REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

CHARLES CASTAING
MICHEL VALADIER

# Équations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge*, tome 3, n° R1 (1969), p. 3-16
<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_1_3_0>

R.I.R.O.
(3e année, N° 16, 1969, p. 3-16)

# ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES MULTIVOQUES DANS LES ESPACES VECTORIELS LOCALEMENT CONVEXES

par Charles CASTAING (1) et Michel VALADIER (2)

Résumé. — *Le but de cet article est d'étendre en dimension infinie le théorème (Plis Lasota-Opial, Castaing) d'existence, et de dépendance des conditions initiales, des solutions d'une équation différentielle multivoque, où le second membre est convexe compact, séparément mesurable par rapport au temps et semi-continu supérieurement par rapport à l'état. Divers résultats d'intégration vectorielle et de théorie des multi-applications ont leur intérêt propre.*

Le but final de ce papier est d'étendre en dimension infinie le théorème d'existence et de dépendance des conditions initiales de la solution d'une équation différentielle multivoque $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$, où le second membre est convexe compact séparément mesurable par rapport au temps et semi-continu supérieurement par rapport à l'état (Cf. [4] [14] [15]). En route nous montrerons des résultats qui peuvent avoir leur intérêt propre. Ce travail a fait l'objet d'une note aux Comptes Rendus [7 *bis*].

## 1. Intégration vectorielle

Soit $E$ un espace vectoriel topologique localement convexe réel séparé. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu$ positive $\sigma$ – finie.

**Théorème 1.** — *Si $f : \Omega \to E$ est scalairement intégrable, si $\Omega$ se partitionne en un négligeable et une suite de mesurables $\Omega_n$ tels que $f(\Omega_n)$ soit contenu dans un compact convexe équilibré $Q_n$, et si $E$ est séquentiellement faiblement complet, alors $\int f\mu$ appartient à $E$.*

(1) Faculté des Sciences, Montpellier, Hérault.
(2) I.R.I.A. Département d'Automatique et d'Informatique Économique, Rocquencourt, Yvelines.

*Démonstration.* — La mesure étant $\sigma$-finie on peut se ramener au cas où les $\Omega_n$ sont de mesure finie. On a $\int_{\Omega_n} f\mu \in E$ pour tout $n$. En effet, soit $x'$ un élément du polaire $Q_n^0$ de $Q_n$. On a

$$< x' \quad , \quad \int_{\Omega_n} f\mu > = \int_{\Omega_n} < x' \quad , \quad f > \mu \leqslant \mu(\Omega_n)$$

D'où $\int_{\Omega_n} f\mu \in \mu(\Omega_n)Q_n$. Pour tout $x' \in E'$ on a :

$$\left| < x' \quad , \quad \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n} > \right| \leqslant \left| < x', f > \right|$$

et

$$\lim_{m \to \infty} < x' \quad , \quad \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n} > = < x', f > \qquad \text{p.p.}$$

où $\chi_{\Omega_n}$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega_n$.

D'après le théorème de Lebesgue, on a :

$$\lim_{m \to \infty} \int < x' \quad , \quad \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n} > \mu = \int < x' \quad , \quad f > \mu$$

Cela entraîne que $\int f\mu$ appartient à $E$ puisqu'il est limite faible des $\int \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n}\mu$ qui appartiennent à $E$.

Voici quelques cas où ce théorème s'applique :

1) *$f$ prend ses valeurs dans la réunion d'une suite croissante $(A_n)$ de compacts convexes équilibrés, et il existe $(e'_n)$ dans $E'$ séparant les points de ces compacts, et $E$ est séquentiellement faiblement complet.*

En effet, considérons l'espace $G$ engendré par la suite $(A_n)$. Il existe un ensemble $\mathcal{F}$ dénombrable, dense dans $G'$ pour la topologie de Mackey. En effet soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des $e'_{n|G}$. La fermeture $\bar{\mathcal{F}}$ pour la topologie de Mackey contient l'espace vectoriel engendré par les $e'_{n|G}$. Comme cet espace est faiblement dense dans $G'$, il est également dense pour la topologie de Mackey. On a bien $\bar{\bar{\mathcal{F}}} = G'$ (voir également [6], théorème 5).

Par suite on a :

$$A_n = \{ x \in G \mid < x', x > \leqslant \sup_{a \in A_n} < x', a >, \forall x' \in \mathcal{F} \}$$

Il en résulte que $f^{-1}(A_n)$ est mesurable.

Les conditions ci-dessus sont réalisées si $E$ est le dual faible d'un espace localement convexe métrisable séparable tonnelé (Cf. [1] proposition 7, p. 109).

