

# REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ANDRÉ METTÉ

## **Essai de résolution numérique du problème de Goursat par la méthode de Runge-Kutta pour une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*,  
tome 1, n° 1 (1967), p. 67-90

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1967\\_\\_1\\_1\\_67\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_1_67_0)

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**ESSAI DE RESOLUTION NUMERIQUE  
DU PROBLEME DE GOURSAT  
PAR LA METHODE DE RUNGE-KUTTA  
POUR UNE EQUATION  
AUX DERIVEES PARTIELLES  
DU TYPE HYPERBOLIQUE**

**Comparaison de la méthode de Runge-Kutta-Moore pour une équation aux dérivées partielles du second ordre (hyperbolique) avec certaines méthodes numériques**

par André METTÉ

---

*Le but de ce travail est de comparer certaines méthodes de résolution numérique du problème de Goursat :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right); u(x, 0) = \sigma(x); u(0, y) = R(y); \sigma(0) = R(0),$$

*au point  $x = a, y = b$  à la méthode de Runge-Kutta-Moore. En particulier nous avons étudié les méthodes : polygonale d'Euler-Cauchy (Diaz), de différences-finies (Aziz et Hubbard), d'extrapolation (T..ornig).*

**I. INTRODUCTION**

Le sujet de ce travail est de présenter certains résultats relatifs à la recherche d'une solution approchée du problème de Goursat :

$$(1.1) \quad u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$$

$$(1.2) \quad u(x, 0) = \sigma(x) \quad , \quad u(0, y) = \tau(y) \quad , \quad \sigma|_0 = \tau(0)$$

$$(1.3) \quad 0 \leq x \leq a \quad , \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\left( u_x = p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

Suivant certaines conditions de « régularité » sur  $f, \sigma, \tau$ , et leurs dérivées, plusieurs auteurs ont prouvé l'existence d'au moins une solution.

Désignons par  $R$  le rectangle défini par (1.3) et  $X$  l'espace réel à 3 dimensions avec des points  $(V^0, V^1, V^2)$ ,  $f$  bornée, continue et Lipschitzienne avec la constante  $L$ , sur  $X \times R$

$$(1.4) \quad |f(x, y, V^0, V^1, V^2) - f(x, y, V^0, \bar{V}^1, \bar{V}^2)| \leq L[|\bar{V}^1 - V^1| + |V^2 - \bar{V}^2|]$$

pour  $(x, y) \in R$ ,  $(V^0, V^1, V^2) \in X$  et  $(V^0, \bar{V}^1, \bar{V}^2) \in X$

Subdivisons les 2 segments  $[0, a]$  et  $[0, b]$  en  $m$  et  $n$  sous-intervalles

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} < x_m = a$$

$$y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < y_n = b$$

On subdivise ainsi le rectangle  $R$  en sous-rectangles  $R_{kl}$  ainsi définis par :

$$x_k \leq x \leq x_{k+1}, \quad y_l \leq y \leq y_{l+1}$$

Le réseau de mailles ainsi obtenu sera dit « convergent » lorsque le diamètre de la plus grande maille tend vers 0,  $m$  et  $n$  tendant simultanément vers l'infini.

Désignons par :

$$f_{kl} = f(x_k, y_l, u_{kl}, p_{kl}, q_{kl})$$

$$u_{kl} = u(x_k, y_l), p_{kl} = p(x_k, y_l), q_{kl} = q(x_k, y_l)$$

### Théorème (Moore) (8)

Soit  $f$  vérifiant la condition précédente (1.4)  $\sigma$  et  $\tau$ , continûment dérivables, respectivement sur  $[0, a]$  et  $[0, b]$  et  $u(x, y)$ ,  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$  une solution arbitraire du problème (1.1), (1.2), (1, 3) où  $u$ ,  $p$ ,  $q$  sont continues sur  $R$ . Alors il existe un réseau de mailles « convergent » et une suite d'expressions de la forme :

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{kl}^{0\nu} = \sigma_k^\nu + \tau_l^\nu - \sigma_0 + \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\beta=0}^{l-1} C_{\alpha\beta}^{0\nu} \Delta_\alpha^{1\nu} \Delta_\beta^{2\nu} \\ V_{kl}^{1\nu} = \sigma_k^{\nu'} + \sum_{\beta=0}^{l-1} C_{k\beta}^{1\nu} \Delta_\beta^{2\nu} \\ V_{kl}^{2\nu} = \pi_l^{\nu''} + \sum_{\alpha=0}^{k-1} C_{\alpha l}^{2\nu} \Delta_\alpha^{1\nu} \end{array} \right.$$

où pour la subdivision considérée

$$\begin{aligned} \Delta_\alpha^{1\nu} &= x_{\alpha+1}^\nu - x_\alpha^\nu; & \Delta_\beta^{2\nu} &= y_{\beta+1}^\nu - y_\beta^\nu \\ \sigma_k^\nu &= \sigma(x_k^\nu), & \tau_l^{\nu'} &= \tau(y_l^{\nu'}). \end{aligned}$$

Les  $\{C^{\gamma\nu}\}(\gamma = 0, 1, 2)$  sont des suites de fonctions réelles définies sur  $X \times R$  ( $R$  étant le réseau de mailles), telles que  $C^{\gamma\nu}$  soit constant dans chaque maille du réseau et  $\{C^{\gamma\nu}_{kl}\} \rightarrow \gamma_{kl}$  quand  $\nu \rightarrow +\infty$ ,  $\gamma_{kl}$  étant fixe. Les suites (1.5) convergent uniformément vers les solutions choisies :

$$V_{kl}^{0\nu} \rightarrow u(x_k, y_l); \quad V_{kl}^{1\nu} \rightarrow p(x_k, y_l); \quad V_{kl}^{2\nu} \rightarrow q(x_k, y_l)$$

Si de plus  $f$  est Lipschitzienne aussi en  $u$  la solution du problème (1.1), (1.2), (1.3) est unique (Diaz 5).

(En particulier si  $p$  et  $q$  ne figurent pas explicitement dans  $f$ , le théorème s'applique, ce sera le cas étudié ci-dessous.)

Quelle que soit la méthode numérique utilisée, le problème posé consistera (pour plus de simplicité) à diviser  $[0, a]$  en  $m$  segments égaux, et  $[0, b]$  en  $n$  segments égaux :

$$\begin{aligned} x_k &= kh; \quad 1 \leq k \leq m \quad mh = a \\ y_l &= l\phi h; \quad 1 \leq l \leq n \quad n\phi h = b. \end{aligned}$$

$h$  étant le pas,  $\phi$  une constante positive.

