REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CL. RAFFIN

Programmes linéaires d'appui d'un programme convexe, application aux conditions d'optimalité et à la dualité

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, n° R3 (1968), p. 27-60

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_3_27_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 13, 1968, p. 27-60)

PROGRAMMES LINEAIRES D'APPUI D'UN PROGRAMME CONVEXE, APPLICATION AUX CONDITIONS D'OPTIMALITE ET A LA DUALITE

par Cl. RAFFIN [1]

Résumé. — *Dans une analyse qui repose sur l'utilisation des sous-gradients d'une fonction convexe et sur l'introduction de « programmes linéaires d'appui » d'un programme convexe, cet article étudie les conditions d'optimalité et plus particulièrement la dualité en programmation convexe. Le problème est traité dans un espace vectoriel topologique réel, avec un nombre infini de contraintes, et sous une hypothèse de régularité qui, dans le cas fini, est moins restrictive que l'hypothèse classique de Slater. Les résultats obtenus sont appliqués à un exemple dans un espace de Hilbert.*

INTRODUCTION

La présente étude concerne les programmes convexes définis comme suit, dans un espace vectoriel topologique réel localement convexe et séparé E :

$$\sup_x \{ f(x) \mid g_i(x) \leqslant 0, i \in I \}$$

où $-f$ et g_i sont des fonctions numériques convexes et continues définies sur des ouverts Ω_0 et Ω_i de E, et où I est un ensemble quelconque d'indices [20 *c*]. Nous généralisons, en fait, des résultats que nous avions déjà obtenus pour des programmes convexes finis dans $\mathbf{R}^n$, différentiables dans [20 *a*], puis sans hypothèse de différentiabilité dans [20 *b*].

On commence par définir, pour un point réalisable, une condition de régularité qui est une extension de la condition de « qualification » de Kuhn et Tucker [14], l'utilisation des sous-gradients nous permettant en particulier de considérer des fonctions convexes non nécessairement différentiables. Dans le

(1) Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers. Ce travail est préparatoire à une thèse de doctorat d'État ès Sciences Mathématiques enregistrée au Centre National de la Recherche Scientifique sous le n° AO 2484.

cas où I est fini, on montre que la condition de régularité introduite ainsi est moins restrictive que la condition de Slater [2] généralement supposée dans l'étude des programmes convexes, i.e. : il existe un point réalisable x tel que, pour toute contrainte non linéaire g_i, on ait $g_i(x) < 0$. Plus précisément on montre que, dans le cas où I est fini, l'hypothèse de Slater entraîne que tout point réalisable est régulier.

On introduit, ensuite, la notion de programme linéaire d'appui (notation : p. l. a.) d'un programme convexe, obtenu en remplaçant chacune des fonctions f et g_i par une fonction affine d'appui. Un p.l.a. s'écrit ainsi :

$$\operatorname*{Sup}_{x} \{ f(x_0) + < x - x_0, \alpha > \mid g_i(x_i) + < x - x_i, \beta_i > \leqslant 0, i \in I \}$$

où $-\alpha$ et β_i sont respectivement des sous-gradients de $-f$ et g_i aux points x_0 et x_i.

Quand $x_i = x_0$ pour tout $i \in I$, le p.l.a. est dit homogène au point x_0 et noté p.l.a. (x_0).

Les conditions d'optimalité sont abordées en liaison avec la notion de programme linéaire d'appui en vue de l'étude de la dualité. Cependant, une étude directe s'appuyant sur le théorème de Hahn-Banach nous a conduit d'abord à une extension des conditions de Kuhn et Tucker [14], qui est aussi une extension des conditions de Psenicnyj [19]. Notons, de plus, que même dans le cas particulier où E est isomorphe à $\mathbf{R}^n$ et où I est un ensemble fini les conditions d'optimalité obtenues fournissent une légère extension des classiques conditions de Kuhn et Tucker et du théorème du col de Lagrangien; en effet ces résultats sont établis ici sous une hypothèse de régularité moins stricte que l'hypothèse habituellement faite, qui est celle de Slater.

Introduisant ensuite les programmes linéaires d'appui et leurs duals, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $\bar{x}$ réalisable, supposé régulier, soit optimal, est qu'il existe un p.l.a. $(\bar{x})$, (homogène), dont le dual admette une solution optimale et ait pour valeur $f(\bar{x})$. Cette forme de la condition d'optimalité sera utile pour l'étude de la dualité.

L'étude de la dualité, qui est en fait le principal but poursuivi dans cet article, repose en effet sur l'utilisation des programmes linéaires d'appui et de leurs duals. On s'appuie sur une étude préliminaire du programme dual d'un programme linéaire infini pour formuler, de manière naturelle, deux programmes duals d'un programme convexe infini. Le premier, qui est une extension du programme dual de Wolfe [24], est obtenu en considérant la famille des duals des p.l.a. homogènes. Le second, formulé à l'aide des fonctions conjuguées est obtenu en considérant la famille des duals de tous les p.l.a., homogènes ou non. Dans le cas où I est fini, un programme dual analogue à ce dernier a été envisagé par Rockafellar [21 *b*], sous des hypothèses et par une méthode différentes. Et, dans le cas plus particulier de programmes convexes finis dans $\mathbf{R}^n$ à contraintes linéaires et à fonction objectif différentiable, Dennis d'une part [7], Berge et Ghouila-Houri d'autre part [3], avaient déjà introduit ce dual.

Enfin, on examine à titre d'exemple un programme quadratique dans un espace de Hilbert qui a fait l'objet d'une thèse [4] dans laquelle un algorithme est proposé sans justification complète. La condition de régularité se trouvant vérifiée en tout point réalisable, ce programme apparaît comme un cas particulier de notre étude et l'application des théorèmes de dualité éclaire la méthode de calcul numérique proposée.

Ce mémoire sera complété ultérieurement par l'examen du cas où les contraintes sont définies par des fonctions convexes à valeur dans un espace vectoriel ordonné.

I. RESULTATS PRELIMINAIRES ; NOTATIONS

I.1.

Soit E et F deux espaces vectoriels réels, mis en dualité, au sens de Bourbaki (*E.V.T.*, chap. IV), par une forme bilinéaire $\langle \,.\,,\,.\, \rangle$ sur $E \times F$. On considère sur E (resp. sur F) les topologies $T(E, F)$, (resp. $T(F, E)$), localement convexes séparées compatibles avec la dualité entre E et F. On utilisera, en particulier, sur E la topologie de Mackey notée $\tau(E, F)$ et sur F la topologie faible notée $\sigma(F, E)$.

I.2. Cône polaire d'une intersection de demi-espaces fermés

Considérons une famille d'éléments $a_i \in F$, $i \in I$, I étant un ensemble quelconque d'indices et soit C le cône convexe, fermé pour les topologies $T(E, F)$, qui est l'intersection des demi-espaces fermés : $\langle x, a_i \rangle \leqslant 0$, $i \in I$.

$$C = \{ x \in E \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant 0, i \in I \}$$

Soit, d'autre part, Γ le cône convexe pointé engendré par la famille a_i, $i \in I$

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i \in J} \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geqslant 0, J \subset I, J \text{ fini} \right\}$$

En s'appuyant sur Bourbaki (*E.V.T.*, chap. IV, § 1), on voit que le cône polaire C^* de C est identique à $\bar{\Gamma}$ (adhérence pour une topologie $T(F, E)$).

I.3. Sous-gradients d'une fonction convexe

Étant donné une fonction numérique finie h, définie sur $\Omega \subset E$ et un point $x \in \Omega$, on désignera par $A(h, x)$ l'ensemble convexe des sous-gradients de h au point x, au sens de Rockafellar [21 *a*] et Moreau [17], soit :

$$A(h, x) = \{ a \in F \mid \forall y \in \Omega, h(y) \geqslant h(x) + \langle y - x, a \rangle \}$$

et on posera :

$$A^-(h, x) = -A(-h, x)$$

En nous référant à Moreau [17], nous utiliserons le résultat suivant :

Si h est convexe et, pour une topologie $T(E, F)$, continue sur un ouvert convexe Ω, alors, pour tout $x \in \Omega$, $A(h, x)$ est non vide et faiblement compact.

I.4. Fonction conjuguée d'une fonction sous-différentiable

Étant donné une fonction numérique finie h définie sur $\Omega \subset E$, sous-différentiable sur Ω (c'est-à-dire qu'en tout point $x \in \Omega$, $A(h, x)$ est non vide), posons :

$$(1) \qquad \gamma(a) = \langle x, a \rangle - h(x) \qquad \text{où} \qquad a \in A(h, x)$$

Si $a \in A(h, x) \cap A(h, x')$, on déduit de la définition des sous-gradients que :

$$\langle x, a \rangle - h(x) = \langle x', a \rangle - h(x')$$

Par suite, la relation (1) définit une fonction γ dans F dont l'ensemble de définition est $A(h) = \bigcup_{x \in \Omega} A(h, x)$.

On voit, de plus, que si $a \in A(h, x)$ et $b \in A(h, y)$:

$$\gamma(b) \geqslant \gamma(a) + \langle x, b - a \rangle,$$

ce qui montre que la fonction γ est sous-différentiable sur $A(h)$ et que :

$$a \in A(h, x) \rightarrow x \in A(\gamma, a)$$

La fonction γ sera dite conjuguée de h. On remarque que γ est identique à la restriction sur $A(h)$ de la fonction polaire h^* de h, au sens de Moreau [17], soit :

$$h^*(a) = \sup_{x \in \Omega} [\langle x, a \rangle - h(x)]$$

Si l'on pose maintenant : $h' = -h$, la fonction γ' définie sur l'ensemble $A^-(h') = -A(h)$ par :

$$\gamma'(a) = -\gamma(-a)$$

sera dite conjuguée de h'.

I.5. Programme convexe

La présente étude concerne le programme convexe $\mathcal{S}$:

$$\text{Sup} \{ f(x) \mid g_i(x) \leqslant 0, i \in I \}$$

où f (resp. g_1), est une fonction numérique finie concave (resp. convexe), définie sur un convexe $\Omega_0 \subset E$ (resp. $\Omega_i \subset E$), ouvert pour $\tau(E, F)$ et continue pour cette topologie, et où I est un ensemble quelconque d'indices.

On note D l'ensemble des « solutions réalisables » de $\mathcal{T}$, défini par les contraintes, soit :

$$D = \left\{ x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i \mid g_i(x) \leqslant 0, i \in I \right\}$$

Un point $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ est dit solution « optimale » de $\mathcal{T}$, si pour tout $x \in D \cap \Omega_0$, on a $f(x) \leqslant f(\bar{x})$.

Étant donné un point $x \in D$, on note $I(x)$ l'ensemble des indices des contraintes « actives » au point x, soit

$$I(x) = \{ i \in I \mid g_i(x) = 0 \}$$

Et on considère les cônes convexes suivants :

$\Delta(x)$ engendré par $D - x$

$\Gamma_i(x)$, cône convexe pointé engendré par $A(g_i, x)$

$$\Gamma(x) = \sum_{i \in I(x)} \Gamma_i(x)$$

$$C_i(x) = \{ y \in E \mid \langle y, \beta_i \rangle \leqslant 0, \beta_i \in A(g_i, x) \}$$

$$C(x) = \bigcap_{i \in I(x)} C_i(x)$$

Il est clair que l'on a $\Delta(x) \subset C(x)$ et que, en raison de I.2, $C(x)^* = \overline{\Gamma(x)}$.

