Journal de la société statistique de Paris

Antoine Frachot
Christian Gourieroux

L'économétrie des modèles dynamiques : avantages et limites des modèles ARCH

Journal de la société statistique de Paris, tome 133, nº 4 (1992), p. 53-64
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1992__133_4_53_0>

L'ÉCONOMÉTRIE DES MODÈLES DYNAMIQUES : AVANTAGES ET LIMITES DES MODÈLES ARCH

par Antoine FRACHOT et Christian GOURIEROUX
(ENSAE, CREST)

Les modèles ARCH : autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques, ont été introduits récemment dans le but de mieux analyser les séries financières et monétaires. L'article de base de R. Engle est ainsi paru en 1982 dans la revue *Econometrica.* Comme tout nouvel outil statistique, cette approche doit être étudiée en distinguant ses divers éléments : le modèle dynamique sous-jacent, les procédures d'inférence qui permettront d'ajuster modèle et séries réelles, de faire les tests d'hypothèses ou de répondre aux problèmes de prévision, et les divers logiciels, qui rendront plus ou moins simple la mise en œuvre pratique de ces procédures.

Cette approche doit aussi être étudiée en fonction des diverses utilisations potentielles au domaine financier : analyse descriptive de séries de rendements, de taux de change..., détermination de prévisions de tendance, de risque... et étude des prix qui s'en déduisent (comme ceux des options), tests de théories financières (comme les conditions d'efficience de marché, les conditions d'équilibre type CAPM), recherche de facteurs...

Ces problèmes sont évidemment classiques et étaient analysés selon des procédures habituellement fondées sur des modélisations linéaires de la dynamique (modèles autorégressifs-moyennes mobiles). L'intérêt des modèles ARCH ne sera important que si l'approche apporte plus que les procédures préexistantes, soit qu'elle permette d'affiner les interprétations, soit même de corriger des conclusions, qui étaient en fait biaisées.

1. Dynamique linéaire et dynamique non linéaire

Depuis la mise en place du logiciel de Box et Jenkins, les séries temporelles sont généralement étudiées à partir de modèles dits ARMA, autorégressifs-moyennes mobiles. Ces modèles consistent à exprimer la valeur présente de la série Y_t comme une fonction linéaire de ses valeurs passées Y_{t-1}, Y_{t-2}... à laquelle s'additionne un bruit :

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + \ldots + a_p Y_{t-p} + \ldots + u_t , \tag{1}$$

avec $$E(u_t) = 0,\ V(u_t) = \sigma^2,\ \mathrm{Cov}(u_t, u_{t+h}) = 0,\ h \neq 0.$$

Ces formulations présentent le double avantage d'être simples à mettre en œuvre (à cause de l'aspect linéaire, qui facilite à la fois l'estimation et les calculs de prévision) et de posséder d'importantes propriétés de robustesse. En effet même si la véritable dynamique sous-jacente n'est pas linéaire, les prévisions des valeurs Y_t, et plus généralement de toutes les fonctions linéaires de ces valeurs, sont non biaisées. Ainsi une erreur de spécification éventuelle sur la dynamique n'a pas d'effet trop important au niveau de ces prévisions.