Le rectangle  $R_{kl}$  sera défini par

$$\begin{cases} x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ y_l \leq y \leq y_{l+1} \end{cases}$$

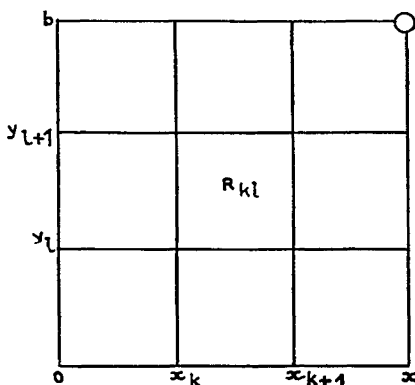


Figure 1

$u_{kl}, p_{kl}, q_{kl}$  seront les valeurs approchées de  $u, p, q$ , au point  $(k, l)$

$$(1.6) \quad \begin{cases} u_{kl} = \tilde{u}(x_k, y_l) \\ p_{kl} = \tilde{p}(x_k, y_l) \\ q_{kl} = \tilde{q}(x_k, y_l) \\ f_{kl} = f(x_k, y_l, u_{kl}, p_{kl}, q_{kl}) \end{cases}$$

La connaissance de  $\sigma(x)$  et  $\tau(y)$  permet de trouver

$$(1.7) \quad \begin{cases} p(x, 0) = \sigma'(x) \\ q(0, y) = \tau'(y) \end{cases}$$

Malheureusement les calculs de  $p(0, y)$  et  $q(x, 0)$  sont moins immédiats. En général ce seront les solutions de 2 équations différentielles ordinaires.

Si on pose :

$$p(0, y) = \theta(y); \quad q(x, 0) = \psi(x)$$

$$(1.8) \quad \begin{cases} \frac{d\theta}{dy} = f(0, y, \lambda\tau(y), \theta, \lambda' R'(y)) \\ \theta(0) = \sigma'(0) \end{cases}$$

$$(1.9) \quad \begin{cases} \frac{d\psi}{dx} = f(x, 0, \sigma(x), \sigma'(x), \psi) \\ \psi(0) = \tau'(0) \end{cases}$$

(dans le cas où  $f$  ne contient que  $u, \theta$  et  $\psi$  s'obtiennent par des quadratures). On pourra utiliser en général, une méthode de calcul numérique pour les équations différentielles, par exemple par la méthode de Runge-Kutta, que nous désignerons par *RK1*. On a donc l'organigramme simplifié suivant :

ORGANIGRAMME DU PROBLEME

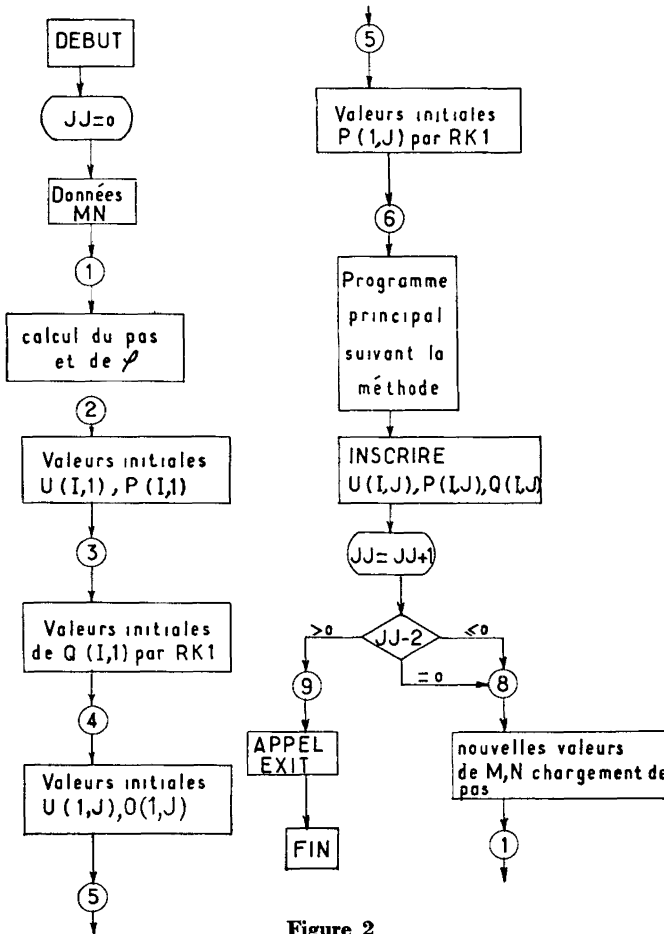


Figure 2

Les méthodes utilisées ont été :

A. Méthode de Runge-Kutta (Moore, 8) qui était le but essentiel de cette recherche et que nous désignerons par *KK2*.

B. Méthode polygonale d'Euler Cauchy (Diaz, 5).

C. Méthode des différences finies (A. Aziz et B. E. Hubbard, 2).

D. Méthode d'extrapolation (Törnig, 11) (nous n'avons pas étudié la méthode d'approximation successive, ni toute autre méthode indirecte).

*Convergence.* Dans chacun de ces cas la convergence a été établie.

*Erreur de méthode.* Une expression explicite de l'erreur a été établie dans les cas C et D.

*Stabilité.* Dans le cas non linéaire, le problème n'a été qu'amorcé, surtout dans cas quasilinéaire récemment, surtout après les travaux de Buchanan [3] et Kreiss [7] par Morton [10] Hedstrom [6], Strang [11] et Vidar Thomee [14]. Citons sur cette question un travail de Lin-Chûn [15] (récemment traduit en anglais), et tout récemment Stetter [16].

## II. INDICATIONS SUR LES DIVERSES METHODES EMPLOYEES

### A. Méthode de Runge-Kutta (Moore, 9)

En s'inspirant de *KK1* et des équations intégrales, résolvant le problème (1.1), (1.2), (1.3)

$$(1.A) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - \sigma(0) \\ \qquad \qquad \qquad + \int_0^x \int_0^y f[\xi, \eta, u(\xi, \eta), p(\xi, \eta), q(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\ p(x, y) = \sigma'(x) + \int_0^y f[x, \eta, u(x, \eta), p(x, \eta), q(x, \eta)] d\eta \\ q(x, y) = \tau'(y) + \int_{0_f}^x f[\xi, y, u(\xi, y), p(\xi, y), q(\xi, y)] d\xi \end{array} \right.$$

On est amené à utiliser une technique en « escalier » des approximations de ces équations. En supposant connus *exactement*  $u, p, q$  en  $(x_0, y_0)$  on posera

$$(2.A) \quad s(x) = u(x, y_0), \quad t(y) = u(x_0, y)$$

(valeurs des solutions le long des deux caractéristiques  $x = x_0$  et  $y = y_0$ ) qui seront de nouvelles conditions initiales pour notre nouveau problème (on a  $u_x = p = s'$  pour  $y = y_0$  et  $u_y = q = t'$  pour  $x = x_0$ ).