Par ailleurs, on notera $J(x)$ le sous-ensemble des indices $i \in I(x)$ tels qu'il n'existe pas de voisinage de x, pour $\tau(E, F)$, où la restriction de g_i soit affine et J le sous-ensemble des indices $i \in I$ tels que g_i ne soit pas une fonction affine.

On désignera par U le sous-espace vectoriel des éléments de $\mathbf{R}^I$ ayant toutes leurs composantes nulles sauf un nombre fini et par U^+ le cône convexe de U où ces composantes sont positives ou nulles.

Enfin, on pose $\bar{I} = I \cup \{ 0 \}$ et, pour tout $x \in \bigcap_{i \in \bar{I}} \Omega_i$ et $u \in U$,

$$L(x, u) = f(x) - \sum_{i \in I} u_i g_i(x)$$

II. HYPOTHESE DE REGULARITE

II.1. Définition

Un point $x \in D$ est dit régulier si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) $\Gamma(x)$ *est fermé pour les topologies $T(F, E)$,*

b) $C(x) = \overline{\Delta(x)}$ [*adhérence pour une topologie $T(E, F)$*].

Dans le cas particulier où $E = \mathbf{R}^n$, où I est fini, et où de plus, les fonctions g_i sont supposées différentiables au point x, $A(g_i, x)$ se réduit au gradient de g_i au point x et $\Gamma(x)$ est un cône polyédral fermé. La condition *a)* est donc toujours satisfaite. Montrons que, dans ce cas, la condition *b)* exprime la condition de « qualification » de Kuhn et Tucker [14]. Pour cela, on remarque d'abord que $\overline{\Delta(x)}$ est identique au « cône tangent » à D au point x. Rappelons la définition du cône tangent à un ensemble de $\mathbf{R}^n$ en un point de $\mathbf{R}^n$ [1].

Cône tangent. Étant donné un ensemble non vide $S \subset \mathbf{R}^n$ et un point $x \in \mathbf{R}^n$, on appelle vecteur tangent à S au point x, tout élément $y \in \mathbf{R}^n$ tel qu'il existe une suite $y_n \in S$ convergeant vers x et une suite de nombres non négatifs λ_n telles que la suite $\lambda_n(y_n - x)$ converge vers y. Les vecteurs tangents à S au point x forment un cône fermé (voir [1]) appelé cône tangent à S au point x.

Il est clair qu'ici le cône tangent à D au point x contient le cône $\Delta(x)$ engendré par $D - x$; en effet à tout élément $\lambda(z - x) \in \Delta(x)$ où $z \in D$, on peut associer les suites $y_n = z$ et $\lambda_n = \lambda$. Le cône tangent étant fermé, on en déduit qu'il contient aussi $\overline{\Delta(x)}$.

D'autre part, soit $y \notin \overline{\Delta(x)}$, il existe alors un voisinage de y ne rencontrant pas $\Delta(x)$ et il est impossible qu'une suite $\lambda_n(y_n - x)$, où $y_n \in D$, converge vers y. On déduit de là que le cône tangent à D au point x est inclus dans $\overline{\Delta(x)}$. On a ainsi démontré l'identité de ces deux cônes.

On voit que la condition *b)* coïncide ici avec la condition de « qualification séquentielle » de Abadie [1], qui exprime en effet l'identité du cône $C(x)$ avec le cône tangent à D au point x. Cette condition de « qualification séquentielle » est, pour un programme différentiable, une forme affaiblie de la condition de Kuhn et Tucker. Mais on notera que dans le cas d'un programme convexe différentiable, ces deux conditions deviennent équivalentes. Il suffit, pour le voir, de remarquer que D étant convexe la courbe formée par la réunion des segments $[y_{n-1}, y_n]$ est contenue dans D dès que la suite y_n est contenue dans D. Par suite, si y est un élément du cône tangent, il existe un arc $\xi(t) \in D$, $t \in [0, 1]$ défini par les points $\xi\left(\frac{1}{n}\right) = y_n$ et linéaire par morceaux entre ces points, qui est différentiable pour $\xi(0) = x$ avec $\xi'(0) = y$.

II.2. Une condition nécessaire et suffisante de régularité

Théorème. *Pour qu'un point $x \in D$ soit régulier, il faut et il suffit que* $\Gamma(x)$ *soit identique au cône polaire de* $\Delta(x)$.

Démonstration

1) Condition nécessaire. Soit $x \in D$, régulier.

$\Gamma(x)$ est le cône convexe pointé engendré par $\bigcup_{i \in I(x)} A(gi, x)$. Par suite, en raison de I.2, $\Gamma(x)$ étant fermé, on a : $\Gamma(x) = C(x)^*$. Comme, de plus, $C(x) = \overline{\Delta(x)}$, il vient : $\Gamma(x) = \Delta(x)^*$.

2) Condition suffisante. On suppose que $\Gamma(x) = \Delta(x)^*$. $\Gamma(x)$ étant fermé (cône polaire) on a, en raison de I.2 : $\Gamma(x) = C(x)^*$. Le cône $C(x)$ étant fermé, on a donc : $C(x) = \overline{\Delta(x)}$. Les conditions *a*) et *b*) sont bien vérifiées.

II.3. Une condition suffisante de régularité dans le cas où I est fini

II.3.1. Lemme

Soit, dans E, deux cônes convexes C_1 et C_2. Pour que :

$$(C_1 \cap C_2)^* = C_1^* + C_2^*$$

il suffit que l'intérieur pour $\tau(E, F)$ de C_1 rencontre C_2.

Démonstration (1). On montre d'abord que l'hypothèse faite entraîne :

$$\overline{C_1} \cap \overline{C_2} = \overline{C_1 \cap C_2}$$

L'inclusion $\overline{C_1 \cap C_2} \subset \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ étant toujours vraie, il suffit de montrer l'inclusion inverse.

— Soit $x \in \overline{C_1} \cap \overline{C_2}$ et $y \in \overset{\circ}{C}_1 \cap C_2$. D'après Bourbaki (*E.V.T.*, chap. II, § 1); tout le segment semi-ouvert $]x\, y]$ est inclus dans $\overset{\circ}{C}_1$. On en déduit que tout point de $]x\, y]$ appartient à $C_1 \cap C_2$ et, par suite, que $x \in \overline{C_1 \cap C_2}$.

(1) On peut également déduire ce lemme d'un résultat établi par Rockafellar [21. b] (théorème 3) en considérant les fonctions indicatrices de C_1 et C_2 et leurs fonctions polaires.

D'après Bourbaki (*E.V.T.*, chap. IV, § 1) on peut ensuite écrire :

$$(\overline{C_1} \cap \overline{C_2})^* = \overline{C_1^* + C_2^*}$$

Il reste à montrer que $C_1^* + C_2^*$ est fermé. Tenant compte de l'hypothèse faite, ce résultat découle du théorème de Ky Fan suivant [10] :

« Soit B et B' deux ensembles fermés (faiblement) dans F. Si l'intérieur pour une topologie $T(E, F)$ de B^* rencontre B'^*, alors $B + B'$ est fermé (faiblement) dans F. »

II.3.2. Théorème

Dans le cas où I est fini, une condition suffisante pour qu'un point $x \in D$ soit régulier est qu'il existe $y \in D$ tel que $\forall\, i \in J(x)$, $g_i(y) < 0$.

Démonstration. On pose $D_i = \{ x \in \Omega_i \mid g_i(x) \leqslant 0 \}$ et soit $\Delta_i(x)$ le cône convexe engendré par $D_i - x$ on a évidemment : $D = \bigcap_{i \in I} D_i$, et parce que I est fini : $\Delta(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \Delta_i(x)$.

On montrera d'abord que $\forall i \in J(x)$, $\Gamma_i(x) = \Delta_i(x)^*$.

Pour $i \in J(x)$, il existe $y \in D$ tel que $g_i(y) < 0$.

Donc $O_F \notin A(g_i, x)$. D'autre part, $A(g_i, x)$ est faiblement compact (I.3). Le cône $\Gamma_i(x)$ engendré dans F par un convexe compact ne contenant pas O_F est fermé (voir Bourbaki, *E.V.T.*, exercice 16, chap. II, § 4).

Par suite, en raison de I.2, on a $\Gamma_i(x) = C_i(x)^*$. Il reste à montrer que $C_i(x) = \overline{\Delta_i(x)}$. Il est clair que $\overline{\Delta_i(x)} \subset C_i(x)$. Montrons l'inclusion contraire. En raison de l'hypothèse faite, il existe y tel que $g_i(y) < 0$; par suite, l'intérieur de D_i est non vide (g_i est supposée continue). Il s'ensuit que $\overline{\Delta_i(x)}$, cône convexe dont l'intérieur est non vide, est identique à l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent et qui sont déterminés par les hyperplans d'appui de $\Delta_i(x)$ (voir Bourbaki, *E.V.T.*, chap. II, § 3). Or les hyperplans d'appui de $\Delta_i(x)$ sont les hyperplans contenant O_E qui sont parallèles aux hyperplans d'appui de D_i au point x. En fait, il s'agit donc de montrer que tout hyperplan d'appui de D_i au point x a une équation de la forme :

$$(1) \qquad \langle y - x, \beta_i \rangle = 0 \qquad \text{où} \qquad \beta_i \in A(g_i, x)$$

Soit G_i l'épigraphe de g_i,

$$G_i = \{ (x, z) \in \Omega_i \times \mathbf{R} \mid z \geqslant g_i(x) \}$$

La fonction g_i étant continue, l'intérieur de G_i est non vide. Soit H un hyperplan d'appui de D_i au point x, dans $E \times \{ z = 0 \}$, on a : $H \cap \mathring{G}_i = \varnothing$. D'après le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique (Bourbaki

E.V.T., chap. II, § 3), il existe un hyperplan fermé dans $E \times \mathbf{R}$ [pour les topologies $T(E \times \mathbf{R}, F \times \mathbf{R})$], contenant H et ne rencontrant pas $\mathring{G}_i$. Un tel hyperplan ne peut être « vertical » puisque Ω_i est ouvert et a donc une équation, en (y, z) de la forme :

$$z = \langle y - x, \beta_i \rangle \qquad \text{où} \qquad \beta_i \in A(g_i, x)$$

Comme $O_F \notin A\,(g_i, x)$, H a donc une équation de la forme (1).

Considérons maintenant la partition suivante de $I(x)$:

$$I(x) = J(x) \cup L(x) \qquad \text{avec} \qquad J(x) \cap L(x) = \varnothing$$

et posons :

$$\Delta_J(x) = \bigcap_{i \in J(x)} \Delta_i(x) \qquad \Delta_L(x) = \bigcap_{i \in L(x)} \Delta_i(x)$$

$$\Gamma_J(x) = \sum_{i \in J(x)} \Gamma_i(x) \qquad \Gamma_L(x) = \sum_{i \in L(x)} \Gamma_i(x)$$

$\Delta_J(x)$ ayant un intérieur non vide, par hypothèse, on déduit de ce qui précède, en appliquant le lemme II.3.1.

$$\Delta_J(x)^* = \sum_{i \in J(x)} \Delta_i(x)^* = \sum_{i \in J(x)} \Gamma_i(x) = \Gamma_J(x)$$

D'autre part, il est clair que : $\Delta_L(x)^* = \Gamma_L(x)$.

