REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

JEAN-LOUP BAER

Matrice de connexion minimale d'une matrice de précédence donnée

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 3, n° R1 (1969), p. 65-73

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_1_65_0>

R.I.R.O.
3e année, N° 16, 1969, p. 65-73)

MATRICE DE CONNEXION MINIMALE D'UNE MATRICE DE PRECEDENCE DONNEE.

par Jean-Loup BAER [1]

Résumé. — *Un algorithme pour générer une matrice de connexion minimale d'une matrice de précédence donnée est présenté. Il se décompose en quatre phases : détermination des sous-graphes fortement connexes maximum; compression de la matrice de précédence en une matrice pour un graphe sans circuit; détermination de la matrice de connexion minimale du graphe sans circuit; extension de la matrice minimale.*

INTRODUCTION

Étant donné un graphe orienté $G(X, U)$ où X est l'ensemble des sommets (X a n éléments) et U l'ensemble des arcs de G, on peut lui associer une matrice booléenne carrée $Z(n, n)$ dite *matrice de connexion* de G (ou encore matrice associée à G). Cette matrice Z est telle que $z_i^j = 1$ (i représentant l'indice des lignes et j celui des colonnes) si et seulement si l'arc $u_k = (x_j, x_i)$ appartient à U. Dans le cas contraire, $z_i^j = 0$. Le problème de trouver la matrice booléenne carrée $D(n, n)$ définie par

$$(1) \qquad D = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z^k = \bigcup_{k=1}^{n} Z^k,$$

dite *matrice de précédence* de G a été traité par de nombreux auteurs (un problème équivalent est celui de déterminer la fermeture transitive de G). Une comparaison de ces différents algorithmes (2) montre que celui de Warshall (6) est le plus puissant.

Dans cet article, nous résolvons le problème inverse. Étant donné la

(1) Université de Californie à Los Angeles. Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet AT(11-1) Gen. 10, Proj. 14 de l'Atomic Energy Commission.

matrice D, trouver une matrice Z telle que la relation (1) ci-dessus soit vraie. Notons qu'une solution triviale peut être obtenue en prenant $Z = D$. Aussi chercherons-nous une matrice Z minimale, c'est-à-dire telle que le nombre de ses éléments non nul est minimum. En général il existe plusieurs solutions qui, comme nous le verrons, peuvent être déduites les unes des autres très facilement. La seule restriction que nous imposons est que D soit transitive, c'est-à-dire que si $d_i^j = 1$ et $d_j^k = 1$ alors $d_i^k = 1$. Une solution a été donnée par Simoes-Pereira [5]. Cependant l'algorithme décrit dans cette référence peut être considérablement simplifié en utilisant la théorie des graphes.

Nous suivrons les notations de Berge [1] et Roy [4] et en particulier nous dirons que:

Un *précédent* de x_i est un sommet x_j, $x_j \in X$, tel que l'arc $(x_j, x_i) \in U$.

Un *ascendant véritable* de x_i est un sommet x_j, $x_j \in X$, tel qu'il existe un chemin allant de x_i à x_j. Les *ascendants* de x_i sont ses ascendants véritables et x_i lui-même.

On définit de la même façon *suivant*, *descendant véritable* et *descendant* d'un sommet.

Notons alors qu'une ligne Z_i de Z est la représentation sous forme de vecteur booléen des précédents de x_i et une colonne Z^j celle des suivants de x_j. De même D_i représente les ascendants véritables de x_i et D^j les descendants véritables de x_j. Imposer D transitive est donc simplement imposer que D soit une matrice de précédence d'un graphe.