2) *Si E est un Frechet séparable séquentiellement faiblement complet.*

Il suffit d'établir le résultat pour $\mu$ abstraite bornée. On applique facilement le théorème 1 si $\mu$ est de Radon. Or on a le lemme suivant qui permet de passer de $\mu$ abstraite bornée à $\mu$ de Radon :

**Lemme :**

*Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ deux espaces de probabilité dont les algèbres métriques quotients* (1) *$\mathcal{A}(P)$ et $\mathcal{A}'(P')$ sont isomorphes. Soit $X$ un espace polonais et $f : \Omega \to X$ mesurable. Il existe $f' : \Omega' \to X$, mesurable, unique modulo l'égalité sur un négligeable, telle que pour tout borélien $B$ de $X$ les classes dans les algèbres quotients de $f^{-1}(B)$ et $f'^{-1}(B)$ se correspondent* (2).

*Démonstration.* — Soit $d$ une distance d'espace complet sur $X$ compatible avec sa topologie. Montrons d'abord l'unicité. Soit $f'$ et $f''$ deux applications mesurables vérifiant la propriété énoncée. Soit $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de $X$ en ensembles boréliens de diamètre $< \varepsilon$. Alors $f'^{-1}(B_n)$ et $f''^{-1}(B_n)$ sont équivalents à $f^{-1}(B_n)$ dans l'isomorphisme des algèbres quotients. Il en résulte que

$$P'(\mathrm{d}(f',f'') > \varepsilon) = 0 \qquad \text{quel que soit} \qquad \varepsilon > 0,$$

d'où $f' = f''$ p.p.. Montrons l'existence. L'existence est triviale pour les fonctions dénombrablement étagées. Soit $f : \Omega \to X$ une application mesurable. Soit $(f_n)$ une suite de fonctions dénombrablement étagées convergeant simplement vers $f$. Alors $(f_n)$ est une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité, et il en est de même pour les $f'_n$ correspondant aux $f_n$. Soit $f'$ la limite de $(f'_n)$ ([2], proposition 19, p. 197). Il existe une suite $(f'_{n_k})$ qui converge presque sûrement vers $f'$. L'ensemble des parties $B$ de $X$ telles que $f^{-1}(B)$ et $f'^{-1}(B)$ se correspondent dans l'isomorphisme est une $\sigma$-algèbre. De plus cet ensemble contient les fermés. En effet, soit $F$ un fermé et soit :

$$B_m = \left\{ x \in X \,\middle|\, \mathrm{d}(x, F) < \frac{1}{m} \right\}$$

En vertu de ([17], tome 1, p. 469-470) on a

$$f'^{-1}(F) = \bigcap_m \bigcup_k \bigcap_{p \geqslant k} f'^{-1}_{n_p}(B_m),$$

et on a la même formule avec $f$ et $f_{n_p}$.

---

(1) Voir ([10], lemme 1, p. 158).

(2) Si $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est donné on peut toujours trouver $\Omega'$ compact et $P'$ de Radon en prenant le spectre de $L^\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Il en résulte que si $X = E$ et si $f$ est scalairement intégrable (donc mesurable) $f'$ est scalairement intégrable et $\int fP = \int f'P'$ car on a :

$$\int < x' \ , \ f(\omega) > P(\mathrm{d}\omega) = \int < x' \ , \ f'(\omega') > P'(\mathrm{d}\omega') \quad , \quad \forall\, x' \in E'.$$

3) *Si $\Omega$ est localement compact, si $f$ est $\mu$-mesurable, si l'enveloppe convexe fermée de toute partie compacte de E est complète et si E est séquentiellement faiblement complet.*

Les hypothèses sur $E$ sont vérifiées si $E$ est un Fréchet réflexif ou un espace $L^1$.

Soit $\Gamma$ une multi-application définie sur $\Omega$ à valeurs dans les convexes compacts non vides de $E$. On désigne par $\mathcal{M}_\Gamma$ l'ensemble des sections scalairement mesurables de $\Gamma$. On pose pour toute partie $K$ de $E$ et tout $x' \in E'$, $\varphi(x', K) = \sup \{ < x', k > \mid k \in K \}$.

**Théorème 2.** — a) *Si les $\varphi(x', \Gamma(.))$ sont intégrables, on pose*

$$A = \left\{ \xi \in E'^* \mid < x', \xi > \leqslant \int \varphi(x', \Gamma(.))\mu, \forall\, x' \in E' \right\}.$$

*Alors $A$ est convexe non vide, $\sigma(E'^*, E')$ compact ; toute $f \in \mathcal{M}_\Gamma$ est scalairement intégrable et $\int f\mu \in A$.*

b) *S'il existe $(e_n')$ dans $E'$ séparant les points de $A \cap E$ et de $\Gamma(\omega)$, $\forall\, \omega$, et si $\int f\mu \in E, \forall\, f \in \mathcal{M}_\Gamma$, alors*

$$A \cap E = \left\{ \int f\mu \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\} \qquad et \qquad \max_{x \in A \cap E} < x', x > = \int \varphi(x', \Gamma(.))\mu.$$

c) *Si de plus E est semi-réflexif A est contenu dans E.*

Ce théorème améliore légèrement le théorème 1 de [18]. La démonstration est la même.