Par suite, en appliquant le lemme II.3.2, puisque l'intérieur de $\Delta_J(x)$ rencontre $\Delta_L(x)$:

$$\Delta(x)^* = \Delta_J(x)^* + \Delta_L(x)^* = \Gamma_J(x) + \Gamma_L(x) = \Gamma(x)$$

II.3.3. Corollaire

Dans le cas où I est fini, une condition suffisante pour que tout point de D soit régulier est qu'il existe $y \in D$ tel que pour tout $i \in J$, on ait $g_i(x) < 0$ (condition de Slater).

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème puisque $\forall x \in D$, $J(x) \subset J$.

La condition de régularité introduite ici est donc moins restrictive que la condition de Slater, dans le cas où I est fini. Lorsque $E = \mathbf{R}^n$, en particulier, toutes les études concernant les programmes convexes supposent vérifiée cette condition de Slater. On obtiendra donc des résultats plus fins en supposant seulement vérifiée notre hypothèse de régularité.

Remarquons par ailleurs que l'hypothèse de Slater peut s'écrire sous des formes équivalentes de plusieurs manières. Sans approfondir cette question qui est ici secondaire, on fera la remarque suivante :

II.3.4. Remarque

Dans le cas où I est fini, la condition: il existe $y \in D$ tel que pour tout $i \in J(x)$ on ait $g_i(y) < 0$ est équivalente à la condition : pour tout $i \in J(x)$, il existe $y_i \in D$ tel que $g_i(y_i) < 0$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la seconde condition implique la première. Soit donc $y_i \in D$, $i \in J(x)$, avec $g_i(y_i) < 0$. Partons de y_1 et soit g_2 une fonction g_i telle que $g_2(y_1) = 0$. Pour tout point y'_2 du segment ouvert $]y_1 y_2[$ on a : $g_1(y'_2) < 0$ et $g_2(y'_2) < 0$ puisque les fonctions g_i sont continues. Partons d'un tel point y'_2 et soit g_3 une fonction g_i telle que $g_3(y'_2) = 0$. Pour tout point y'_3 du segment ouvert $]y'_2 y'_3[$ on a $g_1(y'_3) < 0$, $g_2(y'_3) < 0$, $g_3(y'_3) < 0$. En itérant ce procédé on obtiendra en un nombre fini d'opérations un point $y \in D$ tel que pour tout $i \in J(x)$ on ait $g_i(y) < 0$.

Conséquence. Dans le cas où I est fini, la condition de Slater peut s'écrire de manière équivalente : pour tout $i \in J$, il existe $y_i \in D$ tel que $g_i(y_i) < 0$.

III. PROGRAMMES LINEAIRES D'APPUI ET CONDITIONS D'OPTIMALITE

III.1. Définition

On appelle programme linéaire d'appui de $\mathfrak{T}$ aux points $x_i \in \Omega_i$, $i \in \bar{I}$ tout programme :

$$\operatorname*{Sup}_x \{ f(x_0) + \langle x - x_0, \alpha \rangle \mid g_i(x_i) + \langle x - x_i, \beta_i \rangle \leqslant 0, i \in I \}$$

où $\alpha \in A^-(f, x_0)$ et $\beta_i \in A(g_i, x_i)$.

Pour abréger l'écriture, un tel programme sera noté p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$. Lorsque les points de linéarisation x_i sont confondus en un point unique $x \in \bigcap_{i \in \bar{I}} \Omega_i$, le programme linéaire d'appui sera dit homogène au point x et noté p.l.a. (x).

L'ensemble des solutions réalisables d'un p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ sera noté $P(x_i, i \in I)$. L'inégalité $g_i(x) \leqslant 0$ entraîne $g_i(x_i) + < x - x_i, \beta_i > \leqslant 0$ dès que $\beta_i \in A(g_i, x_i)$.

Par suite : $D \subset P(x_i, i \in I)$.

D'autre part la fonction objectif d'un p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$: $f(x_0) + \langle x - x_0, \alpha \rangle$ où $\alpha \in A^-(f, x_0)$, est une fonction affine majorant f. On déduit de là que si D est non vide, la valeur de tout p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ est une majoration de la valeur de $\mathfrak{T}$. Cette propriété presque immédiate des p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ sera la base de notre étude de la dualité. Mais il nous faut d'abord étudier les conditions d'optimalité.

III.2. Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Théorème. *Pour qu'un point* $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ *soit une solution optimale de* $\mathfrak{T}$, *il faut et il suffit que :* $A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta^*(\bar{x}) \neq \varnothing$.

Démonstration

a) Condition nécessaire. Soit $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$, optimal pour $\mathfrak{T}$ et soit :

$$\Phi = \{ x \in \Omega_0 \mid f(x) > f(\bar{x}) \}$$

La fonction f étant concave et continue, Φ est un convexe ouvert. Si cet ensemble est $\varnothing$, alors $O_F \in A^-(f, \bar{x})$ donc $A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta^*(\bar{x})$ contenant O_F n'est pas vide. Si cet ensemble est non vide, comme d'autre part :

$$D \cap \Phi = \varnothing,$$

il existe un hyperplan fermé séparant D et Φ. Un tel hyperplan contient nécessairement $\bar{x}$, parce que dans tout voisinage de $\bar{x}$, il existe des points x tels que $(x) > f(\bar{x})$. Par suite, l'équation d'un tel hyperplan, soit H, est de la forme

$$\langle x - \bar{x}, a \rangle = 0 \qquad \text{où} \qquad a \in F$$

Considérons maintenant, dans $E \times \mathbf{R}$, l'épigraphe K de f

$$K = \{ (x, z) \in \Omega_0 \times \mathbf{R} \mid z \leqslant f(x) \}$$

La fonction f étant continue, $\mathring{K}$ est non vide [pour $\tau(E \times \mathbf{R}, F \times \mathbf{R})$]. Soit L la variété linéaire déduite de H :

$$L \begin{cases} \langle x - \bar{x}, a \rangle = 0 \\ z - f(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

On a : $L \cap \mathring{K} = \varnothing$; en effet $H \cap \Phi$ étant vide, puisque Φ est ouvert, il vient :

$$\forall (x, z) \in L : f(x) \leqslant z$$

et l'on sait que $\mathring{K}$ étant non vide est identique à l'ensemble des points $(x, z) \in E \times \mathbf{R}$ tels que : $f(x) > z$.

Par suite et en raison du théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique (Bourbaki, *E.V.T.*, chap. II, § 3) il existe un hyperplan fermé dans $E \times \mathbf{R}$ contenant L et ne rencontrant pas $\mathring{K}$, c'est-à-dire un hyperplan d'appui de K au point $[\bar{x}, f(\bar{x})]$. Un tel hyperplan ne peut être « vertical » c'est-à-dire être l'hyperplan d'équation:

$$\langle x - \bar{x}, a \rangle = 0,$$

parce que Ω_0 est ouvert. Par suite, l'équation d'un tel hyperplan est de la forme :

$$z - f(\bar{x}) = \langle x - \bar{x}, ka \rangle$$

On en déduit que : $ka \in A^-(f, \bar{x})$.

D'autre part, $\forall x \in \Phi$, on a : $f(x) > f(\bar{x})$.

D'où :

$$\langle x - \bar{x}, ka \rangle > 0$$

Par suite : $\forall x \in D, \langle x - \bar{x}, ka \rangle \leqslant 0$.

On a ainsi montré qu'il existe $\bar{\alpha} = ka \in A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta^*(\bar{x})$.

b) Condition suffisante. Soit un point $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ et soit

$$\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}) \cap \Delta^*(\bar{x}).$$

Pour tout $x \in D$: $\langle x - \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle \leqslant 0$,

donc : $f(x) \leqslant f(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle \leqslant f(\bar{x})$,

Donc $\bar{x}$ est optimal pour $\mathfrak{P}$.

On notera que ce théorème ne fait pas intervenir la représentation analytique de D et utilise seulement le fait que D est convexe. Ce théorème est établi par Pšeničnyj dans [19], pour un espace normé.

Signalons également que ce théorème peut être regardé comme une conséquence d'un résultat établi par Rockafellar [21. b] (théorème 2).

III.3. Conditions nécessaires d'optimalité pour un point régulier

Du théorème précédent, on déduit, en considérant maintenant la formulation analytique du programme $\mathfrak{P}$, le corollaire suivant :

Corollaire. *Les conditions suivantes sont nécessaires pour qu'un point* $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$, *supposé régulier, soit une solution optimale de* $\mathfrak{P}$:

(1) $$A^-(f, \bar{x}) \cap \Gamma(\bar{x}) \neq \varnothing$$

(2) *Il existe* $\bar{u} \in U^+$ *tel que* : $\forall x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$ et $\forall u \in U^+$,

$$L(x, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, u)$$

(3) *Il existe un p.l.a.* $(\bar{x})$ *admettant* $\bar{x}$ *pour solution optimale.*

Démonstration

— Condition (1). Si $\bar{x}$ est régulier, en raison du théorème II.2. on a :

$$\Gamma(x) = \Delta^*(x)$$

La condition (1) est donc une conséquence immédiate du théorème précédent III.2.

— Condition (2). La condition (2) est une conséquence de la condition (1). En effet :

$$A^-(f, \bar{x}) \cap \Gamma(\bar{x}) \neq \emptyset \Rightarrow \text{il existe } \bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}),$$

il existe $\bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$, $i \in I$ et il existe $\bar{u} \in U^+$ tels que :

$$\bar{\alpha} = \sum_{i \in I} \bar{u}_i \bar{\beta}_i \qquad \text{et} \qquad \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$$

Le vecteur $\bar{u}$ ainsi considéré est tel que : $\forall x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$, $\forall u \in U^+$,

$$L(x, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, u)$$

En effet, comme $u_i \geqslant 0$ et $g_i(\bar{x}) \leqslant 0$, on a :

$$\sum_{i \in I} u_i g_i(\bar{x}) \leqslant 0$$

et donc :

$$L(\bar{x}, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, u)$$

D'autre part, on a : $L(x, \bar{u}) \leqslant L(\bar{x}, \bar{u})$, soit :

$$f(x) - \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(x) \leqslant f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x})$$

Cela est une conséquence du fait que la fonction $L(x, \bar{u})$ est concave en x et que :

$$\bar{\alpha} - \sum_{i \in I} \bar{u}_i \bar{\beta}_i = O_F \in A^-(L(x, \bar{u}), \bar{x})$$

— Condition (3). En raison de (1), il existe $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, il existe $\bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$, $i \in I$ et il existe $\bar{u} \in U^+$ tels que :

$$\bar{\alpha} = \sum_{i \in I} \bar{u}_i \bar{\beta}_i$$

Par suite tout p.l.a. $(\bar{x})$ défini par les éléments $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}_i$ ci-dessus admet $\bar{x}$ pour solution optimale.

III.4. Conditions suffisantes d'optimalité

Théorème. *Chacune des conditions* (1) *et* (2) *est suffisante pour qu'un point* $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ *soit une solution optimale de* $\mathcal{T}$. *La condition* (3) *est suffisante pour qu'un point* $\bar{x} \in \bigcap_{i \in \bar{I}} \Omega_i$ *soit une solution optimale de* $\mathcal{T}$.

