

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

V. GIRAULT

## **Résolution numérique d'une équation des ondes avec condition aux limites non linéaire par une méthode de caractéristiques**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,*  
tome 1, n° 4 (1967), p. 51-62

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1967\\_\\_1\\_4\\_51\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_4_51_0)

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# RESOLUTION NUMERIQUE D'UNE EQUATION DES ONDES AVEC CONDITION AUX LIMITES NON LINEAIRE PAR UNE METHODE DE CARACTERISTIQUES

par V. GIRAULT

---

*Résumé.* — Cette étude utilise la méthode des caractéristiques pour résoudre numériquement une équation des ondes à une dimension avec une condition non linéaire sur la frontière. La méthode est simple à appliquer, demande peu de calculs et les résultats obtenus sont remarquablement précis, contrairement à ceux des méthodes classiques de Galerkin et différences finies.

## § 0. INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude numérique du problème suivant :

### Problème 1

Trouver une fonction  $u(x,t)$  satisfaisant l'équation des ondes

$$(0.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \text{pour} \quad x \in ]0, 1 [ \text{ et } t > 0$$

avec les conditions initiales

$$(0.2) \quad u(x,0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \quad \text{pour} \quad x \in [0, 1]$$

et les conditions aux limites

$$(0.3) \quad u(1,t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

$$(0.4) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 2u^2(0,t) + f(t) \quad \text{pour} \quad t \geq 0$$

où  $f(t) = -0,5 [(0,5-t)^2 \alpha^2(t) + (0,5-t) \alpha'(t) - 3 \alpha(t)]$   
et  $\alpha(t) = 4 (1+4t + 12t^2)$ .

Ce problème admet une solution locale unique explicitée par Goldberg et Neimark [3] :

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq t < x \leq 1 \\ \frac{(t-x)^3}{1-2(t-x)} (48(t-x) - 32) & \text{pour } 0 \leq x \leq t \leq \begin{cases} -x+2 \\ x+\frac{1}{2} \end{cases} \\ \frac{(t-x)^3}{1-2(t-x)} (48(t-x) - 32) \\ \quad - \frac{(x+t-2)^3}{1-2(x+t-2)} (48(x+t-2) - 32) & \text{pour } -x+2 \leq t \leq x+\frac{1}{2} \text{ et } x \leq 1. \end{cases}$$

Le problème I a déjà été étudié du point de vue numérique (cf. [1]) par des méthodes classiques de différences finies et Galerkin. Les résultats obtenus montrent que ces méthodes s'adaptent mal à la résolution de ce problème non-linéaire. En effet, la solution du problème I n'est pas bornée sur la ligne  $t = x + \frac{1}{2}$ . Il n'est donc pas possible de calculer par des méthodes de différences finies et Galerkin la solution approchée pour  $t \geq \frac{1}{2}$ , car le calcul de la solution approchée au point  $t$  nécessite les valeurs de la solution approchée au point  $t - k$ , où  $k$  est le pas de l'approximation sur l'axe des  $t$ . De plus l'approximation s'est avérée fort mauvaise dans un voisinage de  $t = \frac{1}{2}$ .

Nous allons montrer dans cette note comment, au contraire, un usage convenable de la méthode des caractéristiques permet d'obtenir d'excellents résultats.

## § 1. RAPPELS SUR LES CARACTERISTIQUES

Posons

$$(1.1) \quad \begin{aligned} p &= \frac{\partial u}{\partial x}, & q &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ r &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & s &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, & v &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

on a donc

$$(1.2) \quad du = p dx + q dt$$

$$(1.3) \quad dp = r dx + s dt$$

$$(1.4) \quad dq = s dx + v dt.$$

Soit l'équation du second ordre dans  $R^2$  :

$$(1.5) \quad ar + bs + cv = e$$

où  $a, b, c$  et  $e$  sont des fonctions de  $u, p, q, x$  et  $t$  mais ne dépendent pas de  $r, s$  et  $v$ .

