q} D(\Lambda_j) \cap V$ et considéré comme opérateur non borné de V dans V', vérifie la relation

(60) $$\bar{\mathring{\Lambda}} = \Lambda_V.$$

On définit alors les suites

$$u^{n+(l/r)} \qquad (r = p + q, 1 \leqslant l \leqslant r)$$

par les relations

(61) $$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}(u^{n+(l/r)} - u^{n+(l-1)/2}) + A_l u^{n+(l/r)} = f_l \text{ (1)}, \\ u^{n+(l/r)} \in V_L, \qquad \text{si} \qquad 1 \leqslant l \leqslant p, \end{cases}$$

et

(62) $$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{k}(u^{n+(l/r)} - u^{n+(l-1)/2}) + \Lambda_j u^{n+(l/r)} = 0, \\ u^{n+(l/r)} \in D(\Lambda_j), \end{cases}$$

(1) $k = \dfrac{S^o}{N}$, S fixé, N destiné à tendre vers l'infini.

si $l = p + j(1 \leqslant j \leqslant q)$, et

(63) $\quad u^0 = u_0 \quad$ donné arbitrairement dans H ;

on peut alors, en utilisant les méthodes de démonstration des théorèmes 2 et 3, établir les théorèmes suivants :

Théorème 4. — *Soient, dans la situation du théorème* 1, V_i, A_i, f_i et Λ_j *vérifiant les hypothèses* (56), (57), ..., (60) ; *alors les suites*

$$u_{l\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u^{n+(l/r)}$$

convergent, lorsque k et ε tendent vers zéro $\left(\text{\textit{de manière à ce que}} \lim \sqrt{\frac{k}{\varepsilon}} = 0\right)$, *vers u, solution de l'équation*

$$\Lambda_V u + Au = f,$$

respectivement dans V faible si $1 \leqslant l \leqslant p$, et dans H faible si $l = p + j$, $1 \leqslant j \leqslant q$.

Théorème 5. — *Sous les hypothèses du théorème* 4, *et de plus, si, pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant q$, A_i est lipschitzienne sur les bornés de V_i et possède la propriété suivante :*

Si ξ_k tend vers ξ dans V_i faible et si $\limsup\, (A_i\xi_k, \xi_k - \xi) \leqslant 0$, *alors ξ_k tend vers ξ dans V_i fort,*

les suites $u_{l\varepsilon}$, définies au théorème 4, *convergent vers u dans V_l fort si* $1 \leqslant l \leqslant p$, *et dans H fort si $l = p + j$, $1 \leqslant j \leqslant q$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bardos (C.) et Brezis (H.). Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaire, *J. of diff. equations* (à paraître).

[2] Brezis (H.). Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 18, 1968, p. 115-175.

[3] ~~Brezis (H.). Travail non publié.~~

[4] Brezis (H.) et Sibony (M.). Méthodes d'approximation et d'itération pour les opérateurs monotones, *Arch. for rat. Mech. and Anal.*, Berlin, t. 28, 1968, p. 59-82.

[5] Browder (F. E.). *Problèmes non linéaires.* Montréal, Les Presses universitaires de Montréal, 1966 (Séminaire de Mathématiques supérieures, Été 1965, 15).

[6] Lions (J.-L.) et Temam (R.). Une méthode d'éclatement des opérateurs et des contraintes en calcul des variations, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 263, 1966, Série A, p. 563-565.

[7] Lions (J.-L.) et Temam (R.). Approximation de la solution d'inéquations variationnelles par décomposition des opérateurs et éclatement des contraintes. *Applications* (non publié).

[8] Sibony (M.). Thèse à paraître.