Démonstration

Condition (1). On a vu que $C(\bar{x}) \supset \Delta(\bar{x})$. Par suite

$$C^*(\bar{x}) \subset \Delta^*(\bar{x})$$

D'autre part :

$$\Gamma(\bar{x}) \subset C^*(\bar{x}), \qquad \text{donc} \qquad \Gamma(\bar{x}) \subset \Delta^*(\bar{x})$$

En raison du théorème III.2, la condition (1) est donc suffisante pour qu'un point $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ soit une solution optimale de $\mathcal{T}$.

Condition (2). Soit $(\bar{x}, \bar{u})$ un col de $L(x, u)$ où $\bar{x} \in D \cap \Omega_0$ et $\bar{u} \in U^+$. On en déduit :

$$\forall u \in U, \qquad f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) \leqslant f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} u_i g_i(\bar{x})$$

soit, puisque $\bar{x} \in D$ et $\bar{u} \in U^+$:

$$\bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0, \qquad \forall i \in I$$

Par suite, de la relation :

$$f(x) - \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(x) \leqslant f(\bar{x}) - \sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x})$$

on déduit que $\forall x \in D \cap \Omega_0$:

$$f(x) \leqslant f(\bar{x})$$

Condition (3). Soit $x \in \bigcap_{i \in I} \Omega_i$ tel qu'il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ ayant $\bar{x}$ pour solution optimale. On en déduit d'abord que : $\bar{x} \in D$; en effet la relation

$$g_i(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, \beta_i \rangle \leqslant 0$$

entraîne, en faisant $x = \bar{x}$: $g_i(\bar{x}) \leqslant 0$.

De plus, on a vu que le domaine $P(\bar{x})$ défini par les contraintes du p.l.a. $(\bar{x})$ contient D. Par suite :

$$\forall x \in D, \qquad x \in P(\bar{x}) \qquad \text{et} \qquad \langle x - \bar{x}, \alpha \rangle \leqslant 0$$

donc :

$$f(x) \leqslant f(\bar{x}) + \langle x - \bar{x}, \alpha \rangle \leqslant f(\bar{x}).$$

III.5. Remarque

La condition (1) s'explicite comme suit : il existe $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, il existe $\bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$, $i \in I$, et il existe $\bar{u} \in U^+$ tels que :

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = \sum_{i \in I} \bar{u}_i \bar{\beta}_i \\ \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0, \qquad i \in I \end{cases}$$

Cette condition est donc une extension de la condition donnée par Kuhn et Tucker, pour un programme convexe différentiable fini dans $\mathbf{R}^n$ [14]; c'est aussi une extension de la condition de Pšeničnyj [19], formulée par cet auteur dans un espace normé et sous une hypothèse du même type que celle de Slater qui est plus restrictive que notre hypothèse de régularité. Par ailleurs, pour un programme convexe à nombre fini de contraintes supposées différentiables au sens de Gateaux, Rockafellar [21 *b*], a également étendu les conditions de Kuhn et Tucker sous l'hypothèse de Slater.

Même dans le cas où $E = \mathbf{R}^n$ et où I est fini, on notera que les conditions (1) et (2) apportent un enrichissement par rapport au théorème classique de Kuhn et Tucker, ou théorème du col du Lagrangien, ce dernier étant jusqu'ici établi sous l'hypothèse de Slater ou sous une hypothèse équivalente [13], [3], [2], alors qu'ici nous l'avons établi sous une hypothèse de régularité moins restrictive.

IV. PROGRAMME DUAL D'UN PROGRAMME LINEAIRE INFINI

Afin d'en déduire une étude de la dualité en programmation convexe par l'utilisation des programmes linéaires d'appui, on commence par examiner le cas d'un programme linéaire infini $\mathfrak{L}$ de même type que les programmes linéaires d'appui que nous avons définis, soit :

$$\operatorname{Sup} \{ \langle x, c \rangle \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant b_i, i \in I \}$$

où $c \in F$, $a_i \in F$, $b_i \in \mathbf{R}$, et où I est un ensemble quelconque d'indices.

IV.1. Formulation duale du programme $\mathfrak{L}$

Soit D l'ensemble des solutions réalisables de $\mathfrak{L}$. Dans le cas où D est non vide, le programme $\mathfrak{L}$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\operatorname{Sup} \{ \langle x, c \rangle \mid x \in D \} \\ &= \operatorname{Min} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid \forall x \in D, \langle x, c \rangle \leqslant \mu \} \end{aligned}$$

Nous allons voir comment cette deuxième formulation de $\mathfrak{L}$ va nous conduire à un programme dual de $\mathfrak{L}$. Pour cela, associons à D le cône convexe C_D défini dans $E \times \mathbf{R}$:

$$C_D = \{ (x, t) \in E \times \mathbf{R} \mid \langle x, a_i \rangle - b_i t \leqslant 0, i \in I, t \geqslant 0 \}$$

Soit C_D^* le cône polaire de C_D défini dans $F \times \mathbf{R}$ ($E \times \mathbf{R}$ et $F \times \mathbf{R}$ étant mis en dualité par la forme bilinéaire : $(x, t; y, t') \rightarrow \langle x, y \rangle + tt'$, où $x \in E$, $y \in F$, $t \in \mathbf{R}$, $t' \in \mathbf{R}$).

Désignons par M, l'ensemble des majorants de l'image de D par l'application linéaire $\langle \, . \, , c \rangle$

$$M = \{ \mu \in \mathbf{R} \mid \forall x \in D, \langle x, c \rangle \leqslant \mu \}$$

IV.2. Lemme

Si $D \neq \varnothing$, $M = \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in C_D^* \}$.

Démonstration :

a) Soit $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in D$, $\langle x, c \rangle \leqslant \mu$. Montrons que l'on a alors : $\forall (x, t) \in C_D$, $\langle x, c \rangle - \mu t \leqslant 0$. Pour cela, considérons un élément quelconque $(x, t) \in C_D$.

— Si $t \neq 0$, $x_1 = \dfrac{x}{t} \in D$ et l'on a $\langle x_1, c \rangle \leqslant \mu$, soit $\langle x, c \rangle \leqslant \mu t$.

— Dans le cas où $t = 0$, utilisons l'hypothèse $D \neq \varnothing$: il existe $y \in D$, donc $(y, 1) \in C_D$. Le cône C_D étant convexe contient le segment $[(y, 1), (x, 0)]$. Pour tout point (ξ, τ) de ce segment où $\tau \neq 0$, on a $\langle \xi, c \rangle \leqslant \mu\tau$, d'après ce qui précède. Il s'ensuit que, pour $\tau = 0$, on a : $\langle x, c \rangle \leqslant 0$.

b) Soit $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $(c, -\mu) \in C_D^*$, c'est-à-dire tel que

$$\forall (x, t) \in C_D, \langle x, c \rangle - \mu t \leqslant 0.$$

Alors, à tout élément $x \in D$ on peut associer l'élément $(x, 1) \in C_D$ pour lequel $\langle x, c \rangle - \mu \leqslant 0$. On voit ainsi que, $\forall x \in D, \langle x, c \rangle - \mu \leqslant 0$. Donc $\mu \in M$.

IV.3. Programme dual de $\mathfrak{L}$

Soit Γ_D le cône convexe pointé engendré, dans $F \times \mathbf{R}$, par les éléments (a_i, b_i), $i \in I$ et $(O_F, -1)$. Remarquant que $C_D^* = \overline{\Gamma_D}$ (adhérence pour une topologie localement convexe séparée compatible avec la dualité entre $E \times \mathbf{R}$ et $F \times \mathbf{R}$), on est amené, tenant compte du lemme précédent à formuler le programme dual Λ :

$$\operatorname{Inf} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in \Gamma_D \}$$

La contrainte $(c, -\mu) \in \Gamma_D$ s'explicite comme suit :

$$(c, -\mu) = \sum_{i \in I} u_i(a_i, -b_i) + v(O_F, -1)$$

où $u \in U^+$, $v \in \mathbf{R}^+$.

Soit encore, avec des notations évidentes ($a \in \mathbf{F}^I$, $b \in \mathbf{R}^I$)

$$c = \sum_{i \in I} u_i a_i = ua$$

$$\mu = \sum_{i \in I} u_i b_i + v = ub + v$$

où $u \in U^+$ et $v \in \mathbf{R}^+$.

On est conduit finalement au programme Λ :

$$\operatorname*{Inf}_{u} \{ ub \mid ua = c, u \in U^+ \}$$

On notera que ce programme Λ est à rapprocher du programme dual de $\mathfrak{L}$, au sens de Duffin [9]. En effet, en considérant que les espaces vectoriels $\mathbf{R}^I$ et U sont mis en dualité par la forme bilinéaire $(x, u) \to \sum_{i \in I} u_i x_i$, l'application de U dans F : $u \to ua$ est l'application linéaire adjointe de l'application de E dans $\mathbf{R}^I$: $x \to xa$.

IV.4. Théorème de dualité

De la manière même dont on a introduit le programme Λ à partir de $\mathfrak{L}$, il découle le théorème de dualité suivant, relatif au cas où $D \neq \varnothing$.

Théorème

1° *Si la valeur de $\mathfrak{L}$ est $+\infty$, Λ n'admet pas de solution réalisable.*

2° a) *Si chacun des programmes $\mathfrak{L}$ et Λ admet au moins une solution réalisable, alors la valeur de $\mathfrak{L}$ est inférieure ou égale à la valeur de Λ.*

b) *Si la valeur de $\mathfrak{L}$ est finie et si le cône convexe Γ_D est fermé dans $F \times \mathbf{R}$ (pour les topologies $T(F \times \mathbf{R}, E \times \mathbf{R})$) alors Λ admet au moins une solution optimale et a même valeur que $\mathfrak{L}$.*

Démonstration. On a vu que si $D \neq \varnothing$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sup} \{ \langle x, c \rangle \mid x \in D \} &= \operatorname{Min} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid \forall x \in D, \langle x, c \rangle \leqslant \mu \} \\ &= \operatorname{Min} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in C_D^* \} \end{aligned}$$

D'autre part, le programme Λ s'écrit

$$\operatorname{Inf} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in \Gamma_D$$

Comme $\overline{\Gamma_D} = C_D^*$, on a immédiatement la propriété 2 *b*. Pour obtenir le propriétés 1 et 2 *a* il suffit de remarquer que l'on a toujours $\Gamma_D \subset C_D^*$.

IV.5. Relations de complémentarité

IV.5.1. Complémentarité faible

Soit $\bar{x}$ et $\bar{u}$ deux solutions optimales des programmes $\mathfrak{L}$ et Λ et supposons Γ_D fermé, alors :

$$\langle \bar{x}, c \rangle = \sum_{i \in I} \bar{u}_i b_i$$

et

$$\langle \bar{x}, c \rangle = \sum_{i \in I} \langle \bar{x}, \bar{u}_i a_i \rangle$$

Par suite : $\forall i \in I, \bar{u}_i \cdot (\langle \bar{x}, a_i \rangle - b_i) = 0$.