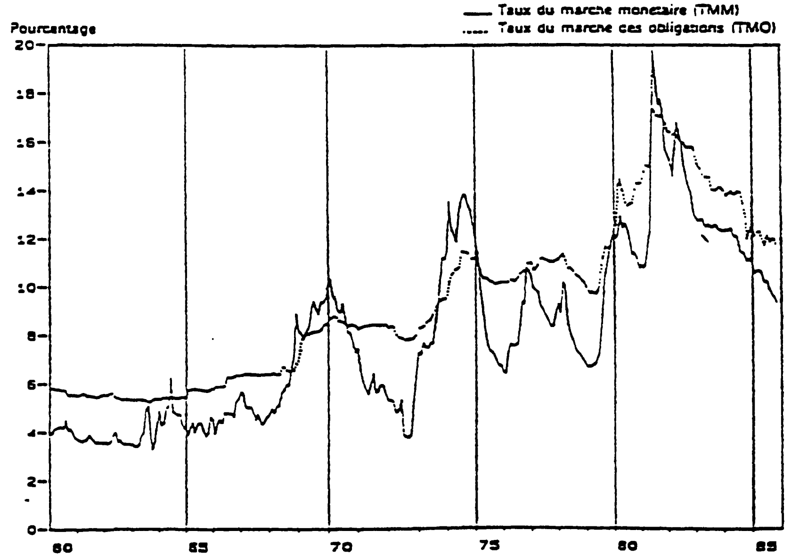
La question fondamentale est évidemment de savoir si en pratique nous ne nous sommes intéressés qu'à des prévisions de telles fonctions linéaires ou si nous le sommes aussi dans des prévisions de fonctions non linéaires des observations, qui, elles, pourraient être fortement biaisées si la dynamique (1) n'est pas exacte. La réponse est malheureusement affirmative.

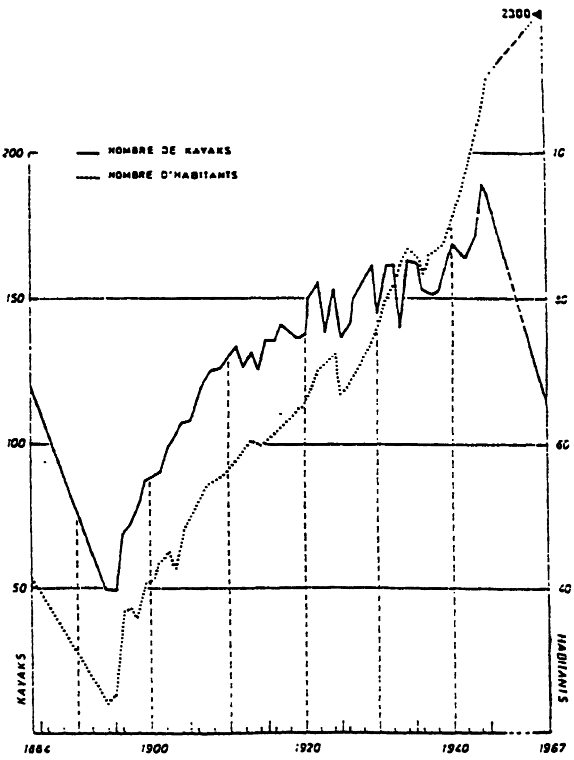
Ainsi nous sommes souvent amenés à évaluer des variances ou des variances conditionnelles, c'est-à-dire à prévoir Y_t^2 : ceci se produit lorsqu'on souhaite déterminer la volatilité de la date t (variance de Y_t sachant l'information disponible à la date $t-1$, quantité à la base des calculs classiques de risque), lorsqu'on recherche des intervalles de prévision, lorsqu'on effectue des tests (la statistique de student comportant un terme de variance au dénominateur). Toutes ces statistiques et les calculs financiers qui s'en déduisent (évaluation des bétas, détermination des facteurs, recherche des portefeuilles optimaux, tests de l'hypothèse de marche aléatoire) seront alors erronés, s'il existe une dynamique non linéaire sous-jacente.

Il en est de même des questions liées à la détermination et à l'analyse des cycles, qui font intervenir des prévisions de $|Y_t - Y_{t-p}|^2$ par exemple, où p désigne la périodicité.

Que dire alors des séries financières disponibles ? Peut-on ou non penser qu'elles correspondent à des dynamiques linéaires ? En fait l'étude de quelques graphiques (voir figures 1 et 2) indique clairement la présence de phénomènes non linéaires : variabilité non constante, présence de cycle sur l'évolution à moyen terme de la série, mais aussi sur celle de la volatilité, durées des phases de croissance sensiblement différentes des durées de phase de décroissance, accroissement de volatilité indiquant un prochain retournement de tendance...