Nous pouvons considérer (1.3), (1.4) et (1.5) comme étant un système linéaire en  $r, s$  et  $v$ . En éliminant  $r$  et  $v$  on obtient :

$$(1.6) \quad s(a(dt)^2 - b dx dt + c(dx)^2) = a dp dt + c dq dx - e dx dt.$$

Posons

$$(1.7) \quad a(dt)^2 - b dx dt + c(dx)^2 = 0 ;$$

l'équation (1.6) s'écrit

$$(1.8) \quad a dp dt + c dq dx - e dx dt = 0.$$

L'équation (1.7) définit une famille de courbes (réelles ou imaginaires) de  $R^2$  et l'équation (1.8) définit une famille de relations que  $p$  et  $q$  satisfont sur chacune de ces courbes. Ces courbes sont appelées les *caractéristiques* de l'équation (1.5).

## § 2. APPLICATION DE LA METHODE DES CARACTERISTIQUES AU PROBLEME I

1) Dans le cas de l'équation (0.1) nous avons

$$a = 1 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = -1 \quad ; \quad e = 0.$$

Les caractéristiques sont donc définies, comme il est bien connu, par :

$$(2.1) \quad \left. \begin{array}{l} t = x + c \\ \text{et} \\ t = -x + c \end{array} \right\} \text{ où } c \text{ est une constante réelle.}$$

La relation (1.8) devient

$$dp = dq \frac{dt}{dx}.$$

Sur les courbes  $t = x + c$  et  $t = -x + c$ ,  $p$  et  $q$  satisfont donc les relations

$$\left. \begin{array}{l} (2.2) \quad p = q + d \\ \text{et} \\ (2.3) \quad p = -q + d \end{array} \right\} \text{ où } d \text{ est une constante réelle,}$$

respectivement.

Les conditions initiales et aux limites entraînent :

$$(2.4) \quad u = p = q = 0 \quad \text{pour} \quad t = 0$$

$$(2.5) \quad p = 2u^2 + f(t) \quad \text{pour} \quad x = 0$$

$$(2.6) \quad u = q = 0 \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

De plus, en chaque point de  $\Omega = (0,1) \times t > 0$ ,

$$(1.2) \quad du = p dx + q dt.$$

Si on somme les deux membres de (1.2) on obtient :

$$(2.7) \quad u - u_0 = \int_{x_0}^x p dx + \int_{t_0}^t q dt$$

où

$$u_0 = u(x_0, t_0) \quad \text{et} \quad u = u(x, t).$$

2) Du fait que la solution du problème I n'est pas bornée sur la ligne

$$t = x + \frac{1}{2},$$

nous ne calculerons pas la solution approchée pour  $t - x \geq \frac{1}{2}$ .

Les conditions initiales et aux limites déterminent quatre régions distinctes du domaine d'intégration,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , dans lesquelles nous approchons séparément la solution du problème I. Plus précisément,

$$A = \{ (x, t) \mid 0 \leq t \leq x, t \leq -x + 1 \}$$

$$B = \{ (x, t) \mid -x + 1 \leq t \leq x \leq 1 \}$$

$$C = \left\{ (x, t) \mid 0 \leq x \leq t \leq x + \frac{1}{2} \text{ et } t \leq -x + 2 \right\}$$

$$D = \left\{ (x, t) \mid -x + 2 \leq t \leq x + \frac{1}{2} \text{ et } x \leq 1 \right\}.$$



Appliquons maintenant (2.7) à  $i$  et  $j$  :

$$u_i - u_j = \int_{x_j}^{x_i} p \, dx + \int_{t_i}^{t_i} q \, dt = 0.$$

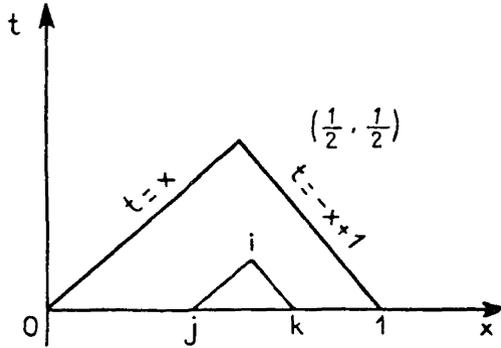


Figure 2

Nous avons donc,

$$(2.8) \quad u(x, t) = p(x, t) = q(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in A.$$

REMARQUE

Nous retrouvons la solution exacte dans  $A$ .

4) Calcul de la solution dans  $B$

Soit  $i$  un point de  $x = 1 \in B$  et  $j$  l'intersection de la caractéristique passant par  $i$  avec  $t = -x + 1$ .