On en déduit les relations de complémentarité :

— *si* $\langle \bar{x}, a_i \rangle - b_i < 0$ (contrainte non active) $\Rightarrow \bar{u}_i = 0$

— si $\bar{u}_i > 0 \Rightarrow \langle \bar{x}, a_i \rangle - b_i = 0$ (contrainte active).

IV.5.2. Complémentarité forte

Soit $I_0 \subset I$ l'ensemble des indices des contraintes actives en *toute* solution optimale de $\mathcal{L}$.

Théorème. *Si I_0 est non vide et fini, si $c \neq O_F$, et si les vecteurs $a_i \in F$, $i \in I_0$, sont linéairement indépendants, alors Λ a même valeur que $\mathcal{L}$ et admet une solution optimale unique $\bar{u}$ qui est telle que :*

$$\begin{cases} \forall i \notin I_0, & \bar{u}_i = 0 \\ \forall i \in I_0, & \bar{u}_i > 0 \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{L}_0$ le programme :

$$\operatorname{Sup} \{ \langle x, c \rangle \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant b_i, i \in I_0 \}$$

et soit Λ_0 le dual de $\mathcal{L}_0$. Puisque I_0 est fini, ces deux programmes ont même valeur. Par suite Λ a même valeur que $\mathcal{L}$ et admet au moins une solution optimale $\bar{u}$. Pour tout $i \notin I_0$, il existe une solution optimale $\bar{x}$ de $\mathcal{L}$ telle que $\langle \bar{x}, a_i \rangle - b_i < 0$, donc $\bar{u}_i = 0$ (pour que la relation de complémentarité faible soit vraie il suffit que la valeur de Λ soit égale à la valeur de $\mathcal{L}$). On en déduit que la solution optimale de Λ est unique, parce que

$$c = \sum_{i \in I_0} \bar{u}_i a_i$$

et que les vecteurs a_i sont linéairement indépendants. Montrons maintenant que, si $c \neq O_F$, alors $\bar{u}_i > 0$ pour tout $i \in I_0$. Supposons qu'il existe $k \in I_0$ tel que $\bar{u}_k = 0$ et mettons en évidence une contradiction. Soit $I_1 = I_0 - \{ k \}$ et soit $\mathcal{L}_1$ le programme :

$$\operatorname{Sup} \{ \langle x, c \rangle \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant b_i, i \in I_1 \}$$

et soit Λ_1 son dual. Puisque $\bar{u}_k = 0$ le dual Λ_0 a même solution optimale que le dual Λ_1, par suite $\mathcal{P}_1$ a même valeur que $\mathcal{P}_0$. L'ensemble des solutions optimales de $\mathcal{P}_0$ est la variété linéaire :

$$L_0 = \{ x \in E \mid \langle x, a_i \rangle = b_i, i \in I_0 \}$$

Soit, d'autre part :

$$P_0 = \{ x \in E \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant b_i, i \in I_0 \}$$

et

$$L_1 = \{ x \in E \mid \langle x, a_i \rangle = b_i, i \in I_1 \}$$

Il est clair que : $L_0 \subset L_1 \cap P_0$. Montrons que l'inclusion est stricte. En effet la relation $L_0 = L_1 \cap P_0$ entraîne :

$$\forall x \in L_1, \qquad \langle x, a_k \rangle \geqslant b_k$$

L'hyperplan $\langle x, a_k \rangle = b_k$ est donc un hyperplan d'appui de L_1. Ceci est impossible si les vecteurs a_i, $i \in I_0$ sont linéairement indépendants.

Donc, il existe $x \in L_1 \cap P_0$ et $x \notin L_0$. L'ensemble des solutions optimales de $\mathcal{L}_0$ étant L_0 on en déduit :

$$\langle x, c \rangle \leqslant \langle \bar{x}, c \rangle$$

où $\bar{x}$ est une solution optimale quelconque de $\mathcal{L}_0$. Par suite L_1 n'est pas contenu dans l'hyperplan : $\langle x - \bar{x}, c \rangle = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que L_1 ait pour valeur $\langle \bar{x}, c \rangle$.

IV.6. Une condition suffisante pour que Γ_D soit fermé, si D est non vide

Soit K_D le cône convexe pointé engendré, dans $F \times \mathbf{R}$, par les éléments $(a_i, -b_i)$, $i \in I$, on a :

$$\Gamma_D = K_D + \mathbf{R}^-$$

$\mathbf{R}^-$ désignant le cône engendré par $(O_F, -1)$, dans $F \times \mathbf{R}$.

Théorème. *Si $D \neq \varnothing$, une condition suffisante pour que Γ_D soit fermé est que K_D soit fermé [pour les topologies $T(F \times \mathbf{R}, E \times \mathbf{R})$].*

Démonstration :

$$K_D^* = \{ (x, t) \in E \times \mathbf{R} \mid \langle x, a_i \rangle - b_i t \leqslant 0 \}$$

$$\mathbf{R}^{-*} = \{ (x, t) \in E \times \mathbf{R} \mid t \geqslant 0 \}$$

Si $D \neq \varnothing$, il existe $(x, t) \in K_D^*$ avec $t = 1$.

Donc K_D^* rencontre l'intérieur de $\mathbf{R}^{-*}$, par suite, en raison du théorème de Fan [10], K_D fermé $\Rightarrow K_D + \mathbf{R}^-$ fermé.

IV.7. Étude du cas où $D = \varnothing$

Le programme dual Λ a été introduit en supposant essentiellement que D était non vide. Quelle est la signification de Λ lorsque D est vide?

Soit

$$C_A = \{ x \in E \mid \langle x, a_i \rangle \leqslant 0, i \in I \}$$

et soit Γ_A le cône convexe pointé engendré par les a_i, $i \in I$

$$\Gamma_A = \left\{ \sum_{i \in J} u_i a_i \mid u_i \geqslant 0, J \subset I, J \text{ fini} \right\}$$

Par définition :

$$C_D^* = \{ (\alpha, \beta) \in F \times \mathbf{R} \mid \forall (x, t) \in C_D \langle x, \alpha \rangle - \beta t \leqslant 0 \}$$

Par suite, si $D = \varnothing$

$$C_D^* = \{ (\alpha, \beta) \in F \times \mathbf{R} \mid \forall (x, 0) \in C_D \langle x, \alpha \rangle \leqslant 0 \}$$

donc

$$C_D^* = C_A^* \times \mathbf{R}$$

Si le cône convexe Γ_D est fermé, on aura donc

$$\Gamma_D = \Gamma_A \times \mathbf{R}$$

(Γ_A est en effet la projection de Γ_D sur F) et le programme Λ s'écrit alors :

$$\text{Min} \{ \mu \in \mathbf{R} \mid (c, -\mu) \in \Gamma_A \times \mathbf{R} \}$$

On en déduit le théorème de dualité suivant qui complète le théorème IV.4.

Théorème. *Dans le cas où* $D \neq \varnothing$:

1° *Si* $c \notin \Gamma_A$, *le programme* Λ *n'admet pas de solution réalisable.*

2° *Si* $c \in \Gamma_A$ *et si* Γ_D *est fermé, alors la valeur de* Λ *est* $-\infty$.

IV.8. Cas particuliers

IV.8.1. Cas où I est fini

Le cône convexe Γ_D est alors un cône polyèdral convexe qui est fermé dans $F \times \mathbf{R}$ pour les topologies $T(F \times \mathbf{R}, E \times \mathbf{R})$. Les théorèmes de dualité ci-dessus IV.4 et IV.7 étendent donc, sans restriction des résultats bien connus pour des programmes linéaires finis dans $\mathbf{R}^n$.

IV.8.2. E est un espace vectoriel topologique sur $\mathbf{R}$, localement convexe séparé et F est son dual topologique, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. On remarque que si E est semi-réflexif (c'est le cas, en particulier, si E est un espace de Hilbert), la condition Γ_D fermée dans $F \times \mathbf{R}$ pour les topologies $T(F \times \mathbf{R}, E \times \mathbf{R})$ est équivalente à la condition Γ_D fermée pour la topologie forte de $F \times \mathbf{R}$. En particulier, si D est non vide, il suffira, en raison de IV.8.6, que le cône convexe K_D soit fermé pour la topologie forte de $F \times \mathbf{R}$ pour pouvoir conclure que Γ_D est fermé pour $T(F \times \mathbf{R}, E \times \mathbf{R})$ et obtenir le théorème de dualité.

IV.8.3. Cas où $E = \mathbf{R}^n$.

On retrouve alors le cas des programmes de Haar, déjà étudié, par une autre voie [6], par Charnes, Cooper et Kortanek. L'intérêt de notre présentation est de formuler la condition suffisante pour obtenir le théorème de dualité sous une forme géométrique simple : Γ_D (ou K_D) fermé dans $\mathbf{R}^{n+1}$.

V. PROGRAMME DUAL D'UN PROGRAMME CONVEXE INFINI $\mathfrak{T}$

V.1. Propriétés du dual d'un p.l.a. de $\mathfrak{T}$

V.1.1. Lemme

a) *Si D est non vide, la valeur de tout p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ de $\mathfrak{T}$ est supérieure ou égale à la valeur de $\mathfrak{T}$.*

b) *Si D est non vide et si f est strictement concave en un point x_0, alors* $\forall x \in D$ et $x \neq x_0$, *la valeur de tout p.l.a. $(x_0, x_i, i \in I)$ est strictement supérieure à $f(x)$.*

Démonstration. Soit un p.l.a. $x_i, i \in \bar{I})$ de $\mathfrak{T}$:

$$\operatorname{Sup} \{ f(x_0) + \langle x - x_0, \alpha \rangle \mid g_i(x_i) + \langle x - x_i, \beta_i \rangle \leqslant 0, i \in I \}$$

où $\alpha \in A^-(f, x_0)$ et $\beta_i \in A(g_i, x_i)$.

La partie a) du lemme résulte du fait que, d'une part, l'ensemble des solutions réalisables $P(x_i, i \in \bar{I})$ de ce programme linéaire contient l'ensemble D des solutions réalisables de $\mathfrak{T}$ et que, d'autre part, la fonction affine

$$f(x_0) + \langle x - x_0, \alpha \rangle$$

est une majoration de $f(x)$.

La partie b) du lemme résulte de la stricte concavité de f au point x_0. Précisons d'abord que f est dite strictement concave au point x_0 si :

$$\forall y_0 \in \Omega_0 \quad \text{et} \quad \forall \theta \in]0\ 1[, f(\theta x_0 + (1-\theta)y_0) > \theta f(x_0) + (1-\theta) f(y_0)$$

La stricte concavité de f au point x_0 entraîne que :

$$\forall y_0 \in \Omega_0 \quad \text{et} \quad y_0 \neq x_0, f(y_0) \langle f(x_0) + \langle y_0 - x_0, \alpha \rangle \quad \text{où} \quad \alpha \in A^-(f, x_0)$$

Par suite on voit que : $\forall x \in D$ et $x \neq x_0$, la valeur de tout p.l.a. $(x_0, x_i, i \in I)$ est strictement supérieure à $f(x)$.