TAUX DU MARCHÉ MONÉTAIRE AU JOUR LE JOUR
ET TAUX DE RENDEMENT DES OBLIGATIONS DU SECTEUR PUBLIC





Evolution du rapport du nombre d'habitants au nombre de kayaks depuis 1884.

2. Les modèles ARCH

Le modèle initial introduit par Engle (1982) avait une structure assez précise. A titre d'exemple nous donnons ci-dessous une telle structure avec des ordres de retard faibles :

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + u_t, \tag{2}$$
$$\underset{t-1}{E}\, u_t = \underset{t-1}{V}\, u_t = h_t = b_0 + b_1 u_{t-1}^2,$$

écritures dans lesquelles espérance et variance sont évaluées conditionnellement à l'information disponible en $t-1$, ici Y_{t-1}, Y_{t-2}... Comparé aux modèles autorégressifs usuels, on retrouve une formulation linéaire de la prévision de Y_t supposée égale à $a_0 + a_1 Y_{t-1}$; en revanche on permet à l'erreur d'avoir un ordre de grandeur fonction des valeurs passées ; on prend ainsi directement en compte un phénomène d'évolution *endogène* de ces volatilités.

En fait ce type de formulation est rapidement apparu trop restrictif à la fois pour atteindre une bonne adéquation entre modèle statistique et théorie financière, et entre modèle statistique et séries réelles. Ainsi il fut nécessaire d'introduire les formulations ARCH-M (ARCH in mean) (Engle-Lilien-Robbins (1987)) du type :

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 h_t + u_t, \tag{3}$$
$$\underset{t-1}{E}(u_t) = 0,\ \underset{t-1}{V}(u_t) = h_t = b_0 + b_1 u_{t-1}^2,$$

de façon à inclure explicitement la possibilité de prime de risque (aspect théorique) et de permettre d'utiliser la volatilité comme indicateur avancé de la tendance (aspect prévision sous-jacent à certaines méthodes chartistes (voir Lofton (1986)).

Par ailleurs la forme quadratique de la volatilité est souvent apparue inadaptée au niveau des séries réelles, vraisemblablement à cause de certains phénomènes de seuils : les vitesses d'évolution peuvent être différentes en période de hausse et en période de baisse. Ceci a conduit à introduire des formulations dans lesquelles moyenne et variance conditionnelles ont des formes plus souples. Ces modèles sont du type :

$$Y_t = g_0(\underline{Y_{t-1}}) + h_0(\underline{Y_{t-1}})\, \varepsilon_t, \tag{4}$$
$$\underset{t-1}{E}\, \varepsilon_t = 0,\ \underset{t-1}{V}\, \varepsilon_t = 1,$$

où g_0 et h_0 sont des fonctions non linéaires des valeurs passées Y_{t-1}, Y_{t-2}... En pratique la forme de ces fonctions n'est pas spécifiée et soit on applique directement des approches non paramétriques d'estimation de g_0 et h_0 (Pagan-Schwert (1990)), soit on approche ces fonctions par des classes assez larges de fonctions simples : fonctions en escalier ou fonctions linéaires par morceaux (Gourieroux-Monfort (1992), Rabemananjara-Zakoïan (1991)).

A titre d'illustration nous donnons ci-après des résultats d'estimations effectuées à partir d'observations de la modification relative du taux de change franc-dollar avec un nombre de retards égal à 2. La fonction g_0 y apparaît non significative, ce qui correspond à la condition de marche aléatoire. La fonction h_0 a la forme ci-dessous, qui présente une forte asymétrie et diffère sensiblement de la modélisation parabolique utilisée dans les modèles ARCH initiaux.