L'idée de base de RK2 est la même que celle de RK1. Un calcul explicite est utilisé pour lequel plusieurs paramètres sont à calculer (éléments de matrices diagonales ainsi que certaines quantités qui dépendent des rectangles adjacents à  $R_{k,l}$ ,  $(R_{k-1,l})$ ,  $(R_{k-1,l-1})$ ,  $(R_{k,l-1})$ .

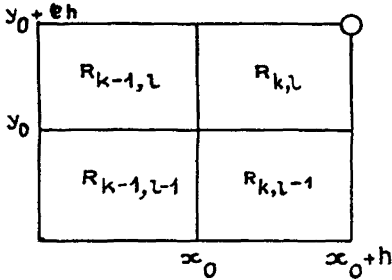


Figure 3

Les valeurs de  $u$ ,  $p$ ,  $q$  au point  $(x_0 + h, y_0 + \phi h)$  sont exprimées comme séries de puissances de  $h$ , en fonction de ces paramètres. Alors en identifiant les coefficients de plus bas degré de  $h$  (en pratique jusqu'à l'ordre 4) avec ceux des développements Tayloriens de  $u$ ,  $p$ ,  $q$ , rapportés en  $(x_0, y_0)$  on obtient un système de 33 équations

à 270 inconnues. (Ces équations sont assez compliquées...). Moore choisit ces paramètres de façon à assurer la convergence. Il aboutit aux résultats suivants :

$$(3.A) \quad \mathbf{U}_{(k,l)}^0 = \begin{pmatrix} \xi_k \\ \eta_l \\ u_{k,l} \\ p_{k,l} \\ q_{k,l} \end{pmatrix}, \quad f\left(\mathbf{U}_{(k,l)}^0\right) = f(\xi_k, \eta_l, u_{k,l}, p_{k,l}, q_{k,l})$$

$$(4.A) \quad \mathbf{U}_{(k,l)}^u = \begin{pmatrix} \xi_k + g_\lambda^u h \\ \eta_l + e_\lambda^u g_\lambda^u \phi h \\ u_{k,l} + g_\lambda^u h \tilde{s}'_{(k,l)} + e_\lambda^u g_\lambda^u \phi h \tilde{t}'_{(k,l)} + e_\lambda^u (g_\lambda^u)^2 \phi h^2 f\left(\mathbf{U}_{(k,l)}^0\right) \\ p_{k,l} + g_\lambda^u h \tilde{s}''_{(k,l)} + e_\lambda^u g_\lambda^u \phi h f\left(\mathbf{U}_{(k,l)}^0\right) \\ q_{k,l} + e_\lambda^u g_\lambda^u \phi h \tilde{t}''_{(k,l)} + g_\lambda^u h f\left(\mathbf{U}_{(k,l)}^0\right) \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1, 2, 3$$

$$(5.A) \quad \begin{matrix} e_1^u = 1 & e_2^u = 1 & e_3^u = 3 \\ g_1^u = 1 & g_2^u = \frac{2}{3} & g_3^u = \frac{2}{9} \end{matrix}$$

On définit une matrice colonne  $\mathbf{U}_{\lambda,2}^u$  où  $\mathbf{U}_{(k,l)}^0$  est remplacé par  $\mathbf{U}_{\lambda,1}^u$  dans (4.A)

$$(6.A) \quad \mathbf{U}_{(kl)}^p = \begin{pmatrix} \xi_k + g_\lambda^p h \\ \eta_l + e_\lambda^p g_\lambda^h \varphi h \\ u_{k+1,l} + e_\lambda^p \varphi h \tilde{t}'_{(k,l)} + e_\lambda^p \varphi h^2 f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \\ p_{k+1,l} + e_\lambda^p \varphi h f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \\ q_{k,l} + e_\lambda^p \varphi h \tilde{t}''_{(k,l)} + h f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \end{pmatrix}$$

$$(7.A) \quad \begin{cases} \lambda = 1, 2 \\ e_1^p = 1 & e_2^p = \frac{1}{3} \\ g_1^p = 1 & g_2^p = 1 \end{cases}$$

On définit de même une matrice colonne  $\mathbf{U}_{\lambda_2}^p$  en remplaçant dans

$$(6.A), \quad \mathbf{U}_{k,l}^0 \quad \text{par} \quad \mathbf{U}_{(k,l)}^p.$$

Enfin pour  $q$ , on utilise :

$$(8.A) \quad \mathbf{U}_{(k,l)}^q = \begin{pmatrix} \xi_k + g_\lambda^q h \\ \eta_l + e_\lambda^q g_\lambda^q \varphi h \\ u_{k,l+1} + g_\lambda^q h \tilde{s}'_{(k,l)} + e_\lambda^q (g_\lambda^q)^2 \varphi h^2 f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \\ p_l^k + g_\lambda^q h \tilde{s}''_{(k,l)} + g_\lambda^q e_\lambda^q \varphi h f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \\ q_{k,l+1} + g_\lambda^q e_\lambda^q h f \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right) \end{pmatrix}$$

$$(9.A) \quad \begin{cases} \lambda = 1 \text{ et } 3 \\ e_1^q = 1 & e_3^q = 3 \\ g_1^q = 1 & g_3^q = \frac{1}{3} \end{cases}$$



On obtient de même  $\left( \mathbf{U}_{(k,l)}^a \right)_{\lambda_2}$  en remplaçant dans (8.A),  $\left( \mathbf{U}_{(k,l)}^0 \right)$  par  $\left( \mathbf{U}_{(k,l)}^a \right)_{\lambda_1}$

$\tilde{s}'$  et  $\tilde{t}'$  sont donnés par :

$$(10.A) \quad \begin{cases} (\tilde{s}'_{kl}) = \frac{2}{3} p_{k,l} + \frac{1}{3} p_{k+1,l} \\ (\tilde{t}'_{(k,l)}) = \frac{2}{3} q_{k,l} + \frac{1}{3} q_{k,l+1} \end{cases}$$