Lorsque $A$ est contenu dans $E$ on notera $A = \int \Gamma\mu$. Sous les hypothèses du *b*), si $\left\{ \int f\mu \mid f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$ est faiblement relativement compact, $A$ est contenu dans $E$. Si de plus pour un $Z \in \mathcal{A}$ il existe $f_0 \in \mathcal{M}_\Gamma$ telle que $\int_Z f_0\mu \in E$, l'ensemble $A_Z$ obtenu par restriction à $Z$ est contenu dans $E$ car

$$\left\{ \int_Z f\mu \right\} \subset A - \int_{\Omega - Z} f_0\mu \text{ (1)}.$$

## 2. Compacité de l'ensemble des sections

Lorsqu'il existe $(e'_n)$ séparant les points de $\Gamma(\omega)$, $\forall\, \omega$, l'égalité scalairement presque partout équivaut à l'égalité presque partout pour les éléments de $\mathcal{M}_\Gamma$. On désignera par $M_\Gamma$ le quotient de $\mathcal{M}_\Gamma$ par cette relation d'équivalence.

**Théorème 3.** — *Si les* $\varphi(x', \Gamma(.))$ *sont intégrables.*

1) *Si* $\forall\, Z \in \mathcal{A}$, $A_Z$ *est contenu dans* $E$ *et s'il existe* $(e'_n)$ *dans* $E'$ *séparant les points de* $\Gamma(\omega)$, $\forall \omega$, *et de* $A_Z$, $\forall Z$, *alors* $M_\Gamma$ *est compact pour la topologie de la convergence simple sur* $\mathcal{E}_{E'}$, *(fonctions étagées mesurables prenant un nombre fini de valeurs).*

2) *Si* $\Gamma(\omega) \subset g(\omega)K$, $\forall \omega$, *où* $g \in \mathfrak{L}^1_+$ *et* $K$ *est convexe équilibré faiblement complet, et s'il existe* $(e'_n)$ *séparant les points de* $K$, $M_\Gamma$ *est compact pour la topologie de la convergence simple sur* $L^\infty_{\mathbf{R}} \otimes E'$.

Remarques. — 1) On peut mettre ces topologies sur l'espace vectoriel des applications scalairement intégrables. L'image canonique de $\mathcal{M}_\Gamma$ dans l'espace vectoriel quotient séparé s'identifie à $M_\Gamma$.

En effet si $f$ et $g$ appartiennent à $\mathcal{M}_\Gamma$ on a :

$$f = g \quad \text{p.p.} \quad \Leftrightarrow \int_Z < x', f - g > \mu = 0, \forall\, Z \in \mathcal{A}, \forall\, x' \in E'$$

$$\Leftrightarrow \int < h, f - g > \mu = 0, \forall\, h \in \mathcal{E}_{E'} \text{ (resp. } \forall\, h \in L^\infty_{\mathbf{R}} \otimes E')$$

$$\Leftrightarrow f - g \in \overline{\{0\}}.$$

2) La topologie du 1) (resp. 2) est la moins fine rendant faiblement continues les

$$f \mapsto \int_Z f\mu \left( \text{resp.} f \mapsto \int hf\mu, h \in L^\infty_{\mathbf{R}} \right).$$

---

(1) Nous nous sommes aperçus que, pour nos besoins, on peut se passer du lemme de ce paragraphe. En effet, lorsque $E$ est souslinien (au sens de Schwartz) et semi-réflexif, l'image d'une mesure abstraite bornée est une mesure de Radon concentrée sur la réunion d'une suite de convexes faiblement compacts. Alors si $f$ est scalairement intégrable, $\int f\mu$ appartient à $E$, et l'ensemble $A$ du théorème 2 est contenu dans $E$.

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $M_\Gamma$. Soit $F_n$ l'espace vectoriel engendré par $(e'_0, ..., e'_n)$. A $f \in M_\Gamma$ on associe $f_n \in L^{1\prime}_{F_n}$ défini par la restriction de $< ., f(\omega) >$ à $F_n$. Les $f_n$ restent dans une partie latticiellement bornée de $L^{1\prime}_{F_n}$. Soit $\bar{f}_n$ la limite de $f_n$ pour $\sigma(L^{1\prime}_{F_n}, L^{\infty}_{F_n})$ ([5], lemme 7.1). On a $\bar{f}_{n+1}(\omega)|_{F_n} = \bar{f}_n(\omega)$ p.p. En effet, pour $i \leqslant n$ et $Z \in \mathcal{A}$ on a :

$$\int_Z < e'_i \ , \ \bar{f}_{n+1} > \mu = \lim \int_Z < e'_i \ , \ f_{n+1} > \mu$$

$$= \lim \int_Z < e'_i \ , \ f_n > \mu = \int_Z < e'_i \ , \ \bar{f}_n > \mu$$

Posons $\Gamma_{-1} = \Gamma$ et pour $n \geqslant 0$

$$\Gamma_n(\omega) = \{ x \in \Gamma_{n-1}(\omega) \mid < e'_n \ , \ x > = < e'_n \ , \ \bar{f}_n(\omega) > \quad \text{p.p.} \}$$

Alors $\bigcap \Gamma_n(\omega)$ est réduite à un point $\bar{f}(\omega)$, et $\bar{f}$ est scalairement mesurable d'après ([18], lemmes 1 et 2).