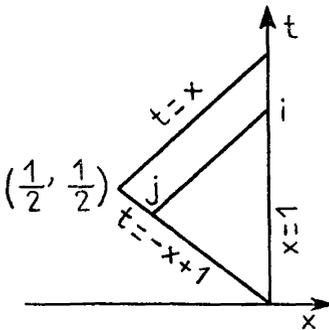


Figure 3

(2.6) entraîne

$$(2.9) \quad u_i = q_i = 0,$$

et (2.8) appliqué à  $t = -x + 1$  donne

$$(2.10) \quad u_j = p_j = q_j = 0.$$

Donc de (2.2), (2.9) et (2.10) il vient

$$p_i = 0.$$

Par le même raisonnement qu'au n° 3 nous avons le résultat

$$(2.11) \quad u(x, t) = p(x, t) = q(x, t) = 0 \quad \text{pour} \quad (x, t) \in B.$$

REMARQUE

Nous retrouvons aussi la solution exacte dans  $B$ .

5) Calcul de la solution dans  $C$ 

Soit  $j$  et  $k$  les intersections des caractéristiques passant par  $i$  avec l'axe des  $t$  et  $t = x$  respectivement.

De (2.8) et (2.11) il vient

$$u_k = p_k = q_k = 0.$$

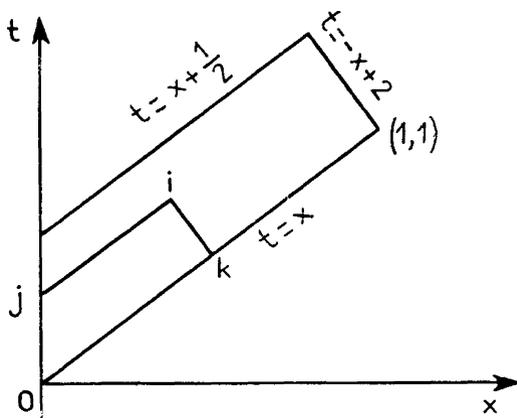


Figure 4

Donc (2.3) donne

$$(2.12) \quad p(x, t) = -q(x, t) \quad \text{pour} \quad (x, t) \in C.$$

En appliquant (2.2) et (2.12) à  $i$  et  $j$  on trouve

$$p_i = p_j.$$

Appliquons maintenant (2.7) à  $i$  et  $j$ ; de (2.12) il vient

$$u_i = u_j,$$

c'est-à-dire

(2.13)  $u, p$  et  $q$  sont constants dans  $C$  sur chaque caractéristique  $t - x = \text{constant}$ .

Il suffit donc de calculer  $u$  et  $p$  aux points  $(0, t)$  pour avoir la solution approchée dans  $C$ .

## REMARQUES

1. La solution exacte vérifie aussi (2.12) et (2.13).

2. Ces propriétés dépendent du fait que  $u(x, t) = p(x, t) = q(x, t) = 0$  sur  $t = x$ ; elles ne sont pas forcément vérifiées si  $t + x > 2$ . Ceci explique pourquoi on introduit la région  $D$ .

**Calcul de  $U$** 

(2.5) entraîne

$$p_j = 2u_j^2 + f(t_j);$$

mais  $p_j = -q_j$ ,

donc

$$q_j + 2u_j^2 + f(t_j) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(0, t) + 2u^2(0, t) + f(t) = 0 & \text{pour } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \text{avec } u(0, 0) = 0. \end{cases}$$

Nous sommes ramenés à résoudre l'équation différentielle de Riccati (2.14) sur l'axe des  $t$ . La solution ne peut en général être explicitée; il faut l'approcher par un schéma de résolution numérique d'équation différentielle. Remarquons que puisque, la fonction  $2u^2 + f(t)$  ne satisfait pas de condition de Lipschitz en  $u$ , il est difficile de démontrer la convergence de la solution d'un tel schéma vers la solution de (2.14).

Nous avons étudié deux schémas pour résoudre (2.14) : le schéma d'Adams-Moulton d'ordre 1 (cf. § 3) et celui de Milne-Simpson d'ordre 4 (cf. § 4). Les schémas d'Adams-Moulton et de Milne-Simpson équivalent à approcher le second membre de (2.7) par la méthode des trapèzes et de Simpson respectivement.

**6) Calcul de la solution dans  $D$** 

Soit  $i$  un point de  $D$ ,  $k$  l'intersection de la caractéristique passant par  $i$  avec  $x = 1$  et  $l$  l'intersection de la caractéristique passant par  $k$  avec  $t = -x + 2$ .