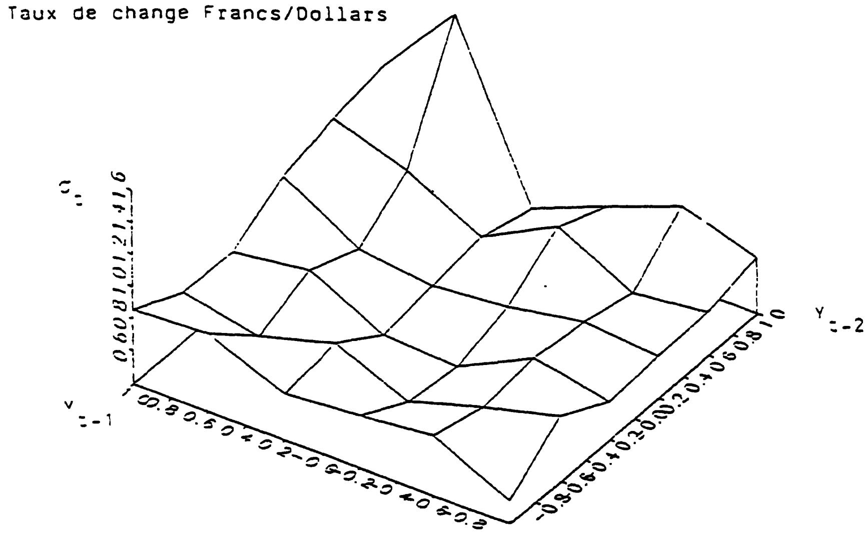


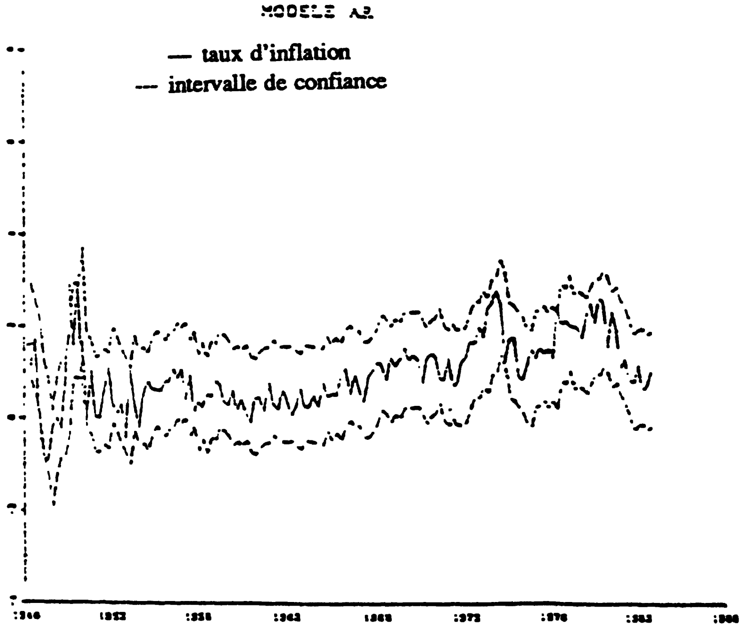
Figure 3 : Forme de la volatilité pour la modification du taux de change

3. Utilisations descriptives

3.1. Intervalles de prévision

A un niveau descriptif la principale différence entre modélisation ARMA et modélisation ARCH, apparaît lorsqu'on compare les intervalles de prévision. En pratique les deux approches conduisent à des valeurs ajustées proches, mais la longueur de l'intervalle est fixée dans le premier cas, alors qu'elle peut dépendre du passé dans le second. La figure 4 ci-dessous (Bollerslev (1988)) où sont données les formes des deux types d'intervalles de prévision sur la modification de l'indice des prix américains montre clairement ce phénomène.

Retenir l'une ou l'autre des approches peut alors avoir des répercussions directes au niveau financier. Supposons à titre d'exemple que nous soyons intéressés par des arbitrages entre un actif risqué et un actif non risqué. Si les arbitrages sont effectués en fonction des positions des bornes de l'intervalle de prévision de la rentabilité de l'actif risqué par rapport à la rentabilité sans risque, nous voyons que les stratégies d'intervention pourront alors être assez différentes (voir figure 5).