1) Soit $Z \in \mathcal{A}$. Soit $\xi = \lim\limits_{\mathcal{U}} \int_Z f\mu \in A_Z$.

On a :

$$< e'_n \ , \ \int_Z \bar{f}\mu > = \lim_{\mathcal{U}} < e'_n \ , \ \int_Z f\mu > \quad , \ \forall\, n.$$

D'où :

$$< e'_n, \int_Z \bar{f}\mu > = < e'_n, \xi > \quad , \ \forall\, n.$$

Donc :

$$\int_Z \bar{f}\mu = \xi \qquad \text{et par suite}$$

$$< x', \int_Z \bar{f}\mu > = \lim_{\mathcal{U}} < x', \int_Z f\mu > \quad , \quad \forall\, x' \in E'.$$

2) Soit $h \in L^{\infty}_{\mathbf{R}}$ et $f \in \mathcal{M}_\Gamma$. On a :

$$\int fh\mu \in N_\infty(h) N_1(g) K.$$

En effet soit $K^o \subset E'$ le polaire de $K$ et soit $x' \in K^o$. On a :

$$< x', \int fh\mu > = \int < x', f(\omega) > h(\omega)\mu(d\omega)$$

$$\leqslant N_\infty(h) \int g(\omega)\mu(d\omega) = N_\infty(h) N_1(g)$$

Par suite :

$$\int fh\mu \in N_\infty(h)N_1(g)K^{oo}$$

où $K^{oo}$ est le polaire de $K^o$ dans $E'^*$. Mais comme $K$ est convexe faiblement complet, $K^{oo}$ est identique à $K$ et on a bien :

$$\int fh\mu \in N_\infty(h)N_1(g)K.$$

Montrons maintenant que pour $h$ fixé dans $L^\infty_{\mathbf{R}}$ l'ensemble des $\int fh\mu (f \in \mathcal{M}_\Gamma)$ est borné, donc faiblement précompact, donc faiblement relativement compact puisqu'il est contenu dans la partie faiblement complète

$$N_\infty(h)N_1(g)K.$$

En effet on a :

$$< x', \int fh\mu > \leqslant N_\infty(h) \int \sup [\varphi(x', \Gamma(.)), \varphi(-x', \Gamma(.))]\mu$$

quel que soit $x' \in E'$.

Soit $\xi$ la limite faible suivant $\mathcal{U}$ de $\int fh\mu$.

On a :

$$< e'_n, \int \bar{f}h\mu > = \lim_{\mathcal{U}} < e'_n, \int fh\mu > \quad , \quad \forall\, n.$$

D'où la même conclusion que précédemment.

**Corollaire.** — *Sous les hypothèses du* 2), *si* $\mu = |\mu_1| + ... + |\mu_p|$ *où* $\mu_i$ *sont des mesures réelles, l'ensemble*

$$\left\{ \left( \int f\mu_1, ..., \int f\mu_p \right) \middle| f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$$

*est contenu dans* $E^p$ *et faiblement compact.*

Le théorème suivant améliore le théorème 8.7 de [7].

**Théorème 4.** — *Soit* $E$ *le dual faible* $F'_s$ *d'un espace localement convexe* $F$. *Soit* $K$ *une partie équicontinue, convexe équilibrée fermée métrisable non vide de* $E$. *On suppose* $\Gamma(\omega) \subset K$, $\forall \omega$, *et les* $\varphi(x', \Gamma(.))$ *mesurables* $\forall\, x' \in F$. *Alors* $M_\Gamma$ *est* $\sigma(L^\infty_{F'_s}, L^1_F)$ *compact.*

*Démonstration.* — On a $L^1_F = L^1_{\mathbf{R}} \hat{\otimes} F$. Montrons que $M_\Gamma$ est équicontinu dans $L_{F'_s}$. Il est équivalent de montrer que $M_\Gamma$ est un ensemble équicontinu de formes linéaires sur $L^1_{\mathbf{R}} \otimes F$. En effet, soit $h \in L^1_{\mathbf{R}}$ telle que $N_1(h) \leqslant 1$ et $x' \in K^0$ (voisinage de l'origine dans $F$). Pour tout $f \in M_\Gamma$ on a alors :

$$\left| < f, h \otimes x' > \right| = \left| \int < x', f > h\mu \right| \leqslant 1$$