V.1.2. Dual d'un p.l.a. de $\mathcal{T}$

Le dual d'un p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ s'écrit, en conservant la constante $f(x_0)$ dans la fonction objectif :

$$\operatorname*{Inf}_u \left\{ f(x_0) - \langle x_0, \alpha \rangle - \sum_{i \in I} u_i(g_i(x_i) - \langle x_i, \beta_i \rangle) \mid \alpha = \sum_{i \in I} u_i \beta_i, u \in U^+ \right\}$$

Si D est non vide, il en est de même de $P(x_i, i \in I)$. Par suite, d'après le théorème IV.4 on voit que deux cas sont possibles quant au dual d'un p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$:

— ou bien le dual n'admet pas de solution réalisable,

— ou bien le dual admet une solution réalisable et a une valeur au moins égale à celle du primal.

V.1.3. Retour sur les conditions nécessaires d'optimalité en un point régulier

On a montré (III.2 et 3) que si $\bar{x} \in D$, supposé régulier, est optimal pour $\mathcal{T}$, il existe $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, $\bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$ $i \in I$ et il existe $\bar{u} \in U^+$ tels que :

$$\left| \begin{array}{l} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I \\ \bar{\alpha} = \sum_{i \in I} \bar{u}_i \bar{\beta}_i \end{array} \right.$$

On en a conclu (III.3) qu'il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ admettant $\bar{x}$ comme solution optimale. Maintenant que nous avons introduit la notion de dual d'un p.l.a. on peut énoncer :

Théorème. *Si un point $\bar{x} \in D$, régulier, est optimal pour $\mathcal{T}$, il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ dont le dual a une solution optimale $\bar{u}$ et a même valeur que $\mathcal{T}$.*

V.2. Première formulation d'un programme dual de $\mathcal{T}$: programme π_1

En considérant la famille des duals des p.l.a. (x) (homogènes) de $\mathcal{T}$, où $x \in \bigcap_{i \in \bar{I}} \Omega_i$, on est conduit à formuler le programme π_1 :

$$\operatorname*{Inf}_{x,u} \left\{ f(x) - \sum_{i \in I} u_i g_i(x) \mid \alpha = \sum_{i \in I} u_i \beta_i, \alpha \in A^-(f, x), \beta_i \in A(g_i, \bar{x}), u \in U^+ \right\}$$

Des propriétés des p.l.a. (x) et de leurs duals, on déduira le théorème de dualité suivant :

Théorème

1° *Si la valeur de* $\mathcal{S}$ *est* $+\infty$, π_1 *n'admet pas de solution réalisable.*

2° a) *Si chacun des programmes* $\mathcal{S}$ *et* π_1 *admet au moins une solution réalisable, alors la valeur de* $\mathcal{S}$ *est inférieure ou égale à la valeur de* π_1.

b) *Si* $\bar{x}$ *est une solution optimale régulière de* $\mathcal{S}$, *il existe une solution optimale* $(\bar{x}, \bar{u})$ *de* π_1 *et les deux programmes ont même valeur.*

c) *Si* $\mathcal{S}$ *admet une solution optimale régulière, si* $(\bar{x}, \bar{u})$ *est une solution optimale de* π_1, *et si* f *est strictement concave au point* $\bar{x}$, *alors* $\bar{x}$ *est une solution optimale de* $\mathcal{S}$.

d) *Si* $(\bar{x}, \bar{u})$ *est une solution optimale de* π_1 *telle que* $\bar{x} \in D$ et $\sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$, *alors* $\bar{x}$ *est solution optimale de* $\mathcal{S}$.

Démonstration.

1° Si la valeur de $\mathcal{S}$ est $+\infty$, tout p.l.a. (x) a également pour valeur $+\infty$ et par suite aucun dual n'a de solution réalisable.

2° *a*) Si chacun des programmes $\mathcal{S}$ et π_1 admet au moins une solution réalisable, alors la valeur de π_1 est une majoration de la valeur de $\mathcal{S}$ puisque chaque dual d'un p.l.a. (x) fournit une majoration de cette valeur dès qu'il admet une solution réalisable.

2° *b*) Si $\bar{x}$ est une solution optimale régulière de $\mathcal{S}$, il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ admet une solution optimale $\bar{u}$ et ayant même valeur que $\mathcal{S}$ (théorème V.1.3); il s'ensuit que $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale de π_1.

2° *c*) Soit x_0 une solution optimale régulière de $\mathcal{S}$, le programme π_1 a pour valeur $f(x_0)$ d'après ce qui précède. Soit, d'autre part, $(\bar{x}, \bar{u})$ une solution optimale de π_1; il s'ensuit qu'il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ dont le dual a pour solution optimale $\bar{u}$ et qui a même valeur que π_1. Si la fonction f est strictement concave au point $\bar{x}$, on déduit du lemme V.1.1 *b* que la valeur de tout p.l.a $(\bar{x})$ et par suite de son dual est strictement supérieure à $f(x)$ pour tout $x \in D$, $x \neq \bar{x}$. On en conclut que $\bar{x} = x_0$.

2° *d*) Si $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale de π_1 qui vérifie $\bar{x} \in D$ et $\sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$, on en déduit qu'il existe un p.l.a. $(\bar{x})$ dont la valeur est $f(\bar{x})$, c'est-à-dire admettant $\bar{x}$ pour solution optimale. Par suite $\bar{x}$ est solution optimale de $\mathcal{S}$, en raison du théorème III.4.

Dans le cas particulier où E et F sont isomorphes à $\mathbf{R}^n$ et où I est fini, on retrouve avec le programme π_1 le programme dual introduit par Dorn [8] pour des programmes quadratiques et ensuite par Wolfe [24] pour des programmes convexes différentiables et étudié par plusieurs chercheurs notamment Hanson [11], Huard [12], Stoer [22], Mangasarian et Ponstein [15], [16] et Whinston [23]. Par rapport à ces travaux, l'extension apportée ici est double puisque d'une part les fonctions convexes du programme $\mathcal{T}$ ne sont plus supposées différentiables et que, d'autre part, le programme est défini dans un espace de dimension infinie et pour un ensemble infini de contraintes.

V.3. Deuxième formulation d'un programme dual de $\mathcal{T}$: programme π_2

V.3.1. Introduisons les fonctions conjuguées de f et g_i, comme on les a définies en I.4 :

— fonction conjuguée de f définie sur $A^-(f) = \bigcup_{x \in \Omega_0} A^-(f, x)$ par :

$$\varphi(\alpha) = \langle x, \alpha \rangle - f(x) \qquad \text{où} \qquad \alpha \in A^-(f, x)$$

— fonction conjuguée de g_i définie sur $A(g_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} A(g_i, x)$ par :

$$\psi_i(\beta_i) = \langle x, \beta_i \rangle - g_i(\beta_i) \qquad \text{où} \qquad \beta_i \in A(g_i, x)$$

Un p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$ peut alors s'écrire :

$$\operatorname*{Sup}_x \{ -\varphi(\alpha) + \langle x, \alpha \rangle \mid \langle x, \beta_i \rangle \leqslant \psi_i(\beta_i), i \in I \}$$

et le dual d'un tel programme s'écrit maintenant :

$$\operatorname*{Inf}_u \left\{ -\varphi(\alpha) + \sum_{i \in I} u_i \psi_i(\beta_i) \mid \alpha = \sum_{i \in I} u_i \beta_i, u \in U^+ \right\}$$

V.3.2. Programme dual π_2

En considérant la famille des duals de tous les p.l.a. de $\mathcal{T}$ (homogènes ou non) on est conduit au programme π_2 :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha, \beta_i, u} \left\{ -\varphi(\alpha) + \sum_{i \in I} u_i \psi_i(\beta_i) \mid \alpha = \sum_{i \in I} u_i \beta_i, u \in U^+ \right\}$$

où l'on suppose naturellement : $\alpha \in A^-(f)$, $\beta_i \in A(g_i)$.

Des propriétés des p.l.a. de $\mathcal{T}$ et de leurs duals, on déduira comme on l'a fait pour le programme π_1, le théorème de dualité suivant :

Théorème

1° *Si la valeur de $\mathcal{T}$ est $+\infty$, π_2 n'admet pas de solution réalisable.*

2° a) *Si chacun des programmes $\mathcal{T}$ et π_2 admet au moins une solution réalisable, la valeur de π_2 est au moins égale à celle de $\mathcal{T}$.*

b) *Si $\bar{x}$ est une solution optimale régulière de $\mathcal{T}$, il existe une solution optimale $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}_i, \bar{u})$ de π_2 telle que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$, $\bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$ et les deux programmes ont même valeur.*

c) *Si $\mathcal{T}$ admet une solution optimale régulière; si $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}_i, \bar{u})$ est une solution optimale de π_2 et si f est strictement concave en un point $\bar{x}$ tel que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x})$ alors $\bar{x}$ est une solution optimale de $\mathcal{T}$.*

d) *Si $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}_i, \bar{u})$ est une solution optimale de π_2 et s'il existe $\bar{x} \in D$ tel que $\bar{\alpha} \in A^-(f, \bar{x}), \bar{\beta}_i \in A(g_i, \bar{x})$ et $\sum_{i \in I} \bar{u}_i g_i(\bar{x}) = 0$, alors $\bar{x}$ est une solution optimale de $\mathcal{T}$.*

V.3.3. Remarque : programme dual π_2'

Soit f^* et g_i^* les fonctions polaires de f et g_i au sens de Moreau (voir I.4) et appelons programme linéaire d'appui au sens large de $\mathcal{T}$, tout programme :

$$\operatorname{Sup} \{ \langle x, \alpha \rangle - f^*(\alpha) \mid \langle x, \beta_i \rangle \leqslant g_i^*(\beta_i), i \in I \}$$

Les fonctions φ et ψ_i étant les restrictions respectives de f^* et g_i^* sur $A^-(f)$ et $A(g_i)$, la famille des p.l.a. au sens large de $\mathcal{T}$ contient la famille des p.l.a. $(x_i, i \in \bar{I})$. D'autre part le lemme V.1.1. *a* s'étend aux p.l.a. au sens large. En effet, de l'inégalité

$$g_i(x) \leqslant 0$$

on déduit

$$g_i^*(\beta_i) = \operatorname*{Sup}_{x \in \Omega_i} (\langle x, \beta_i \rangle - g_i(x)) \geqslant \langle x, \beta_i \rangle - g_i(x)$$

soit

$$g_i^*(\beta_i) \geqslant \langle x, \beta_i \rangle$$

Ainsi D est contenu dans l'ensemble P des solutions réalisables d'un p.l.a. au sens large. De plus la fonction $\langle x, \alpha \rangle - f^*(\alpha)$ est une majoration de $f(x)$. On en déduit que si D est non vide, la valeur de tout p.l.a. au sens large de $\mathcal{T}$ est supérieure ou égale à la valeur de $\mathcal{T}$.

En considérant la famille des duals des p.l.a. au sens large de $\mathcal{T}$ on obtient le programme π_2' :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha, \beta_i, u} \left\{ -f^*(\alpha) + \sum_{i \in I} u_i g_i^*(\beta_i) \mid \alpha = \sum_{i \in I} u_i \beta_i, u \in U^+ \right\}$$

Et l'on voit que le théorème de dualité précédent demeure vrai pour le programme π_2'.