Les  $(\tilde{s}'')$  et  $(\tilde{t}'')$  sont donnés par :

$$(11.A) \quad \begin{cases} h_{(0,0)}(\tilde{s}'') = \frac{1}{24} p_{3,0} - \frac{7}{24} p_{2,0} + \frac{35}{24} p_{1,0} - \frac{29}{24} p_{0,0} \\ \varphi h_{(0,0)}(\tilde{t}'') = \frac{1}{24} q_{0,3} - \frac{7}{24} q_{0,2} + \frac{35}{24} q_{0,1} - \frac{29}{24} q_{0,0} \end{cases}$$

$$(12.A) \quad \begin{cases} h_{0,l}(\tilde{s}'') = -\frac{1}{6} p_{2,l} + \frac{4}{3} p_{1,l} - \frac{7}{6} p_{0,l} \\ \varphi h_{0,l}(\tilde{t}'') = \frac{5}{6} q_{0,l+1} - \frac{4}{6} q_{0,l} - \frac{1}{6} q_{0,l-1} \\ l \geq 1 \end{cases}$$

$$(13.A) \quad \begin{cases} h_{(k,0)}(\tilde{s}'') = \frac{5}{6} p_{k+1,0} - \frac{4}{6} p_{k,0} - \frac{1}{6} p_{k-1,0} \\ \varphi h_{(k,0)}(\tilde{t}'') = -\frac{1}{6} q_{k,2} + \frac{4}{3} q_{k,1} - \frac{7}{6} q_{k,0} \\ k \geq 1 \end{cases}$$

$$(14.A) \quad \begin{cases} h_{(k,l)}(\tilde{s}'') = \frac{5}{6} p_{k+1,l} - \frac{4}{6} p_{k,l} - \frac{1}{6} p_{k-1,l} \\ \varphi h_{(k,l)}(\tilde{t}'') = \frac{5}{6} q_{k,l+1} - \frac{4}{6} q_{k,l} - \frac{1}{6} q_{k,l-1} \\ k \geq 1 \quad \text{et} \quad l \geq 1 \end{cases}$$

En définitive les formules donnant les valeurs approchées au point  $(k + 1, l + 1)$  sont :

$$(15.A) \left\{ \begin{array}{l} u_{k+1,l+1} = u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - u_{k,l} + \varphi h^2 \left\{ \frac{1}{32} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^0\right) \right. \\ \left. + \frac{1}{8} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^u\right) + \frac{27}{64} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^u\right) + \frac{27}{64} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^u\right) \right\} \\ p_{k+1,l+1} = p_{k+1,l} + \varphi h \left\{ \frac{1}{4} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^p\right) + \frac{3}{4} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^p\right) \right\} \\ q_{k+1,l+1} = q_{k,l+1} + h \left\{ \frac{1}{4} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^q\right) + \frac{3}{4} f\left(\mathbf{U}_{k,l}^q\right) \right\} \\ k = 0, 1, 2, \dots, m - 1 \quad , \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - 1 \end{array} \right.$$

La méthode *RK2* consiste donc, une fois les calculs faits pour des rectangles  $R_{k,1}$  ;  $k \leq k_0$ , et  $l \leq l_0$  à effectuer les calculs dans  $R_{k_0,l_0}$  en employant les formules (15.A) et on poursuit les calculs jusqu'à  $k = m - 1$   $l = n - 1$ , les formules (15.A) donnant  $u_{m,n}$  ;  $p_{m,n}$  ;  $q_{m,n}$  qui seront les valeurs approchées de  $u, p, q$  au point  $(m, n)$   $\left( h = \frac{a}{m}, \varphi h = \frac{b}{n} \right)$ .

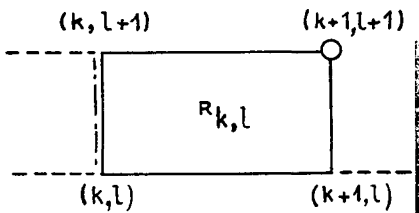


Figure 4

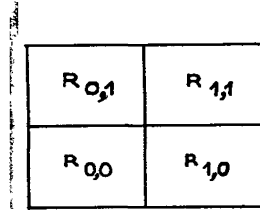


Figure 5

Au démarrage :  $k = 0, l = 0$ , les formules (11.A) permettent d'effectuer les calculs dans  $R_{0,0}$  et de calculer  $u_{1,1}, p_{1,1}$ , et  $q_{1,1}$ .

Mais dès qu'on aborde soit le rectangle  $R_{1,0}$  soit  $R_{0,1}$  : les formules (12.A) ou (13.A) sont inutilisables, car (12.A) par exemple implique la connaissance de  $p_{2,1}$  ou de  $q_{1,2}$  qui ne sont pas encore calculées.

Le mémoire de Moore reste muet sur ce point.

On peut cependant éviter cette difficulté en remplaçant  $p_{2,1}$  par des valeurs approchées, comme nous l'indiquerons ultérieurement. L'exemple que nous avons traité ne comportant pas  $p$  et  $q$  dans  $f$ , évitait cette difficulté.

**B. Méthode polygonale (Diaz, 5).**

La méthode consiste à remplacer dans chaque rectangle  $R_{kl}$ ,  $u$  par  $u_{kl}$  et les dérivés partielles,  $p$ , par  $\frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{x_{k+1} - x_k}$

$$q \text{ par } \frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{y_{l+1} - y_l}$$

On obtient les expressions (pour des subdivisions de  $a$  en  $m$  parties, et  $b$  en  $n$  parties, pas forcément égales).

$$(1.B) \left\{ \begin{array}{l} u_{mn}^{(k,l)}(x, y) = u_{k,l} + \frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) \\ \quad + \frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{y_{l+1} - y_l} (y - y_l) + f_{k,l} \cdot (x - x_k)(y - y_l) \\ p_{mn}^{(k,l)}(x, y) = \frac{u_{k+1,l} - u_{k,l}}{x_{k+1} - x_k} + \sum_{j=1}^l f_{k,j+1} \cdot (y_j - y_{j-1}) \\ \quad + f_{k,l} \cdot (y - y_l) \\ q_{m,n}^{(k,l)}(x, y) = \frac{u_{k,l+1} - u_{k,l}}{y_{l+1} - y_l} + \sum_{i=1}^k f_{i-1,l} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ \quad + f_{k,l} \cdot (x - x_k) \\ (x, y) \in R_{(k,l)}^{m,n} \quad k = 0, 1, \dots, m \quad l = 0, 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Ce qui revient pratiquement aux formules de récurrences :

$$(2.B) \left\{ \begin{array}{l} u_{k+1,l} = u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - u_{k,l} + (x_{k+1} - x_k)(y_{l+1} - y_l)f_{k,l} \\ p_{k+1,l+1} = p_{k+1,l} + (y_{k+1} - y_l)f_{k+1,l} \\ q_{k+1,l+1} = q_{k,l+1} + (x_{k+1} - x_k)f_{k,l+1} \\ u_{k,0} = \sigma_k \quad , \quad u_{0,1} = \tau_1 \\ k = 0, 1, 2, \dots, (m-1) \quad ; \quad l = 0, 1, 2, \dots, (n-1) \end{array} \right.$$