Montrons que $M_\Gamma$ est fermé dans $L^\infty_{F'_s}$ faible. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur $M_\Gamma$ convergeant vers un élément $\bar{f}$ de $L^\infty_{F'_s}$. On a :

$$\int < \bar{f}, g > \mu = \lim_{\mathcal{F}} \int < f, g > \mu \quad , \quad \forall\, g \in L^1_F.$$

En particulier si $\mu(Z) < +\infty$ et si $g \in \mathcal{E}_F$ on a :

$$\int_Z < \bar{f}, g > \mu = \lim_{\mathcal{F}} \int_Z < f, g > \mu$$

Le théorème précédent montre que $\bar{f}(\omega) \in \Gamma(\omega)$ p.p. sur $Z$. Comme $Z$ est arbitraire cela prouve que $\bar{f}$ appartient à $M_\Gamma$.

Remarque. — On peut retrouver facilement le 2) du théorème 3 à partir du théorème 4 lorsque $E$ est le dual faible $F'_s$ d'un espace localement convexe $F$ et lorsque $K$ est une partie équicontinue convexe équilibrée fermée métrisable non vide de $E$. En effet, soit $(\Omega_n)$ une partition de $\Omega$ en ensembles intégrables tels que $g$ soit bornée sur chaque $\Omega_n$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $M_\Gamma$. D'après le théorème 4 la restriction de $\mathcal{U}$ à $\Omega_n$ converge pour la convergence simple sur $L^\infty_{\mathbf{R}}(\Omega_n) \otimes E'$. Soit $f_\infty$ la fonction définie sur $\Omega$ par recollement des limites sur chaque $\Omega_n$. On a pour $h \in L^\infty_{\mathbf{R}}(\Omega) \otimes E'$

$$\left| \int < f - f_\infty, h > \mu \right| \leqslant \sum_{n \leqslant n_0} \left| \int_{\Omega_n} < f - f_\infty, h > \mu \right| + \sum_{n > n_0} \left| \int_{\Omega_n} < f - f_\infty, h > \mu \right|$$

Le deuxième terme est $< \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n_0$ assez grand car $\langle f - f_\infty, h \rangle$ est latticiellement borné par un multiple de $g$, et le premier terme tend vers 0 suivant $\mathcal{U}$ pour $n_0$ fixé.

Par cette méthode, si $E$ est de dimension finie, on retrouve de façon élémentaire, à partir du théorème d'Alaoglu, le fait que les parties latticiellement bornées de $L^1_E$ sont faiblement relativement compactes.

### 3. Primitive d'une multi-application

Désignons par $\mathcal{C}_E([0, T])$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0, T]$ dans $E$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur $[0, T]$.

**Théorème 5.** — *Soit $\Omega = [0, T]$, $\mu$ la mesure de Lebesgue sur $\Omega$. Supposons que $\Gamma$ vérifie les hypothèses* 1) *du théorème* 3. *Soit $M$ un compact non vide de $E$. Posons :*

$$\mathfrak{X} = \left\{ X : [0, T] \to E \mid X(0) \in M, X(t) = X(0) + \int_0^t X'(s)\,\mathrm{d}s, X' \in M_\Gamma \right\}.$$

*On a une bijection $(X(0), X') \to X$ de $M \times M_\Gamma$ sur $\mathfrak{X}$. Si on munit $\mathfrak{X}$ de la borne supérieure des topologies de la convergence de $X$ dans $\mathcal{C}_{E_\sigma}([0, T])$ et de la convergence simple de $X'$ sur $\mathcal{E}_{E'}$, $\mathfrak{X}$ est compact (et métrisable si $M$ est métrisable).*

*Démonstration.* — Montrons d'abord que l'ensemble $\mathfrak{X}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_{E_\sigma}([0, T])$. D'après le théorème d'Ascoli il suffit de prouver que $\mathfrak{X}$ est équicontinu et que pour tout $t \in [0, T]$ l'ensemble des $X(t) (X \in \mathfrak{X})$ est relativement $\sigma(E, E')$ compact. Montrons l'équicontinuité. Soit $t \in [0, T[$. Pour $t' \in [t, T]$ on a :

$$X(t') - X(t) \in A_{[t,t']} \quad , \quad \forall\, X \in \mathfrak{X}$$

Pour tout voisinage faible $V$ de l'origine, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $t' \in [t, t + \varepsilon]$ entraîne $A_{[t,t']} \subset V$. En effet si $V$ est de la forme

$$\{ x \in E \mid < x'_i, x > \ \leqslant \delta, i = 1, \ldots, n \},$$

il suffit de prendre $\varepsilon$ tel que $\int_t^{t+\varepsilon} \varphi(x'_i, \Gamma(\theta))\,\mathrm{d}\theta \leqslant \delta$ (1). On a ainsi établi l'équicontinuité « à droite ».