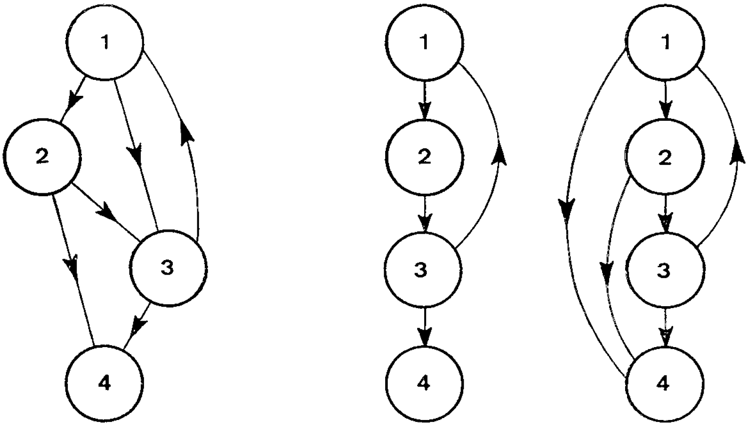
On sait qu'un *sous-graphe* de $G(X, U)$ est un graphe $H(Y, V)$ où $Y \subset X$ et V est l'ensemble des arcs de U ayant leur deux extrémités dans Y. Un sous-graphe est *fortement connexe* si deux sommets distincts admettent toujours au moins un ascendant et un descendant communs. Étant donné $x_i \in X$, un sous-graphe fortement connexe $H(Y, V)$ de $G(X, U)$ est dit *sous-graphe fortement connexe maximum* (S.G.F.C.M.) contenant x_i si $x_i \in Y$ et s'il n'existe aucun autre sous-graphe fortement connexe $H(Y', V')$, $x_i \in Y'$, tel que le nombre d'éléments de Y', soit supérieur au nombre d'éléments de Y. Pour un x_i donné, le S.G.F.C.M. $H(Y, V)$, $x_i \in Y$, est unique [3].

Avant de donner l'algorithme générant Z, nous résolvons les trois problèmes suivants:

1. Détermination des S.G.F.C.M.
2. Détermination de Z minimale pour un graphe fortement connexe.
3. Détermination de Z minimale pour un graphe sans circuit.

Algorithme 1. Détermination des S.G.F.C.M.

Étant donné la matrice de précédence D représentative d'une classe de graphes $G(X, U)$ (en effet si pour D donnée X est unique, U ne l'est pas nécessairement cf. fig. 1), les S.G.F.C.M. peuvent être déterminés de la façon suivante (nous appliquons ici une variante de la méthode donnée en [3]):



$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 1

Les 3 graphes ont même matrice de précédence D.

Nous considérons tout d'abord l'ensemble des sommets qui n'appartiennent à aucun circuit. Si x_i est l'un d'eux, alors $d_i^i = 0$. Soit C_0 l'ensemble de ces sommets. Chaque élément de C_0 est lui-même un S.G.F.C.M.

Considérons maintenant un sommet x_i tel que $d_i^i = 1$. Alors D_i représente ses ascendants véritables et D^i ses descendants véritables. L'ensemble C_k dont la représentation booléenne est $D_i \cap D^i$ est donc l'ensemble des sommets qui sont ascendants et descendants véritables de x_i. C'est donc un sous-graphe fortement connexe de $G(X, U)$. Il est maximum car si $x_j \notin C_k$ était un ascendant véritable de x_i il appartiendrait à D_i et s'il était aussi un descendant véritable, il appartiendrait à D^i donc à leur intersection C_k ce qui est contraire à l'hypothèse.

L'algorithme est alors:

1. Soit $V = \{ 1, 1, ..., 1 \}$ le vecteur unitaire de dimension n et

$$P = \{ d_1^1, d_2^2, ..., d_n^n \}$$

le vecteur booléen représentant la diagonale de D.

2. $C_0 = \overline{P \cap V}$. Soit n_0 le nombre d'éléments non-nuls de C_0.

Si $n_0 = n$ aller à 5 sinon $m = 1$.

3. Soit d_i^i le premier élément non nul de P.

$C_m = D_i \cap D^i$ et soit n_m le nombre de ses éléments non-nuls. $P = P \cap \overline{C_m}$.