**C. Méthode des différences finies (Aziz et Hubbard, 2).**

Dans cette méthode on prend pour  $u$  une valeur moyenne ( $P$ )

$$(1.C) \quad (P)_{(k,l)} = \frac{1}{4} (u_{k+1,l} + u_{k,l+1} + u_{k,l} + u_{k+1,l+1})$$

pour les dérivées partielles pour  $p : \mathbf{U}_X(P)$  et  $q : \mathbf{U}_Y(P)$  valeurs approchées données par :

$$(2.C) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_X(P) = \frac{1}{2h} [u_{k+1,l+1} + u_{k+1,l} - u_{k,l+1} - u_{k,l}] \\ \mathbf{U}_Y(P) = \frac{1}{2\varphi h} [u_{k+1,l+1} + u_{k,l+1} - u_{k+1,l} - u_{k,l}] \end{cases}$$

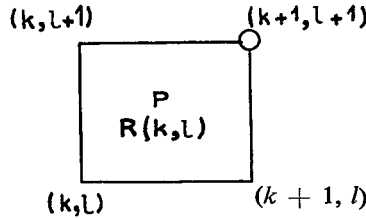


Figure 6

( $h$  : le pas ;  $\varphi$  une constante positive ; en supposant les subdivisions égales).

Pour  $P$  : dans le rectangle  $R_{k,l}$ , les coordonnées sont données par :

$$(3.C) \quad (P_{k,l}) = \begin{pmatrix} kh + \frac{1}{2} h \\ l\varphi h + \frac{1}{2} \varphi h \end{pmatrix}$$

D'où les formules de récurrence

$$(4.C) \quad \begin{cases} u_{k+1,l+1} = u_{k+1,l} + u_{k,l+1} - u_{k,l} + \varphi h^2 f(P_{kl}) \\ p_{k+1,l+1} = p_{k+1,l} + \varphi h f(P_{kl}) \\ q_{k+1,l+1} = q_{k,l+1} + h f(P_{kl}) \\ f(P_{kl}) = f\left(kh + \frac{1}{2} h, l\varphi h + \frac{\varphi h}{2}, \mathbf{U}_{(k,l)}(P), \mathbf{U}_X(P), \mathbf{U}_Y(P)\right) \end{cases}$$

L'inconvénient de cette méthode est qu'elle est implicite, et nécessite la résolution de la première équation (4.C) par rapport à  $u_{kk+1,l+1}$ , et au cas où cette équation a plusieurs solutions, choisir celle (ou une) qui converge vers  $u_{k,l}$  quand  $h \rightarrow 0$ ,  $u_{kl}$  étant supposée être une solution exacte. D'autre part la convergence n'est assurée que si l'opérateur associé à  $f$  est contractile. Dans l'exemple que nous avons choisi la première équation (4.C) était du second degré en  $u_{k+1,l+1}$ .



avec les  $j_l$  donnés par le tableau 2 :

TABLEAU 2

$l \backslash j$	0	1	2	3	4	5
0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{55}{24}$	$\frac{1\ 901}{720}$	$\frac{4\ 277}{1\ 440}$
1		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{12}$	$-\frac{59}{24}$	$-\frac{2\ 774}{720}$	$-\frac{7\ 923}{1\ 440}$
2			$\frac{5}{12}$	$\frac{37}{24}$	$\frac{2\ 686}{720}$	$\frac{9\ 982}{1\ 440}$
3				$-\frac{9}{24}$	$-\frac{1\ 274}{720}$	$-\frac{7\ 298}{1\ 440}$
4					$\frac{951}{720}$	$\frac{2\ 877}{1\ 440}$
5						$-\frac{475}{1\ 440}$

On peut déduire des formules (2.D) de nouvelles formules d'interpolation. On définit d'abord les solutions le long des caractéristiques  $x = x_0$  et  $y = y_0$

$$(3.D) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{j,l}^{[0]} = z(x_j, y_l) \\ p_{j,l}^{[0]} = p(x_j, y_l) \quad \text{pour } j = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{ou } l = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \text{ou } j = l = 0 \\ q_{j,l}^{[0]} = q(x_j, y_l) \\ f_{j,l}^{[0]} = f(x_j, y_l, z_{j,l}^{[0]}, p_{j,l}^{[0]}, q_{j,l}^{[0]}) \end{array} \right.$$

$$(4.D) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{r,s}^{[0]} = z_{r,s-1}^{[0]} + z_{r-1,s}^{[0]} - z_{r,s}^{[0]} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + hk \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{s-1} \alpha_{r-1, \mu} f_{r-s-1, s-1-\nu}^{[0]} \\ p_{r,s}^{[0]} = p_{r,s-1}^{[0]} + h \sum_{\nu=0}^{s-1} \alpha_{s-1, \nu} f_{r,s-1-\nu}^{[0]} \\ q_{r,s}^{[0]} = q_{r-1,s}^{[0]} + h \sum_{\mu=0}^{r-1} \alpha_{r-1, \mu} f_{r-1-\mu, s}^{[0]} \end{array} \right.$$

En remplaçant toujours dans les équations intégrales (1.A) ;  $f$  sous le signe  $\int$  par des polynômes  $Q_{m, n}(x, y)$ , de degrés  $m, n$ , tels que

$$Q_{m, n}(x_k, y_l) = f_{k, l}$$

$$(k = 0, 1, 2 \dots m; l = 0, 1, \dots n)$$

On obtient les formules d'interpolation :

$$(5.D) \left\{ \begin{array}{l} z_{r, s} = z_{r, 0} + z_{0, s} - z_{0, 0} + hk \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \gamma_{r, \mu}^m \gamma_{s, \nu}^n f_{\mu, \nu} \\ p_{r, s} = p_{r, 0} + k \sum_{\nu=0}^n \gamma_{s, \nu}^n f_{r, \nu} \\ q_{r, s} = q_{0, s} + h \sum_{\mu=0}^m \gamma_{r, \mu}^m f_{\mu, s} \\ f_{r, s} = f(x_r, y_s, z_{r, s}, p_{r, s}, q_{r, s}) \\ (r = 1, 2 \dots m, s = 1, 2 \dots n) \end{array} \right.$$