Le même raisonnement vaut « à gauche ». Enfin pour tout $t \in [0, T]$ et tout $X \in \mathfrak{X}$, $X(t) \in M + A_{[0,\,t]}$ qui est $\sigma(E, E')$ compact.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathfrak{X}$ convergeant vers un élément $\bar{X} \in \mathcal{C}_{E_\sigma}([0, T])$. Pour tout $t \in [0, T]$ et tout $x' \in E'$ on a alors :

$$\begin{aligned} < x', \bar{X}(t) - \bar{X}(0) > &= \lim_{\mathcal{U}} < x', X(t) - X(0) > \\ &= \lim_{\mathcal{U}} < x', \int_0^t X'(s)\,\mathrm{d}s > \ (X' \in M_\Gamma) \end{aligned}$$

D'après le 1) du théorème 3 on a :

$$\lim_{\mathcal{U}} < x', \int_Z X'(s)\,\mathrm{d}s > \ = \ < x', \int_Z f(s)\,\mathrm{d}s > \qquad \text{avec} \qquad f \in M_\Gamma.$$

---

(1) De fait on a démontré en passant que la multi-application $t' \mapsto A_{[t,t']}$ est semi-continue supérieurement en $t$. Plus généralement si $A$ est une multi-application définie sur un espace topologique à valeurs dans les convexes compacts d'un espace faible $E$ et si les $\varphi(x', A(.))$ sont semi-continues supérieurement, $A$ est semi-continue supérieurement (et réciproquement).

Il en résulte (avec $Z = [0, t]$) que $\bar{X}(t) - \bar{X}(0) = \int_0^t f(s)\, ds$. D'où la compacité de $\mathfrak{X}$.

Si $M$ est métrisable, $M + A_{[0,t]}$ est métrisable, $\forall\, t \in [0, T]$ et la topologie de $\mathfrak{X}$ est identique à la topologie de la convergence simple sur une partie dense de $[0, T]$ (qui peut être choisie dénombrable), donc est métrisable.

Remarque. — La topologie de $\mathfrak{X}$ est induite par la topologie de $\mathcal{C}_{E_\sigma}([0, T])$.

*Voici une variante du théorème* 5.

**Théorème 5'.** — *Les notations étant les mêmes que celles du théorème* 5, *supposons que* $\Gamma$ *vérifie les hypothèses 2) du théorème* 3 *où le* $K$ *dans ce théorème est une partie convexe équilibrée compacte non vide de* $E$. *Si on munit* $\mathfrak{X}$ *de la borne supérieure des topologies de la convergence de* $X$ *dans* $\mathcal{C}_E([0, T])$ *et de la convergence simple de* $X'$ *sur* $L^\infty_{\mathbf{R}} \otimes E'$, $\mathfrak{X}$ *est compact (et métrisable si* $M$ *est métrisable).*

*Démonstration.* — Montrons d'abord que l'ensemble $\mathfrak{X}$ est relativement compact dans $\mathcal{C}_E([0, T])$. D'après le théorème d'Ascoli il suffit de prouver que $\mathfrak{X}$ est équicontinu et que pour tout $t \in [0, T]$ l'ensemble des $X(t) (X \in \mathfrak{X})$ est relativement compact dans $E$. L'équicontinuité « à droite » résulte du fait qu'étant donné un voisinage $V$ de l'origine on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\left(\int_t^{t+\varepsilon} g(s)\, ds\right) K \subset V$. On a également l'équicontinuité « à gauche ». Enfin pour tout $t \in [0, T]$, l'ensemble $A_{[0,t]}$ est compact dans $E$ car il est $\sigma(E, E')$ compact et convexe d'après le 2) du théorème 3 et contenu dans l'ensemble compact convexe $N_1(g)K$. Il en résulte que pour tout $t \in [0, T]$ l'ensemble $\{ X(t) \mid X \in \mathfrak{X} \}$ est compact car identique à l'ensemble compact $M + A_{[0,t]}$.

La démonstration se termine comme celle du théorème 5 [utiliser le 2 du théorème 3].

**Théorème 6.** — *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème* 5 *(ou théorème* 5'*) on a :*

$$\mathfrak{X} = \{ X : [0, T] \to E \mid X(0) \in M, X(t'') - X(t') \in A_{[t',t'']} \quad , \quad \forall t' \leqslant t'' \}.$$

Cet énoncé généralise la proposition 2 de Ghouila-Houri [13].

*Démonstration.* — Soit $\mathfrak{X}_1$ l'ensemble défini dans l'énoncé par le second membre. On a $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{X}_1$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{X}$ est dense dans $\mathfrak{X}_1$ pour la convergence simple sur $[0, T]$. Soit $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$. Soit $X \in \mathfrak{X}_1$ et $f \in \mathcal{M}_\Gamma$ telle que (l'existence de $f$ résulte du théorème 2) $\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s)\, ds = X(t_{i+1}) - X(t_i)$. Posons :

$$Y(t) = X(0) + \int_0^t f(s)\, ds.$$

On a $Y(t_i) = X(t_i), \forall\, i$ et $Y \in \mathcal{X}$.