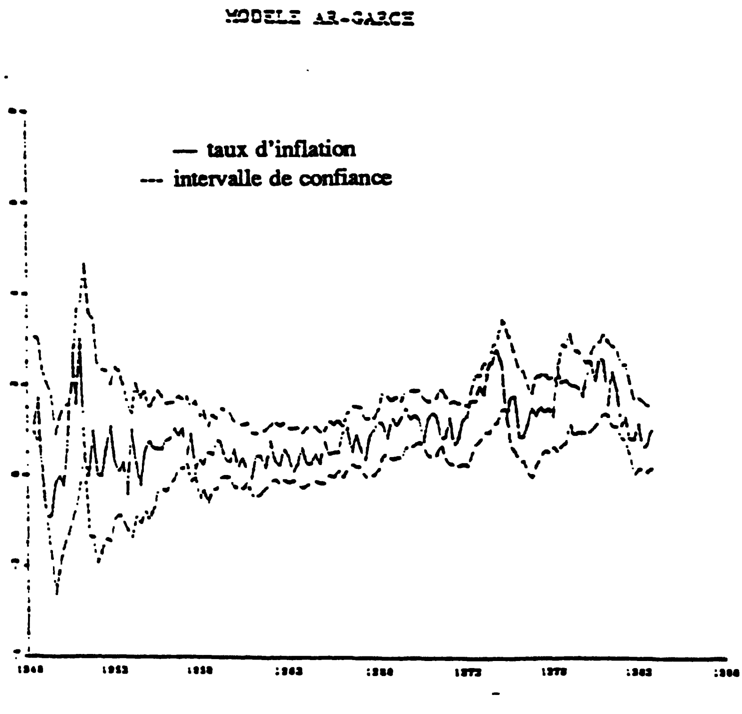


Figure 4 : Intervalles de prévision

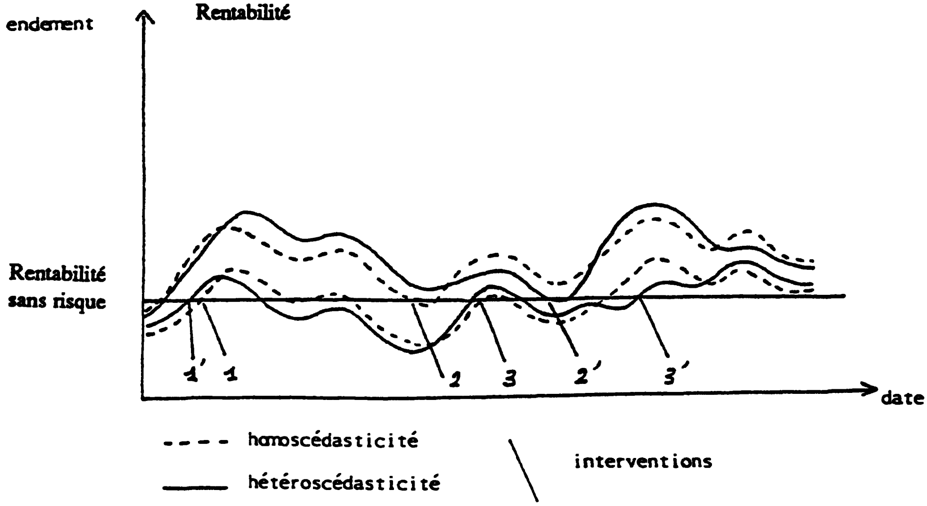


Figure 5 : Interventions

3.2. La volatilité comme indicateur avancé

Nous avons déjà signalé l'intérêt d'utiliser la volatilité comme indicateur avancé d'un changement de régime dynamique. Afin d'illustrer ce point et en même temps de montrer que les modèles de type ARCH sont applicables non seulement aux séries financières et monétaires, mais aussi à l'analyse de diverses séries suffisamment erratiques, nous considérons ci-dessous un graphique moyenne-variance correspondant à la période de la Nouvelle Politique Economique en URSS et à la série des prix agricoles (Gouriéroux-Peaucelle (1991)). On y remarque immédiatement les changements de régimes : période de libéralisation économique avec augmentation de l'inflation et volatilité à peu près constante, et période de reprise en main sous-jacente de l'économie, où les ruptures vont porter à la fois sur les deux moments conditionnels. En fait, il paraît assez général que les premiers effets d'une augmentation des contrôles se fassent d'abord sentir sur les résumés de court terme : volatilités, corrélations, et non sur ceux de moyen terme.