Les  $\gamma_{i, j}^\lambda$  sont donnés comme éléments d'une matrice

TABLEAU 3

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,0}^j & \gamma_{1,1}^j & \dots & \gamma_{1,j}^j \\ \gamma_{2,0}^j & \gamma_{2,1}^j & \dots & \gamma_{2,j}^j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{j,0}^j & \gamma_{j,1}^j & \dots & \gamma_{j,j}^j \end{pmatrix}$$

$$j = 1, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$j = 2, \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$j = 3, \begin{pmatrix} \frac{9}{24} & \frac{19}{24} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{9}{8} & \frac{9}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Des formules (4.D) donnant  $z_{\mu,\nu}^{[0]}$ ,  $p_{\mu,\nu}^{[0]}$ ,  $q_{\mu,\nu}^{[0]}$  on peut déduire en première approximation :

$$(6.D) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_{r,s}^{[1]} = z_{r,0} + z_{0,s} - z_{0,0} + hk \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=0}^n \gamma_{r,\mu}^m \gamma_{s,\nu}^n f_{\mu,\nu}^{[0]} \\ p_{r,s}^{[1]} = p_{r,0} + k \sum_{\nu=0}^n \gamma_{s,\nu}^n f_{r,\nu}^{[0]} \\ q_{r,s}^{[1]} = q_{0,s} + h \sum_{\mu=0}^m \gamma_{r,\mu}^m f_{\mu,s}^{[0]} \\ f_{r,s}^{[1]} = f(x_r, y_s, z_{r,s}^{[1]}, p_{r,s}^{[1]}, q_{r,s}^{[1]}) \\ r = 1, 2, \dots, m ; s = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

Des formules (4.D), on peut déduire les  $(\lambda + 1)^{ièmes}$  nouvelles approximations, en prenant (16.D) comme prédiction

$$(7.D) \quad \begin{aligned} z_{r,s}^{[\lambda+1]} &= z_{r,s}^{[\lambda]} + hk \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n \gamma_{r,\mu}^m \gamma_{s,\nu}^n [f_{\mu,\nu}^{[\lambda]} - f_{\mu,\nu}^{[\lambda-1]}] \\ p_{r,s}^{[\lambda+1]} &= p_{r,s}^{[\lambda]} + k \sum_{\mu=1}^n \gamma_{s,\mu}^n [f_{r,\mu}^{[\lambda]} - f_{r,\mu}^{[\lambda-1]}] \\ q_{r,s}^{[\lambda+1]} &= q_{r,s}^{[\lambda]} + h \sum_{\mu=1}^m \gamma_{r,\mu}^m [f_{\mu,s}^{[\lambda]} - f_{\mu,s}^{[\lambda-1]}] \\ f_{r,s}^{[\lambda+1]} &= f(x_r, y_s, z_{r,s}^{[\lambda+1]}, p_{r,s}^{[\lambda+1]}, q_{r,s}^{[\lambda+1]}) \\ \lambda &\geq 1 \end{aligned}$$

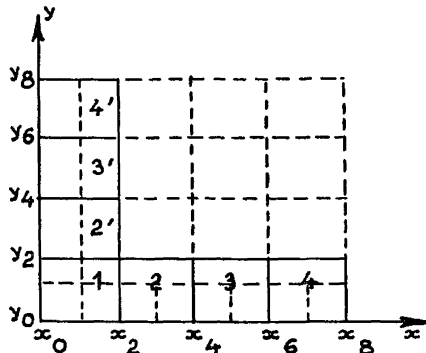


Figure 7

On applique les formules (3.D), (4.D), (5.D), (6.D) et (7.D), suivant le schéma indiqué dans la figure 6 (cas où  $m = n = 2$ ).



Le calcul est supposé effectué dans le rectangle « 1 ». On aura besoin pour continuer, des solutions pour  $y = y_0$ , donnés par (3.D) et (4.D) on en déduit les calculs dans les rectangles « 2, 3, 4... »

Ce qui donne  $Z_{\rho, \lambda}$ ,  $p_{\rho, \lambda}$ ,  $q_{\rho, \lambda}$  avec

$$\lambda = M_m + \rho, \quad (M = 1, 2, 3...; \rho = 1, 2, 3, \dots, m)$$

De même, les calculs dans les rectangles « 2', 3'... » donneront pour  $x = x_0$ ,  $z_{\rho, \lambda}$ ;  $p_{\rho, \lambda}$  avec  $\rho = Nn + \lambda$ , ( $N = 1, 2, 3...; \lambda = 1, 2, 3... n$ )

### III. APPLICATION NUMERIQUE

L'exemple choisi a été :

$$(1) \quad \begin{cases} u_{xy} = u^2 \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+x}; u(0, y) = \frac{1}{1+y} \end{cases}$$

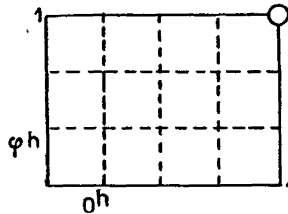


Figure 8

$$(2) \quad \begin{cases} \text{La solution exacte} \\ u(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y)} \\ p(x, y) = \frac{-1}{(1+x)^2(1+y)} \\ q(x, y) = \frac{-1}{(1+x)(1+y)^2} \end{cases}$$

pour  $x = y = 1$

$$(3) \quad \begin{cases} u = 0,250 \\ p = q = -0,125 \end{cases}$$

peut être approchée par une des méthodes indiquées. Dans ce cas  $p$ ,  $q$  ne figurent pas dans  $f$  et le théorème de Moore peut être appliqué dans le rectangle défini par la figure 7. La machine utilisée était l'I.B.M. 704. Programme Fortran II.

## A.RK2

Les formules de (4.A) jusqu'à (8.A) se simplifient. (Il faut néanmoins calculer 8 fois  $u^2$  à chaque itération.)