Les relations (2.6) entraînent

$$u_k = q_k = 0$$

et de (2.2) et (2.12) il vient

$$(2.15) \quad p_k = 2p_l.$$

De plus, en appliquant (2.3) aux points  $i$  et  $k$ , on trouve par (2.15)

$$(2.16) \quad p_i + q_i = 2p_i.$$

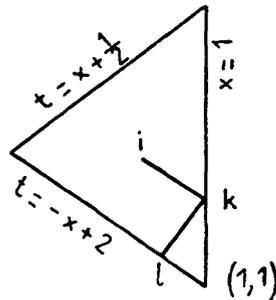


Figure 5

Il reste à calculer  $u_i$ . Pour cela il faut approcher l'équation (2.7) par une formule d'intégration. Ces calculs sont faits aux paragraphes suivants.

### § 3. LES CALCULS NUMERIQUES PAR LA METHODE DES TRAPEZES

Nous approchons (2.7) par la formule

$$(3.1) \quad U - U_0 = \frac{1}{2}(x - x_0)(P + P_0) + \frac{1}{2}(t - t_0)(Q + Q_0).$$

Introduisons un réseau régulier, de pas  $h$ , de caractéristiques dans le plan des  $(x, t)$  :

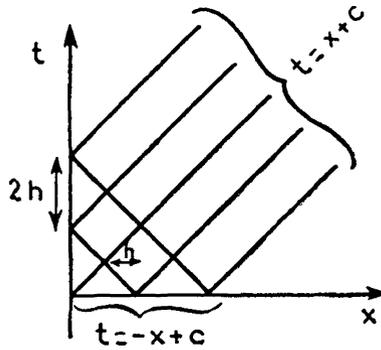


Figure 6

Ceci divise l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  sur l'axe des  $t$  en  $N$  intervalles de longueur  $2h$  ( $N = \frac{1}{4h}$ ).

#### 1) Solution approchée dans $C$

Appliquons (3.1) aux points  $j = (0, t_j)$  et  $l = (0, t_j - 2h)$ ; par (2.12) il vient :

$$(3.2) \quad U_j - U_l = -h(P_j + P_l).$$

Mais

$$(3.3) \quad P_j = 2U_j^2 + f(t_j)$$

donc

$$(3.4) \quad U_j = -\frac{1}{4h} (1 \pm \sqrt{1 + 8h(U_l - hP_l - hf(t_j))})$$

et par (3.2),

$$(3.5) \quad P_j = -P_l - \frac{U_j - U_l}{h}.$$

En discrétisant (2.14) par le schéma d'Adams-Moulton d'ordre 1 on aboutit aussi à (3.4) et (3.5).

Pour déterminer le signe du radical, nous choisissons la solution  $U_j$  qui se rapproche le plus de la solution au point  $t_j$  du schéma d'Euler; c'est-à-dire qui minimise l'expression

$$(3.6) \quad \left| \frac{U_j - U_i}{2h} + 2U_j^2 + f(t_j) \right|.$$

## 2) Solution approchée dans $D$

Soit  $i = (x, t)$  et  $j = (x + h, t + h)$  deux points de  $D$ . Appliquons (3.1) à  $i$  et  $j$ :

$$(3.7) \quad U_j - U_i = \frac{h}{2} [(P_j + Q_j) + (P_i + Q_i)]$$

où les termes entre parenthèses peuvent être ramenés par (2.16) à des valeurs de  $P$  sur  $t = -x + 2$  calculées au numéro 1.

## § 4. LES CALCULS NUMERIQUES PAR LA METHODE DE SIMPSON

Nous introduisons le même réseau de caractéristiques qu'au paragraphe 3.

Ici (2.7) est approché par la formule

$$(4.1) \quad U - U_0 = \frac{1}{6} [(x - x_0)(P + 4P'_0 + P_0) + (t - t_0)(Q + 4Q'_0 + Q_0)]$$

où  $P'_0$  et  $Q'_0$  désignent la valeur respective de  $P$  et  $Q$  au nœud intermédiaire  $\left(\frac{x + x_0}{2}, \frac{t + t_0}{2}\right)$ .