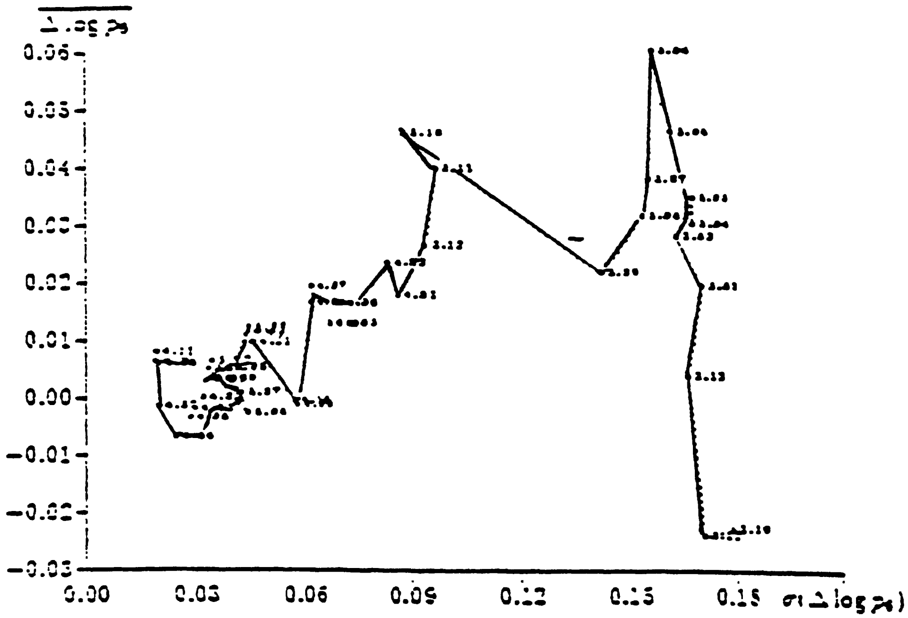


Figure 6 : Graphique moyenne-variance – Evolution des prix agricoles URSS 1921-1929

3.3. Effet de Kurtosis

Les modèles ARCH sont définis à partir de la loi conditionnelle et insistent donc beaucoup sur les résumés instantanés. Il est cependant usuel de déterminer aussi des résumés historiques : rendement moyen, variabilité des rendements ou distribution empirique de ceux-ci évalués en faisant des calculs empiriques par sous-périodes. Il s'agit alors de résultats relatifs à la loi marginale. Il est connu que de telles approches conduisent à trouver des lois présentant de fortes queues de distribution, c'est-à-dire où les grandes valeurs sont surpondérées par rapport aux petites valeurs. Ceci empêche notamment de faire l'hypothèse de normalité sur cette loi marginale. La kurtosis qui sert généralement pour mesurer cet effet et qui vaut 3 dans le cas de la loi normale peut en effet atteindre des valeurs sensiblement plus élevées de l'ordre de 8-12 pour un grand nombre de séries de rentabilités ou de taux de change (voir Taylor (1985)).