Voici dans le même ordre d'idée un autre résultat avec $\Omega$ quelconque.

**Théorème 7.** — *Supposons que* $\Gamma$ *vérifie les hypothèses du* 1) *du théorème* 3. *Soit*

$$\mathcal{X} = \left\{ m : \mathcal{A} \to E \mid m(Z) = \int_Z f\mu,\ f \in \mathcal{M}_\Gamma \right\}$$

*et*

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ m : \mathcal{A} \to E \mid m(Z) \in \int_Z \Gamma\mu \quad , \quad m \text{ additive.} \right\}$$

*Alors* $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1$ (1).

*Démonstration*

1) Il y a une bijection entre $\mathcal{X}$ et $M_\Gamma$ car $f \mapsto m$ est surjective, et si $\int_Z f\mu = \int_Z g\mu$, $\forall\, Z$, on a $f = g$ scalairement p.p. donc p.p. Mettons sur $\mathcal{X}$ la topologie de la convergence simple (dans $E_\sigma$) de $m(Z)$ sur $\mathcal{A}$. Alors $\mathcal{X}$ est compact d'après le 1) du théorème 3.

2) Montrons que $\mathcal{X}$ est dense dans $\mathcal{X}_1$ (pour la même topologie).

Soit $m \in \mathcal{X}_1$ et $Z_1, \ldots, Z_n$ appartenant à $\mathcal{A}$. Soit $B_1, \ldots, B_p$ les atomes de l'algèbre engendrée par $(Z_1, \ldots, Z_n)$. Il existe (théorème 2) $f \in \mathcal{M}_\Gamma$ telle que $m(B_j) = \int_{B_j} f\mu$, $\forall\, j$, et par additivité on a $m(Z_i) = \int_{Z_i} f\mu$, $\forall\, i$.

## 4. Équations différentielles multivoques

**Théorème 8.** — *Soit $U$ un espace topologique. Soit $F$ une multi-application définie sur $\Omega \times U$ à valeurs dans les convexes compacts non vides de $E$, telle que $\forall\, \omega$, $F(\omega, .)$ soit SCS. Soit $X_n$ et $X$ appartenant à $U^\Omega$, et $Y_n$ et $Y$ des applications de $\Omega$ dans $E$ scalairement intégrables telles que $Y_n(\omega) \in F(\omega, X_n(\omega))$* p.p.

*On suppose*

a) *Il existe $(e'_n)$ dans $E'$ séparant les points de $E$.*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ p.p.

c)

$$\lim_{n\to\infty} \int_Z < x', Y_n(\omega) > \mu(d\omega) = \int_Z < x', Y(\omega) > \mu(d\omega),\ \forall\, x' \in E',\ \forall\, Z \in \mathcal{A}.$$

(1) Résultat à rapprocher du théorème 7 de [14 *bis*], dans sa partie $C'' \Rightarrow 1°$.

*Alors* $Y(\omega) \in F(\omega, X(\omega))$ p.p.

*Démonstration.* — La condition c) entraîne que la suite $\langle x', Y_n(.) \rangle$ est équi-intégrable dans $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et cette suite converge faiblement vers $\langle x', Y(.) \rangle$ (1). Par suite il existe une suite $(Z_m)(Z_m$ combinaison convexe de $\langle x', Y_m \rangle, \langle x', Y_{m+1} \rangle, \ldots)$ convergeant fortement vers $\langle x', Y \rangle$, et de la suite $Z_m$ on peut extraire une suite partielle convergeant presque partout vers $\langle x', Y(.) \rangle$. D'après la condition *b*) il existe un négligeable $N$ tel que $X_n(\omega) \to X(\omega)$ pour $\omega \notin N$. Désignons, pour tout ensemble $B$, $\gamma(B)$ son enveloppe convexe. Compte tenu du fait que $F(\omega, x)$ est convexe compact, il résulte de la *SCS* de $F(\omega,.)$ qu'il existe $N_{x'}$ négligeable contenant $N$, tel que

$$\begin{aligned} < x', Y(\omega) > &\in \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{m \geqslant k} \{ < x', Y_m(\omega) > \}\right)} \\ &\subset \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{m \geqslant k} x' \circ F(\omega, X_m(\omega))\right)} \\ &\subset x' \circ F(\omega, X(\omega)) \qquad \text{si} \qquad \omega \notin N_{x'}. \end{aligned}$$

En faisant parcourir à $x'$ un ensemble dénombrable dense dans $E'$ pour $\tau(E', E)$ on voit que $Y(\omega) \in F(\omega, X(\omega))$ p.p. ([6] théorème 5).