Dans le cas où I est fini, ce programme π_2' est analogue au programme dual formulé récemment par Rockafellar [21 *b*] sous des hypothèses et par une méthode différentes. D'autre part, dans le cas plus particulier où E et F sont isomorphes à $\mathbf{R}^n$, où I est fini, où f est différentiable et où les contraintes sont linéaires, un programme dual analogue avait été introduit antérieurement par Dennis, d'une part [7] et par Berge et Ghouila-Houri, d'autre part [3].

VI. REMARQUE GENERALE RELATIVE AU CAS OU I EST FINI

Dans le cas où I est fini, les hypothèses concernant les fonctions f et g_i peuvent être affaiblies. Au lieu de supposer que $-f$ et g_i sont des fonctions convexes continues définies sur des ouverts convexes Ω_0 et Ω_i, il suffit de supposer que ces fonctions sont continues et sous-différentiables sur des ouverts quelconques (non nécessairement convexes).

Pour montrer cela, on remarquera qu'étant donné une fonction h sous-différentiable sur un sous-ensemble $\Omega \subset E$, on peut associer à h la fonction convexe h' définie comme enveloppe supérieure des fonctions affines d'appui de h. La fonction convexe h' est définie sur un convexe Ω' contenant Ω et coïncide avec h sur Ω. Si Ω est ouvert et si h est, de plus, continue, alors h a toutes les propriétés locales des fonctions convexes puisque, pour tout $x \in \Omega$, il existe un ouvert convexe contenu dans Ω sur lequel h est une fonction convexe. En particulier, pour tout $x \in \Omega$, $A(h, x)$ est faiblement compact. En associant aux fonctions $-f$ et g_i les fonctions convexes $-f'$ et g_i' définies comme ci-dessus sur des convexes Ω_0' et Ω_i', on vérifie aisément que tous les résultats établis subsistent. Les théorèmes concernant l'hypothèse de régularité se démontrent de la même manière en remarquant que pour tout $x \in D$: $\Delta(x) = \bigcap_{i \in I(x)} \Delta_i(x)$, puisque I est fini, et que $\Delta_i(x) = \Delta_i'(x)$, $\Delta_i'(x)$ étant le cône convexe engendré par $D_i' - x$ avec $D_i' = \{ x \in E \mid g_i'(x) \leqslant 0 \}$. Pour établir la condition nécessaire d'optimalité en un point $x \in D$, il suffit de remarquer que toute solution optimale du programme sous-différentiable défini par les fonctions f et g_i est solution optimale du programme convexe associé défini par les fonctions f' et g_i'.

VII. APPLICATION A L'ETUDE D'UN CAS PARTICULIER

VII.1.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Minimiser } f(x) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \int_0^1 A(t, \tau) x(t) x(\tau) \, dt \, d\tau + \int_0^1 b(t) x(t) \, dt \\ \text{sous : } 0 \leqslant x(t) \leqslant 1 \end{cases}$$

où l'inconnue x est une fonction numérique sur [0, 1], où b est une fonction numérique sur [0, 1] et où A, fonction continue et symétrique sur $[0, 1] \times [0, 1]$, définit un noyau de type positif, c'est-à-dire que l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 A(t, \tau)x(t)x(\tau)\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau$$

est positive ou nulle dès qu'elle est définie.

Soit $L^2[0, 1]$ l'espace de Hilbert réel des classes de fonctions numériques de carré sommable sur [0, 1], quand on considère comme équivalentes deux fonctions qui ont même valeur presque partout sur [0, 1]. On convient de noter $\mathbf{x}$ un élément de $L^2[0, 1]$ et x un représentant de $\mathbf{x}$. Le produit scalaire de deux éléments $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $L^2[0, 1]$ sera noté $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_0^1 x(t)y(t)\, \mathrm{d}t$$

On notera $\mathbf{A}$ l'opérateur transformant $\mathbf{x} \in L^2[0, 1]$ en l'élément $\mathbf{Ax} \in L^2[0, 1]$, classe de la fonction :

$$t \to \int_0^1 A(t, \tau)x(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

D'autre part, l'espace $L^2[0, 1]$ est ordonné par la donnée du cône convexe des éléments positifs :

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \Leftrightarrow x(t) \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } [0, 1].$$

Étant donné un élément quelconque $\mathbf{x} \in L^2[0, 1]$ on désignera par $\mathbf{x}^+$ la partie positive de $\mathbf{x}$ et par $\mathbf{x}^-$ la partie négative de $\mathbf{x}$.

En supposant que b est une fonction de carré sommable sur [0, 1], la fonction :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$$

est définie et continue sur $L^2[0, 1]$. On est amené à considérer le programme suivant, défini dans $L^2[0, 1]$:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \text{Minimiser } f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \\ \\ \text{sous : } \mathbf{0} \leqslant \mathbf{x} \leqslant \mathbf{1}. \end{cases}$$

On sait que ce programme (I) admet au moins une solution optimale. En effet, l'ensemble D des solutions réalisables est faiblement compact et la fonction objectif f est faiblement continue sur D (voir [18] ou [4]).

VII.2. Hypothèse de régularité

Le noyau **A** étant de type positif, la fonction $f(\mathbf{x})$ est convexe. L'ensemble D étant convexe, le programme (I) est donc un programme convexe. Ce programme se présente sous la forme d'un programme convexe de type $\mathfrak{T}$ quand on écrit les contraintes :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leqslant \mathbf{0} & \text{pour tout } \mathbf{y} \leqslant \mathbf{0} \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \leqslant \langle \mathbf{1}, \mathbf{z} \rangle & \text{pour tout } \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

Cette écriture est justifiée par le résultat classique suivant : si une fonction x intégrable sur un ensemble $E \subset [0, 1]$ de mesure non nulle est telle que pour tout $t \in E$ $x(t) > 0$, alors $\int_E x(t)\,\mathrm{d}t > 0$.

Soit $\mathbf{x}$ un point de D et vérifions que $\mathbf{x}$ est régulier. Pour cela considérons un représentant x de $\mathbf{x}$ et posons :

$$E_1 = \{ t \in [0, 1] \mid x(t) = 0 \}$$
$$E_2 = \{ t \in [0, 1] \mid 0 < x(t) < 1 \}$$
$$E_3 = \{ t \in [0, 1] \mid x(t) = 1 \}$$

On étudiera successivement les cônes $\Gamma(\mathbf{x})$ et $\Delta(\mathbf{x})^*$ et on verra qu'ils sont identiques :

a) *Cône* $\Gamma(\mathbf{x})$

On a : $\Gamma(\mathbf{x}) = \Gamma_1(\mathbf{x}) + \Gamma_2(\mathbf{x})$

avec :

$$\Gamma_1(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{y} \in L^2[0, 1] \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \mathbf{y} \leqslant \mathbf{0} \}$$
$$\Gamma_2(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{z} \in L^2[0, 1] \mid \langle \mathbf{x} - \mathbf{1}, \mathbf{z} \rangle = 0, \mathbf{z} \geqslant \mathbf{0} \}$$

Soit $\mathbf{y} \in \Gamma_1(\mathbf{x})$ et soit y un représentant de $\mathbf{y}$. La condition : $\int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t = 0$ avec $x(t) \geqslant 0$ et $y(t) \leqslant 0$ p.p. sur $[0, 1]$ implique que $x(t) \cdot y(t) = 0$ p.p. sur $[0, 1]$. Par suite, on a nécessairement :

$$y(t) \leqslant 0 \text{ p.p. sur } E_1$$
$$y(t) = 0 \text{ p.p. sur } E_2 \cup E_3$$

Soit $\mathbf{z} \in \Gamma_2(\mathbf{x})$ et soit z un représentant de $\mathbf{z}$. La condition :

$$\int_0^1 (x(t) - 1)z(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

avec $x(t) \leqslant 1$ et $z(t) \geqslant 0$ p.p. sur $[0, 1]$ implique que $(x(t) - 1)z(t) = 0$ p.p. sur $[0, 1]$ et que, par suite :

$$z(t) = 0 \text{ p.p. sur } E_1 \cup E_2$$

$$z(t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } E_3$$

On déduit de là que $\Gamma(\mathbf{x})$ est le cône convexe fermé des éléments $\mathbf{a} \in L^2[0, 1]$ dont les représentants a vérifient :

$$a(t) \leqslant 0 \text{ p.p. sur } E_1$$

$$a(t) = 0 \text{ p.p. sur } E_2$$

$$a(t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } E_3$$

b) *Cône* $\Delta(\mathbf{x})^*$

$$\Delta(\mathbf{x}) = \{ \lambda(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \mid \boldsymbol{\xi} \in D, \lambda \geqslant 0 \}$$

Par suite :

$$\Delta(\mathbf{x})^* = \{ \mathbf{a} \in L^2[0, 1] \mid \forall \boldsymbol{\xi} \in D, \langle \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \leqslant 0 \}$$

Soit ξ_1 un élément de D dont les représentants vérifient : $\xi_1(t) = 0$ p.p. sur $E_2 \cup E_3$.

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1 - \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \int_{E_1} \xi_1(t)a(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \Rightarrow a(t) \leqslant 0 \text{ p.p. sur } E_1$$

Soit $\boldsymbol{\xi}_2$ un élément de D dont les représentants vérifient : $\xi_2(t) = 0$ p.p. sur $E_1 \cup E_3$.

$$\langle \boldsymbol{\xi}_2 - \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \int_{E_2} (\xi_2(t) - x(t))a(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \Rightarrow a(t) = 0 \text{ p.p. sur } E_2$$

En effet, on peut choisir $\boldsymbol{\xi}_2$ tel que $\xi_2(t) - x(t) > 0$ p.p. sur E_2, ou bien choisir $\boldsymbol{\xi}_2$ tel que $\xi_2(t) - x(t) < 0$ p.p. sur E_2.

Soit $\boldsymbol{\xi}_3$ un élément de D dont les représentants vérifient : $\xi_3(t) = 0$ p.p. sur $E_1 \cup E_2$:

$$\langle \boldsymbol{\xi}_3 - \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \int_{E_3} (\xi_3(t) - 1)a(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0 \Rightarrow a(t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } E_3$$

On en déduit que le cône $\Delta(\mathbf{x})^*$ est identique au cône $\Gamma(\mathbf{x})$. Ainsi tout point $\mathbf{x} \in D$ est régulier (bien que D n'ait aucun point intérieur dans $L^2[0, 1]$).

VII.3. Conditions d'optimalité

VII.3.1. En appliquant le théorème III.2, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point $\bar{\mathbf{x}} \in D$ soit optimal est que :

$$\operatorname{grad} f(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} \in \Delta(\bar{\mathbf{x}})^*$$

soit, d'après ce qui précède :

$$\int_0^1 A(t, \tau)\bar{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + b(t) \leqslant 0 \text{ p.p. sur } E_1$$

$$\int_0^1 A(t, \tau)\bar{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + b(t) = 0 \text{ p.p. sur } E_2$$

$$\int_0^1 A(t, \tau)\bar{x}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + b(t) \geqslant 0 \text{ p.p. sur } E_3$$

VII.3.2. Sachant que tout point de D est régulier, on peut également formuler des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité en appliquant le corollaire III.3 et le théorème III.4.

Condition (1).