### 1) Solution approchée dans $C$

Pour utiliser (4.1) il faut un procédé de démarrage permettant de calculer  $P'_0$  et  $Q'_0$ . Nous utilisons la formule des trapèzes aux points  $(0, 0)$  et  $(0, h)$  comme schéma de démarrage.

Soit  $i = (0, t_i)$ ,  $j' = (0, t_i - h)$  et  $j = (0, t_i - 2h)$  trois points de  $C$ . (4.1) et (2.12) donnent :

$$(4.2) \quad U_i - U_j = -\frac{h}{3} (P_i + 4P'_{j'} + P_j).$$

En combinant (4.2) et (3.3) nous retrouvons (3.4) et (3.5) avec  $h$  remplacé par  $\tilde{h} = \frac{h}{3}$  et  $P_j$  remplacé par  $\tilde{P} = P_j + 4P'_{j'}$ . On aboutit à

ces mêmes équations en discrétisant (2.14) par le schéma de Milne-Simpson d'ordre 4. Nous utilisons le critère (3.6) pour déterminer le signe du radical.

2) **Solution approchée dans  $D$**

Soit  $j = (x, t), j' = (x + \frac{h}{2}, t + \frac{h}{2}), i = (x + h, t + h)$  trois points de  $D$ . Par (4.1) nous avons

$$(4.3) \quad U_i - U_j = \frac{h}{6} [(P_i + Q_i) + 4(P'_j + Q'_j) + (P_j + Q_j)]$$

où chaque terme entre parenthèses se ramène à une valeur de  $P$  connue.  $U_i$  se calcule donc directement à partir de  $U_j$ .

§ 5. **RESULTATS**

Les résultats suivants ont été obtenus sur l'ordinateur C.D.C. 3600 de l'Institut Blaise-Pascal.

Au point  $x = 0, t = 0, 25$ ,  
solution exacte  $u(x, t) = -0,625\ 000\ 000$

SOLUTIONS APPROCHEES OBTENUES PAR :			
CARACTERISTIQUES		GALERKIN (1)	DIFFERENCES FINIES IMPLICITE (1)
Trapèzes	Simpson	pas sur l'axe des $x$ :	pas sur l'axe des $x$ :
$h = 0,01$		$h = 0,02$	$h = 0,025$
		pas sur l'axe des $t$ :	pas sur l'axe des $t$ :
		$k = 0,007\ 812\ 5$	$k = 0,006\ 25$
$-0,625\ \underline{85}$	$-0,625\ 000\ \underline{251}$	$-0,623\ \underline{30}$	$-0,571\ \underline{6}$
(1) Nous utilisons là les résultats de [1], chapitre VI.			

Au point  $x = 0,95, t = 1, 2$ ,  
solution exacte  $u(x, t) = -0,505\ 428\ 571$ .

SOLUTIONS APPROCHEES OBTENUES PAR :	
Caractéristiques	
Trapèzes	Simpson
$h = 0,01$	
— 0,505 <u>965</u>	— 0,505 428 <u>792</u>

## REMARQUES

Les résultats de la méthode des caractéristiques sont peu comparables à ceux des méthodes classiques de Galerkin et différences finies. L'efficacité de la méthode des caractéristiques dans ce cas d'une équation des ondes en dimension 1 peut s'expliquer par les raisons suivantes :

1) la méthode retrouve et utilise un maximum de propriétés vérifiées par la solution exacte, telles que (2.13) ;

2) l'approximation se réduit essentiellement à la résolution numérique d'une équation différentielle et à l'évaluation d'une intégrale. Les temps de calculs sont donc considérablement diminués.

Il serait possible d'améliorer les résultats en utilisant des schémas de résolution d'équation différentielle d'ordre supérieur. On pourrait, par exemple, démarrer le schéma de Simpson par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Il est clair que les calculs précédents se généralisent sans difficulté au problème I avec la condition (0.4) remplacée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) u^i(0, t) \quad n \geq 0$$

où les  $a_i(t)$  sont des fonctions continues.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. CASPI : « Résolution numérique d'une équation des ondes dont la solution admet des singularités », C.N.R.S. Institut Blaise-Pascal.
- [2] L. FOX : « The numerical resolution of ordinary and partial differential equations », Pergamon Press (1962).
- [3] GOLDBERG et NEIMARK : « Problème bien posé de l'équation des ondes mixte non-linéaires dans le plan » (en Russe). *Recueil Mathématique*, nouvelle série, Tome 67 (109) : 1 (1965).