En posant

$$(4) \quad \begin{cases} A_{k,l} = \left( \frac{2}{3} p_{k,l} + \frac{1}{3} p_{k+1,l} \right) h \\ B_{k,l} = \left( \frac{2}{3} q_{k,l} + \frac{1}{3} q_{k,l+1} \right) \varphi h \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l)}^u = u_{k,l} + A_{k,l} + B_{k,l} + (u_{k,l})^2 \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^u = u_{k,l} + \frac{2}{3} A_{k,l} + \frac{2}{9} B_{k,l} + \frac{4}{27} (u_{k,l})^2 \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^u = u_{k,l} + \frac{2}{9} A_{k,l} + \frac{2}{3} B_{k,l} + \frac{4}{27} (u_{k,l})^2 \varphi h^2 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l)}^u = \mathbf{U}_{(k,l)}^u + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^u \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^u = \mathbf{U}_{(k,l)}^u + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^u \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \frac{4}{27} \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^u = \mathbf{U}_{(k,l)}^u + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^u \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \frac{4}{27} \varphi h^2 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l)}^p = u_{k+1,l} + B_{k,l} + (u_{k,l})^2 \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^p = u_{k+1,l} + \frac{1}{3} B_{k,l} + (u_{k,l})^2 \varphi \frac{h^2}{3} \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l)}^p = \mathbf{U}_{(k,l)}^p + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^p \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l)}^p = \mathbf{U}_{(k,l)}^p + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l)}^p \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \varphi \frac{h^2}{3} \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l),1,1}^a = u_{k,l+1} + A_{k,l} + (u_{k,l})^2 \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l),3,1}^a = u_{k,l+1} + \frac{1}{3} A_{k,l} + (u_{k,l})^2 \varphi \frac{h^2}{3} \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_{(k,l),1,2}^a = \mathbf{U}_{(k,l),1,1}^a + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l),1,1}^a \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \varphi h^2 \\ \mathbf{U}_{(k,l),3,2}^a = \mathbf{U}_{(k,l),3,1}^a + \left[ \left( \mathbf{U}_{(k,l),3,1}^a \right)^2 - (u_{k,l})^2 \right] \varphi \frac{h^2}{3} \end{cases}$$

Des formules 6, 8, 10 on déduit les formules de récurrence :

$$(11) \quad \begin{cases} u_{k+1,l+1} = u_{k,l+1} + u_{k+1,l} - u_{k,l} + \varphi h^2 \left[ \frac{1}{32} (u_{k,l})^2 \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{8} \left( \mathbf{U}_{(k,l),1,2}^u \right)^2 + \frac{27}{64} \left( \mathbf{U}_{(k,l),2,2}^u \right)^2 + \frac{27}{64} \left( \mathbf{U}_{(k,l),3,2}^u \right)^2 \right] \\ p_{k+1,l+1} = p_{k+1,l} + \varphi h \left[ \frac{1}{4} \left( \mathbf{U}_{(k,e),1,2}^p \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \mathbf{U}_{(k,e),2,2}^p \right)^2 \right] \\ q_{h+1,e+1} = q_{h,e+1} + h \left[ \frac{1}{4} \left( \mathbf{U}_{(k,l),1,2}^q \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \mathbf{U}_{(k,l),3,2}^q \right)^2 \right] \end{cases}$$

( $k = 1, 2, \dots, m - 1$ ), ( $l = 1, 2, \dots, n - 2$ )

Les résultats ont été les suivants

$$(12) \quad \begin{cases} m = 10 & n = 10 & \tilde{u} = 0.25978 \\ & \varphi = 1 & \tilde{p} = -0.12164 \quad \text{soit 100 itérations} \\ & & \tilde{q} = -0.12028 \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} m = 10 & n = 20 & \tilde{u} = 0.25490 \\ & \varphi = \frac{1}{2} & \tilde{p} = -0.12314 \quad \text{soit 200 itérations} \\ & & \tilde{q} = -0.12012 \end{cases}$$



on obtient

$$(20) \quad u_{k+1,l+1} = -S_{k,l} + \frac{8D_{k,l}}{\varphi h^2} - \sqrt{\frac{\Delta}{k,l}}$$

Posant :

$$(21) \quad T_{k,l} = u_{k+1,l+1} + S_{k,l}$$

$$(22) \quad p_{k+1,l+1} = p_{k+1,l} + \frac{\varphi h}{16} (T_{k,l})^2$$

$$q_{k+1,l+1} = q_{k,l+1} + \frac{h}{16} (T_{k,l})^2$$

Les résultats ont été les suivants

$$(23) \quad \begin{array}{lll} m = 10 & n = 10 & \tilde{u} = 0.25149 \\ \varphi = 1 & \tilde{p} = -0.11762 & \text{soit 100 itérations} \\ & \tilde{q} = -0.11762 & \end{array}$$

$$(24) \quad \begin{array}{lll} m = 10 & n = 20 & \tilde{u} = 0.25249 \\ \varphi = \frac{1}{2} & \tilde{p} = -0.11751 & \text{soit 200 itérations} \\ & \tilde{q} = -0.12081 & \end{array}$$

**D. Méthode d'extrapolation.**

L'application des formules (3.D), (4.D), (5.D), (6.D), et (7.D) donne :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{r+\alpha,s+\beta}^{[0]} = \mathbf{U}_{r+\alpha,s+\beta-1}^{[0]} + \mathbf{U}_{r+\alpha-1,s+\beta}^{[0]} \\ \quad - \mathbf{U}_{r+\alpha-1,s+\beta-1}^{[0]} + \varphi h^2 \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\nu=0}^{s-1} \alpha_{r-1,\mu} \alpha_{s-1,\nu} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \left( \mathbf{U}_{r+\alpha-1-\mu,s+\beta-1-\nu}^{[0]} \right)^2 \\ p_{r+\alpha,s+\beta}^{[0]} = p_{r+\alpha,s+\beta-1}^{[0]} + \varphi h \sum_{\nu=0}^{s-1} \alpha_{s-1,\nu} \left( \mathbf{U}_{r+\alpha,s-\beta-1-\nu}^{[0]} \right)^2 \\ q_{r+\alpha,s+\beta}^{[0]} = q_{r+\alpha-1,s+\beta+h}^{[0]} \sum_{\mu=0}^{r-1} \alpha_{r-1,\mu} \left( \mathbf{U}_{r+\alpha-1-\mu,s+\beta}^{[0]} \right)^2 \\ (r = 0, 1, 2) \quad , \quad (s = 0, 1, 2) \\ (\alpha = 0, 2, 4, \dots, 2m = M) \quad , \quad (\beta = 0, 2, 4, \dots, 2n = N) \\ \mathbf{U}_{i,j}^{[0]} = U(x_i, y_j) \quad \text{avec} \quad i = 0 \quad \text{ou} \quad j = 0 \quad \text{ou} \quad i = j = 0 \end{array} \right.$$