Pour que $\bar{\mathbf{x}} \in D$ soit optimal, il faut et il suffit qu'il existe $\bar{u}_h \geqslant 0$ et $\bar{v}_k \geqslant 0$ tels que :

$$\left|\begin{array}{l} \bar{u}_h \langle \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y_h} \rangle = 0 \text{ pour tout } \mathbf{y}_h \leqslant \mathbf{0} \\ \bar{v}_k \langle \bar{\mathbf{x}} - 1, \mathbf{z}_k \rangle = 0 \text{ pour tout } \mathbf{z}_k \geqslant \mathbf{0} \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = -\sum\limits_{h \in H} \bar{u}_h \mathbf{y}_h - \sum\limits_{k \in K} \bar{v}_k \mathbf{z}_k,\ H \text{ et } K \text{ finis} \end{array}\right.$$

En posant $\sum\limits_{h \in H} \bar{u}_h \mathbf{y}_h = -\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ et $\sum\limits_{k \in K} \bar{v}_k \mathbf{z}_k = \bar{\boldsymbol{\mu}}$, la condition (1) s'énonce :

Il existe $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geqslant \mathbf{0}$ et $\bar{\boldsymbol{\mu}} \geqslant \mathbf{0}$ tels que :

$$\left|\begin{array}{l} \langle \bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \rangle = 0 \\ \langle \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{1}, \bar{\boldsymbol{\mu}} \rangle = 0 \\ \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \bar{\boldsymbol{\mu}} \end{array}\right.$$

En fait, les relations $\langle \bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}} \rangle = 0$ et $\langle \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{1}, \bar{\boldsymbol{\mu}} \rangle = 0$ impliquant :

$$\langle \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}} \rangle = 0$$

on voit que l'on a nécessairement :

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b})^+$$

$$\bar{\boldsymbol{\mu}} = (\mathbf{A}\bar{x} + \mathbf{b})^-$$

Condition (2).

Avec les notations précédentes, on est amené à poser :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \rangle$$

et le théorème du col du Lagrangien s'énonce ici :

Pour que $\bar{\mathbf{x}} \in D$ soit optimal, il faut et il suffit qu'il existe $\bar{\boldsymbol{\lambda}} \geqslant \mathbf{0}$ et $\bar{\boldsymbol{\mu}} \geqslant \mathbf{0}$ tels que :

$$L(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) \leqslant L(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) \leqslant L(\mathbf{x}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$$

pour tout $\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu} \in L^2[0, 1]$, $\boldsymbol{\lambda} \geqslant 0$, $\boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}$.

On retrouve ici les résultats obtenus par une étude directe dans [18] et [4].

VII.4. Application des théorèmes de dualité

VII.4.1. Programme dual π_1

Le programme dual π_1 s'écrit :

$$\text{Maximiser } f(\mathbf{x}) + \sum_{h \in H} u_h \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}_h \rangle + \sum_{k \in K} v_k \langle \mathbf{x} - \mathbf{1}, \mathbf{z}_k \rangle$$

$$\text{sous} \quad \begin{cases} -\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{h \in H} u_h \mathbf{y}_h + \sum_{k \in K} v_k \mathbf{z}_k \\ \mathbf{y}_h \leqslant \mathbf{0},\ \mathbf{z}_k \geqslant \mathbf{0} \\ u_h \geqslant 0,\ v_k \geqslant 0 \\ H \text{ et } K \text{ finis} \end{cases}$$

En posant, comme précédemment

$$\sum_{h \in H} u_h \mathbf{y}_h = -\boldsymbol{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \in K} v_k \mathbf{z}_k = \boldsymbol{\mu}$$

le dual π_1 s'écrit :

$$\text{Maximiser } f(\mathbf{x}) - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \rangle$$

$$\text{sous} \quad \begin{cases} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

soit encore :

$$\text{Maximiser } \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda} \rangle + \langle \mathbf{x} - \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \rangle$$

(II)

$$\text{sous} \quad \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0},\ \boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

On retrouve ici le programme dual (II) que Borget avait introduit dans [4] par analogie formelle avec le cas fini. En appliquant le théorème de dualité V.2, on voit que si $\bar{\mathbf{x}}$ est une solution optimale de (I), il existe une solution $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ optimale pour (II). De plus, d'après ce même théorème, on voit que dans le cas où f est strictement convexe, la réciproque est vraie. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit strictement convexe est que le noyau $\mathbf{A}$ soit strictement positif, c'est-à-dire que :

$$\left| \begin{array}{l} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle \geqslant 0 \qquad \text{pour tout} \qquad \mathbf{x} \in L^2[0, 1] \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Cela résulte de l'égalité :

$$\theta \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + (1 - \theta) \langle \mathbf{y}, \mathbf{Ay} \rangle - \langle \theta\mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{y}, \mathbf{A}(\theta\mathbf{x} + (1 - \theta)y) \rangle = \theta(1 - \theta) \langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rangle$$

On peut donc énoncer la réciproque suivante :

Si $\mathbf{A}$ *est un noyau strictement positif et si* $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \bar{\boldsymbol{\mu}})$ *est une solution optimale de* (II), *alors* $\bar{\mathbf{x}}$ *est solution optimale de* (I).

On remarque d'ailleurs que, dans ce cas, la solution optimale de (I) est unique puisque f est strictement convexe.

VII.3.2. Programme dual π_2

Soit φ la fonction conjuguée de f :

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha} \rangle - f(\mathbf{x}) \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$$

soit :

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle$$

Le programme dual π_2 s'écrit :

Minimiser

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{k \in K} v_k \langle \mathbf{1}, \mathbf{z}_k \rangle$$

sous

$$\left\{ \begin{array}{l} -\boldsymbol{\alpha} = \sum_{h \in H} u_h \mathbf{y}_h + \sum_{k \in K} v_k \mathbf{z}_k \\ \mathbf{y}_h \leqslant \mathbf{0}, \ \mathbf{z}_k \geqslant \mathbf{0} \\ u_h \geqslant 0, \ v_k \geqslant 0 \end{array} \right.$$

En posant, comme précédemment

$$\sum_{h \in H} u_h \mathbf{y}_h = -\boldsymbol{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k \in K} v_k \mathbf{z}_k = \boldsymbol{\mu},$$

le dual π_2 s'écrit :

Minimiser $\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \rangle$

sous
$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\lambda} \geqslant \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0} \end{cases}$$

Pour $\boldsymbol{\alpha}$ fixé, il est clair que $\langle \mathbf{1}, \boldsymbol{\mu} \rangle$ est minimum quand :

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\alpha}^+ \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}^-$$

Le programme π_2 revient finalement à minimiser sans contraintes la fonction :

$$\varphi(\boldsymbol{\alpha}) + \langle \mathbf{1}, \boldsymbol{\alpha}^- \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{x}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{1}, (\mathbf{Ax} + \mathbf{b})^- \rangle$$

On retrouve ici le problème (III) de la thèse de Borget [4]. D'après le théorème de dualité V.3.2, on voit que toute solution optimale de (I) est solution optimale de (III) et que, réciproquement, si A est un noyau strictement positif, toute solution optimale de (III) est solution optimale de (I) (en remarquant que dans ce cas, la solution optimale est unique).

Ces résultats éclairent d'une manière nouvelle l'étude de Borget. En particulier, le problème (III) se rattache directement au dual π_2 plutôt qu'au dual π_1 extension du dual de Wolfe. D'autre part, l'étude de la réciproque, qui n'était pas faite dans [4] montre que si $\mathbf{A}$ est un noyau strictement positif (c'est le cas pour le noyau $A(t, \tau) = \min(t, \tau)$ choisi dans l'exemple numérique étudié dans [4]) le problème (III) est équivalent au problème (I), ce qui justifie l'algorithme proposé dans [4].

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] ABADIE J., *On the Kuhn-Tucker theorem, Non-linear programming. A course.* North Holland Publishing Compagny, 1967.

[2] ARROW K. J., HURWICZ L. et UZAWA H., *Studies in linear and non-linear programming Stanford University Press,* California, 1958.

[3] BERGE C. et GHOUILA-HOURI A., *Programmes, jeux et réseaux de transport,* Dunod, 1962.

[4] BORGET G., *Sur l'application d'une méthode de dualité à un problème d'optimisation dynamique à critère quadratique.* Thèse de Docteur-Ingénieur Faculté des Sciences de Caen, 1966.

[5] BOURBAKI N., *Espaces vectoriels topologiques,* Hermann, Paris, 1955.

[6] CHARNES A., COOPER W. W., KORTANEK K., A duality theorem for convex programs for convex constraints, *Bull. Amer. Math. Soc.* 63, 1962, 605-608.

[7] DENNIS J. B., *Mathematical Programming and Electrical Networks,* Technology Press and John Wiley and Sons, New York, 1959.

[8] DORN W. S., A duality theorem for convex programs. *IBM J. of Res. Dev.* 4, 1960, 407-413.

[9] DUFFIN R. J., *Infinite programs. Linear inequalities and related systems* (edited by Kuhn and Tucker), 1956, 158-170.

[10] FAN K., A generalization of the Alaoglu-Bourbaki theorem and its applications, *Math. Zeithschr*, 88, 1965, 48-60.

[11] HANSON M. A., A duality theorem in non-linear programming with non linear constraints. *Australian J. Statistics*, 3, 1961, 64-72.

[12] HUARD P., Mathématique des programmes économiques, *Monographies de R. O.*, Dunod, 1961, 13-18.

[13] KARLIN S., *Mathematical methods and theory in games, programming and economics*, Addison-Wesley Publishing Compagny, Inc., 1959, vol. I.

[14] KUHN H. W. and TUCKER A. W., *Non-linear programming*. Proceedings of the second Berkeley Symposium, University of California Press, 1951, 481-492.

[15] MANGASARIAN O. L., Duality in non-Linear programming. *Quart. Appl. Math.*, vol. XX, 1962, 300-302.

[16] MANGASARIAN O. L. and PONSTEIN J., Minimax and duality in non-linear programming, *J. of Math. An. and Appl.*, 11, 1965, 504-518.

[17] MOREAU J. J., *Fonctionnelles convexes*. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966-1967.

[18] PALLU DE LA BARRIERE R., Duality in dynamic programming. 1st International Conference on programming and control, Colorado Springs, *SIAM Journal of Control*. vol. 4, n° 1, Feb. 1966.

[19] PSENICNYJ B. N., Programmation convexe dans un espace normé, *Kibernetika* (en russe), 1965, 5, 46-54.

[20] RAFFIN Cl., *a*) Programmation mathématique et dualité. Séminaire de Statistique de l'Université de Poitiers (mars 1966), publié dans les *Cahiers du B.U.R.O.* (*I.S.U.P.*), cahier n° 10, 1-22.

b) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 265, A, 1967, p. 177 et 265, A, 1967, p. 193.

c) Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 266, A, 1968, p. 766 et 266, A, 1968, p. 839.

[21] ROCKAFELLAR R. T., *a*) Characterization of the subdifferentials of convex functions. *Pacific J. of Math.*, vol. XVII, 1966, 497-510.

b) Extension of Fenchel's duality theorem for convex functions, *Duke Math. Journal* 33-1, March 1966, 81-89.

[22] STOER J., Duality in non-linear programming and the min-max theorem, *Num. Math.*, 5, 1963, 371-379.

[23] WHINSTON A., *Some applications of the conjugate function theory to duality*, in [1].

[24] WOLFE P., A duality theorem for non-linear programming, *Quart. Appl. Math.*, 19, 1961, 239-244.