4. Si $n_0 + \sum_{k=1}^{m} n_k = n$ aller à 5 sinon $m = m + 1$ et aller à 3.

5. Fin.

Algorithme 2. Détermination de Z minimale pour un graphe fortement connexe

Soit $G(X, U)$ un graphe fortement connexe. Sa matrice booléenne de précédence D est pleine puisque par définition tous les éléments de X sont ascendants et descendants véritables d'un quelconque des éléments de X. Nous sommes intéressés par le graphe $G'(X, U')$ de matrice de précédence D tel que le nombre d'éléments de U' soit minimum. Puisque le graphe est fortement connexe, ce nombre est nécessairement n (nombre de sommets du graphe). Si $X = \{ x_1, ..., x_n \}$, est l'ensemble des sommets de G (et de G') alors une définition possible de U' est :

$$U' = \{ (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_1) \}$$

c'est-à-dire que le graphe $G'(X, U')$ peut être considéré comme un circuit hamiltonien de $G(X, U)$. Notons qu'il existe $n!$ définitions équivalentes de U' correspondants aux permutations des indices des sommets et donc $n!$ possibles Z.

En résumé, si D est pleine, une matrice Z minimale peut être définie par:

$$\begin{cases} z_i^j = 1 \text{ si } i = j + 1 (j = 1, 2, ..., n - 1 \ ; \ i = 2, 3, ..., n) \\ z_1^n = 1 \\ z_i^j = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Algorithme 3. Détermination de Z minimale pour un graphe sans circuit

Soit $G(X, U)$ un graphe sans circuit. Sa matrice de précédence D est telle que $d_i^i = 0, \forall \ i$. Ici encore nous voulons trouver $G'(X, U')$ tel que le nombre d'éléments de U' soit minimum. Étant donné x_i, tous ses ascendants véritables sont représentés par D_i. Soit $x_j (j = 1, 2, ..., k)$ les éléments de D_i. Tout ascendant véritable de x_j est également un ascendant véritable de x_i, donc lui-même un élément de D_i. Pour former Z_i nous ne voulons garder que les éléments x_j tels qu'il existe un chemin et un seul allant de x_j à x_i, ce chemin devant être de longueur 1. Il suffit donc de supprimer de D_i tous les éléments x_k qui sont eux-mêmes ascendants véritables d'au moins un élément x_j de D_i, c'est-à-dire:

$$Z_i = D_i \cap \overline{\left(\bigcup_{\{k | x_k \in D_i\}} D_k \right)}$$

Nous pouvons maintenant passer à l'algorithme de génération de Z minimale, D étant donnée.

Génération d'une matrice de connexion minimale

Cet algorithme se décompose en quatre phases.

Phase 1. Détermination des S.G.F.C.M. à partir de D (cf. algorithme 1).

Phase 2. Compression de D en D^*.

Puisque tous les éléments d'un S.G.F.C.M. ont même ascendants et descendants, nous comprimons chaque S.G.F.C.M. en un seul sommet, par exemple le premier, et supprimons la boucle que ce sommet forme avec lui-même. De ce fait, la matrice comprimée D^* représente un graphe sans circuit. Pratiquement cette suppression revient à annuler certaines lignes et colonnes de la façon suivante :

1. Soit x_α, x_β ... les premiers sommets des S.G.F.C.M. dont les représentations sont C_1, C_2, etc.

Annuler dans D toutes lignes et colonnes dont les indices correspondent aux sommets définis par :

$$x_i \notin C_0 \quad ; \quad x_i \neq x_\alpha \quad , \quad x_i \neq x_\beta, \text{ etc.}$$

2. $d_i^{i*} = 0 \; \forall \; i$.

Phase 3. Génération de Z^* depuis D^*.

D^* étant la matrice de précédence d'un graphe sans circuit, Z^* est générée par la méthode décrite plus haut (cf. algorithme 3).

Phase 4. Extension de Z^* en Z.

Pour chaque élément x_α correspondant au S.G.F.C.M. dont la représentation est $C_m = \{x_\alpha, x_{j1}, ..., x_{jk}\}$ on forme Z comme décrit plus haut (cf. algorithme 2).