Une solution proposée dans le passé consistait à sortir du cadre normal traditionnel en introduisant d'autres formes de lois, de type loi de Levy. Les modèles hétéroscédastiques vont en fait apporter une autre solution. En effet même si les lois conditionnelles sont normales, la loi marginale ne l'est plus s'il y a hétéroscédasticité conditionnelle et surtout ce phénomène induit une augmentation des queues de distributions (voir figure 7). Ainsi l'effet de kurtosis apparaît comme résultant d'une agrégation temporelle de la dynamique. Il s'agit d'une interprétation nouvelle et intéressante, car elle permet de comprendre pourquoi les effets de kurtosis étaient d'importances différentes selon que les études étaient menées sur données journalières, hebdomadaires ou mensuelles.

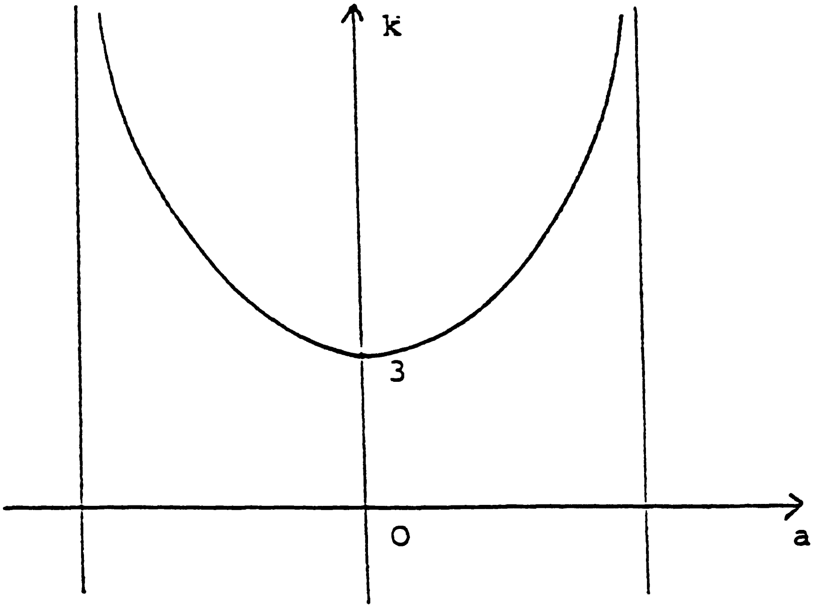


Figure 7 : Effet de Kurtosis pour un modèle ARCH(1)

$$Y_t = u_t,\ V_{t-1}\, u_t = c + a\, u^2_{t-1}$$

4. Utilisations structurelles

4.1. Tests

Les diverses théories financières peuvent évidemment être testées dans le cadre de modèles dynamiques descriptifs. Comme nous l'avons signalé les résultats de ces tests peuvent être sensiblement différents selon qu'on suppose ou non a priori qu'il y a homoscédasticité conditionnelle. Considérons par exemple les tests de marche aléatoire, ou plus simplement des tests de bruit blanc sur la série des accroissements. Ces tests sont habituellement fondés sur la statistique de Box-Pierce (ou portmanteau), qui consiste à calculer la somme des carrés des corrélations estimées $\sum_{h=1}^{H} \hat{\rho}_h^2$ pour divers décalages et à comparer à un seuil critique déduit d'une loi du khi-deux. En fait cette démarche repose fortement sur l'hypothèse d'homoscédasticité conditionnelle. Lorsque celle-ci n'est pas satisfaite, on montre qu'il faut corriger de l'hétéroscédasticité à la fois la statistique de test et le seuil critique (Gouriéroux (1992)). Cette correction est importante, puisqu'un nombre significatif de séries, qui paraissaient satisfaire la condition de marche aléatoire avec le test usuel, ne la satisfont plus lorsque l'effet de volatilité est pris en compte.