Ce théorème intervient dans l'étude de l'optimisation et généralise le théorème de fermeture de [9].

Soit $U$ un ouvert de $E$, $M$ un convexe compact métrisable contenu dans $U$, $[0, T_0]$ un intervalle $(T_0 > 0)$, $\Gamma$ une multi-application de $[0, T_0]$ à valeurs dans les convexes compacts non vides de $E$ telle que les $\varphi(x', \Gamma(.))$ soient intégrables. On suppose qu'il existe dans $E'$ une suite $(e'_n)$ séparant les points de $E$. Soit $F$ une multi-application définie sur $[0, T_0] \times U$ à valeurs dans les convexes compacts non vides de $E$ telle que :

$\forall\, t, \forall\, x, F(t, x) \subset \Gamma(t)$

$\forall\, x, \forall\, x', \varphi(x', F(., x))$ est mesurable

$\forall\, t, x \mapsto F(t, x)$ est semi-continue supérieurement.

On appelle *solution* de l'équation $\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$ sur $[0, T_0]$ une application $X : [0, T_0] \to U$, primitive d'une application $X'$, telle que l'on ait $X'(t) \in F(t, X(t))$ p.p.

Soit $T \in ]0, T_0]$ tel que $M + A_{[0,T]} \subset U$.

L'existence d'un tel $T$ est assurée soit :

1) si $\Gamma$ vérifie les hypothèses du théorème 5 et si $E$ est un espace faible;

2) si $\Gamma$ vérifie les hypothèses du théorème 5'.

---

(1) Cf. [14 *ter*], proposition IV-2-2, p. 109.

En effet, soit $V$ un voisinage de l'origine tel que $M + V \subset U$.

1) Il suffit de choisir $T$ tel que $A_{[0,T]} \subset V$ (cf. démonstration du théorème 5).

2) Il suffit de choisir $T$ tel que $\left(\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)K \subset V$ (cf. démonstration et notation du théorème 5'). On aura alors

$$M + A_{[0,T]} \subset M + \left(\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)K \subset M + V \subset U.$$

Nous supposerons l'une de ces hypothèses vérifiées.

**Théorème 9.** — *Quel que soit $\xi \in M$, l'ensemble $S_\xi$ des solutions $X$ sur $[0, T]$ vérifiant $X(0) = \xi$ est compact non vide dans $\mathcal{C}_E([0, T])$ et $\xi \mapsto S_\xi$ est semi-continue supérieurement.*

*Démonstration.* — Soit $\mathcal{X}$ l'espace défini dans le théorème 5 (ou 5') associé à $\Gamma$ et à $M$. C'est un convexe compact métrisable. Les solutions de l'équation appartiennent à cet ensemble. On va montrer que les solutions sont les points fixes d'une multi-application définie sur $\mathcal{X}$ à valeurs dans les convexes compacts non vides de $\mathcal{X}$ et semi-continue supérieurement.

Soit $G$ l'ensemble des $(\xi, X, Y) \in M \times \mathcal{X}^2$ tels que $X(0) = Y(0) = \xi$ et $Y'(t) \in F(t, X(t))$ p.p. On posera $\Phi(X) = \{ Y \mid (\xi, X, Y) \in G \}$. On voit que $\Phi(X)$ est convexe.

Montrons que $\Phi(X)$ est non vide. Soit $X \in \mathcal{X}$. Comme $X$ est continue sur $[0, T]$, $X$ est limite pour la convergence simple d'une suite de $f_n : [0, T] \to E$ étagées (ou même en escalier). On a :

$$\varnothing \neq \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geqslant k} F(t, f_n(t))\right)} \subset F(t, X(t))$$

Posons :

$$\Sigma(t) = \bigcap_k \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geqslant k} F(t, f_n(t))\right)}$$

On a :

$$\varphi\left(x', \overline{\gamma\left(\bigcup_{n \geqslant k} F(t, f_n(t))\right)}\right) = \sup_{n \geqslant k} \varphi(x', F(t, f_n(t)))$$

Par suite ([18], lemme 1) les fonctions $\varphi(x', \Sigma(.))$ sont mesurables. En vertu de ([18], lemme 4), $\Sigma$ admet une section scalairement mesurale $\sigma$. Comme $\Sigma(t) \subset \Gamma(t)$, $\forall\, t \in [0, T]$ cette section est scalairement intégrable. Posons

$$Y(t) = X(O) + \int_0^t \sigma(s)\,\mathrm{d}s,\ \forall\, t \in [O, T]$$

Alors $Y \in \Phi(X)$. Montrons que $G$ est fermé. Soit $(\xi_k, X_k, Y_k)$ une suite dans $G$ convergeant vers $(\xi, X, Y) \in M \times \mathcal{X}^2$. On a $X(0) = Y(0) = \xi$. D'après