TABLEAU 4

		$\alpha_{j,I}$		
		0	1	2
j	1	0 1	1 3	2
	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{23}{12}$
1			$-\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{12}$
2				$\frac{5}{12}$

Prédicteur

$$(26) \left\{ \begin{aligned}
 & \mathbf{U}_{r+\alpha, s+\beta} = \mathbf{U}_{r+\alpha, \beta} + \mathbf{U}_{\alpha, s+\beta} - \mathbf{U}_{\alpha, \beta} \\
 & \quad + \varphi h^2 \sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{r, \mu}^2 \gamma_{s, \nu}^2 \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, \nu+\beta} \right)^2 \\
 & p_{r+\alpha, s+\beta} = p_{r+\alpha, \beta} + \varphi h \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{s, \nu}^2 \left( \mathbf{U}_{r+\alpha, \nu+\beta} \right)^2 \\
 & q_{r+\alpha, s+\beta} = q_{\alpha, s+\beta} + h \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{r, \mu}^2 \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, s+\beta} \right)^2 \\
 & (r = 1, 2) \quad , \quad (s = 1, 2) \\
 & (\alpha = 2, 4, \dots 2m = M) \quad , \quad (\beta = 2, 4, \dots 2n = N)
 \end{aligned} \right.$$

Corrector

$$(27) \left\{ \begin{aligned}
 & \mathbf{U}_{r+\alpha, s+\beta}^{[1]} = \mathbf{U}_{r+\alpha, \beta} + \mathbf{U}_{\alpha, s+\beta} - \mathbf{U}_{\alpha, \beta} \\
 & \quad + \varphi h^2 \sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{r, \mu}^2 \gamma_{s, \nu}^2 \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, \nu+\beta} \right)^2 \\
 & p_{r+\alpha, s+\beta}^{[1]} = p_{r+\alpha, \beta} + \varphi h \sum_{\nu=0}^2 \gamma_{s, \nu}^2 \left( \mathbf{U}_{r+\alpha, \nu+\beta} \right)^2 \\
 & q_{r+\alpha, s+\beta}^1 = q_{\alpha, s+\beta} + h \sum_{\mu=0}^2 \gamma_{r, \mu}^2 \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, s+\beta} \right)^2 \\
 & (r = 1, 2) \quad , \quad (s = 1, 2) \\
 & (\alpha = 2, 4, \dots 2m = M) \quad , \quad (\beta = 2, 4, 6 \dots 2n = N)
 \end{aligned} \right.$$

$$(28) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_{r+\alpha, s+\beta}^{[2]} = \mathbf{U}_{r+\alpha, s+\beta}^{[1]} \\ \quad + \varphi h^2 \sum_{\mu=1}^2 \sum_{\nu=1}^2 \gamma_{r,\mu}^2 \gamma_{s,\nu}^2 \left[ \mathbf{U}_{\mu+\alpha, \nu+\beta}^{[1]} - \mathbf{U}_{\mu+\alpha, \nu+\beta}^{[0]} \right]^2 \\ p_{r+\alpha, s+\beta}^{[2]} = p_{r+\alpha, s+\beta}^{[1]} \\ \quad + \varphi h \sum_{\nu=1}^2 \gamma_{s,\nu}^2 \left( \mathbf{U}_{r+\alpha, \nu+\beta}^{[1]} \right)^2 - \left( \mathbf{U}_{r+\alpha, \nu+\beta}^{[0]} \right)^2 \\ q_{r+\alpha, s+\beta}^{[2]} = q_{r+\alpha, s+\beta}^{[1]} \\ \quad + h \sum_{\mu=1}^2 \gamma_{r,\mu}^2 \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, s+\beta}^{[1]} \right)^2 - \left( \mathbf{U}_{\mu+\alpha, s+\beta}^{[0]} \right)^2 \\ (r = 1, 2) \quad , \quad (s = 1, 2) \\ (\alpha = 2, 4, \dots 2m = M) \quad , \quad (\beta = 2, 4, \dots 2n = N) \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,0}^2 & \gamma_{1,1}^2 & \gamma_{1,2}^2 \\ \gamma_{2,0}^2 & \gamma_{2,1}^2 & \gamma_{2,2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{8}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Les résultats ont été les suivants

$$(29) \left\{ \begin{array}{lll} m = 10 & n = 10 & u = 0.19408 \\ \varphi = 0 & & p = -0.17900 \quad \text{soit 100 itérations} \\ & & q = -0.17343 \end{array} \right.$$

$$(30) \left\{ \begin{array}{lll} m = 10 & n = 20 & u = 0.200173 \\ \varphi = \frac{1}{2} & & p = -15926 \quad \text{soit 200 itérations} \\ & & q = -0.17357 \end{array} \right.$$

Nous pouvons résumer les résultats dans le tableau 7

TABLEAU 7

	<i>u</i>	<i>p</i>	<i>q</i>	
100 itérations	<i>Exactes</i> .....	0.250	— 0.125	— 0.125
	<i>RK2</i> .....	0.25978	— 0.12164	— 0.12028
	<i>Polygonale</i> .....	0.30355	— 0.09627	— 0.09627
	<i>Différences finies</i> ....	0.25149	— 0.11762	— 0.11762
	<i>Extrapolation</i> .....	0.19408	— 0.17900	— 0.17393
200 itérations	<i>RK2</i> .....	0.25490	— 0.12314	— 0.12012
	<i>Polygonale</i> .....	0.28976	— 0.10593	— 0.10121
	<i>Différences finies</i> ....	0.25249	— 0.11751	— 0.12081
	<i>Extrapolation</i> .....	0.200173	— 0.15926	— 0.17357

Début du travail 14 h 12
Fin du travail 14 h 22

IV. CONCLUSIONS

Il semble d'après ces résultats succincts (sans présumer de résultats sur un exemple plus compliqué) que les méthodes *RK2* et celle des différences finies semblent les plus efficaces. Mais la méthode des Différences finies paraît être d'un usage plus malaisé. La méthode *RK2* semble être la plus intéressante. D'autre part l'emploi de l'I.B.M. 704, limite les possibilités de réduire le pas et par suite d'obtenir de meilleurs résultats.

Je tiens, pour terminer, à remercier vivement M. de POSSEL et M. LIONS pour tout l'appui, et les conseils qu'ils ont bien voulu me donner, ainsi que l'Institut Blaise-Pascal qui m'a permis de mener à bien les différents tests de calcul.