Exemple

A titre d'exemple, appliquons la méthode à la matrice qu'on trouvera à la page suivante :

Phase 1. — Détermination des S.G.F.C.M. Il vient :

$$C_0 = \{x_1, x_7, x_8, x_{11}\}$$
$$C_1 = \{x_2, x_3, x_4\}$$
$$C_2 = \{x_5, x_6\}$$
$$C_3 = \{x_9, x_{10}\}$$

D =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
10	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Phase 2. — Compression de *D* en *D**.

D* =

	1	α 2	3	4	β 5	6	7	8	γ 9	10	11
1	0	0			0		0	0	0		0
α 2	1	0			0		0	0	0		0
3											
4											
β 5	1	0			0		0	0	0		0
6											
7	1	1			1		0	0	0		0
8	1	1			1		1	0	0		0
γ 9	1	1			1		1	0	0		0
10											
11	1	1			1		1	1	1		0

Phase 3. — Génération de Z^*.

$Z^*=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0			0		0	0	0		0
2	1	0			0		0	0	0		0
3											
4											
5	1	0			0		0	0	0		0
6											
7	0	1			1		0	0	0		0
8	0	0			0		1	0	0		0
9	0	0			0		1	0	0		0
10											
11	0	0			0		0	1	1		0

ce qui correspond au graphe de la figure 2.

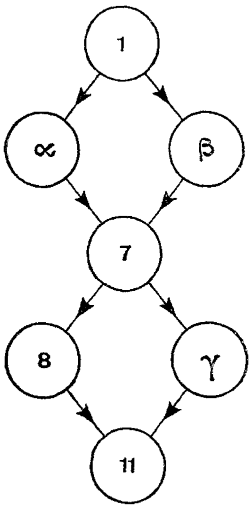


Figure 2
Graphe correspondant à Z^*.

Phase 4. — Extension de Z^* en Z.

$Z =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
7	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0

ce qui correspond au graphe de la figure 3.

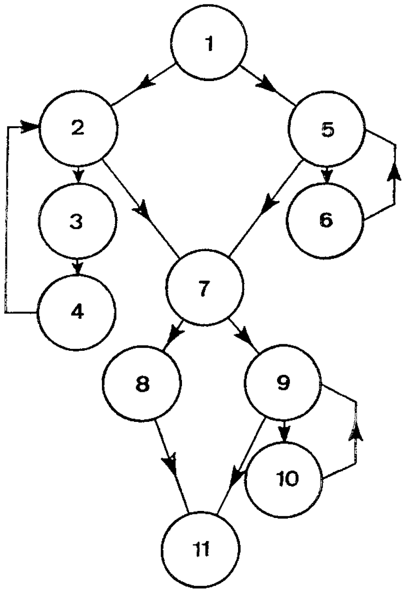


Figure 3
Graphe correspondant à Z.

CONCLUSION

Nous avons présenté un algorithme efficace pour la génération d'une matrice de connexion minimale pour une matrice de précédence donnée. Cet algorithme est particulièrement bien adapté pour sa réalisation sur calculateur électronique et peut être programmé facilement dans des langages tels qu'Algol 60 et PL/I qui permettent le traitement des vecteurs booléens.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *La théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958.
2. D. F. Martin, On algorithms for the generation of the limiting form of boolean precedence matrices. Comm. privée.
3. C. V. Ramamoorthy, « Analysis of graphs by connectivity considerations » *J.A.C.M.* 13, 211-223, avril 1966.
4. B. Roy, « Cheminement et connexité dans les graphes. Application aux problèmes d'ordonnancement », *Metra*, série spéciale # 1, 1962.
5. J. M. S. Simoes Pereira, « On the boolean matrix equation $M' = V_{i=1}^{d} M^i$ », *J.A.C.M.* 12, 376-382, juillet 1965.
6. S. Warshall, « A theorem on boolean matrices », *J.A.C.M.* 9, 11-12 janvier 1962.