4.2. Recherche de facteurs dynamiques

Il existe en théorie financière diverses notions de facteurs. De façon simplifiée on peut distinguer deux grandes notions : des facteurs dans la direction actifs financiers, des facteurs dans la direction temporelle. La première notion est celle sous-jacente aux procédures d'élimination du risque par diversification et suppose un grand nombre d'actifs (Chamberlain-Rothschild (1983)). La seconde notion traduit l'idée que l'examen simultané de, disons quarante séries, peut du point de vue dynamique se ramener à celui d'un nombre sensiblement plus petit de séries sous-jacentes. Les modèles ARCH étendus au cadre multivarié vont assez bien se prêter à ce type d'études (voir e.g. Diebold-Nerlove (1989), King-Santana-Wadhwani (1990)). Ils vont par ailleurs permettre d'obtenir des interprétations financières des facteurs dynamiques. Ainsi Gouriéroux-Monfort-Renault (1991) s'intéressent à la construction de portefeuilles efficients, dans un contexte moyenne-variance. Le portefeuille optimal a une composition fonction des gains moyens et du risque qui varie dans le temps. On peut se demander dans quels cas il est toujours combinaison de quelques portefeuilles de composition stable dans le temps, déduits de ces actifs. On peut établir qu'il y a équivalence entre existence de facteurs dynamiques et existence d'une base stable de portefeuilles efficients.

5. Mise en œuvre des modèles ARCH

5.1. Le cas univarié

Les modèles ARCH ont été introduits pour répondre à un certain nombre de besoins de l'Econométrie de la Finance, mais aussi pour ne pas trop s'écarter des méthodologies connues. Les structures s'apparentent en général à deux modèles ARMA successifs, le premier portant sur la série elle-même et donnant la forme de la moyenne conditionnelle, le second portant sur le carré du résidu et donnant la forme de la variance conditionnelle (on parle alors de modèles GARCH : generalized ARCH). On conçoit donc qu'il existe des méthodes simples d'estimation en deux étapes ne demandant que les logiciels usuels de type Box-Jenkins.

Ces méthodes utiles dans la phase de spécification du modèle peuvent cependant être peu précises. Une estimation plus fine est généralement menée en utilisant une démarche globale du type maximum de vraisemblance. Il suffit alors de disposer d'un logiciel disposant de ce type de méthode (GAUSS, SAS, NAG...) ou même d'utiliser quelques logiciels spécifiques aux modèles ARCH, introduits par exemple dans T.S.P.

5.2. Le cas multivarié

En revanche les modèles se révèlent moins maniables dans le cas multivarié, pourtant le plus prometteur du point de vue des applications. Ceci résulte de la rapide inflation du nombre de paramètres lorsqu'on augmente le nombre de séries étudiées, de l'existence d'une dynamique non linéaire, qui empêche l'utilisation directe des algorithmes récursifs du type filtre de Kalman, de la nécessité d'étudier les facteurs sous-jacents, donc de prendre en compte l'influence de séries non observées.

Ces difficultés techniques devraient cependant être résolues dans les 2-3 ans et on peut penser que les approches s'appuieront sur des modifications du filtre de Kalman (on pourra consulter Dierbold-Nerlove (1989), Gourieroux (1992) chap. IV, Halmiton (1989) et le programme modifié de Harvey : STAMP).

6. Utilisation théorique

Il faut, pour terminer, insister sur l'intérêt des modèles ARCH d'un point de vue de probabilité théorique, ceci pouvant également, à plus long terme, permettre de résoudre ou de mieux comprendre certaines difficultés techniques rencontrées dans l'étude des séries financières. Les modèles ARCH constituent en effet l'une des rares classes de modèles dynamiques non linéaires, qui peut être explicitement analysée. Ces modèles vont donc servir de bases d'expérience pour de nouvelles méthodes statistiques, comme, par exemple les estimations simulées (Duffie-Singleton (1989)), fondées sur des estimations des valeurs manquantes des séries financières) ; ils vont aussi servir pour approcher des modèles importants, mais moins directement utilisables sur les données disponibles. Les études sur les liens entre modèles ARCH et modèles en temps continu avec volatilité stochastique sont de ce type (Nelson (1987)).

REFERENCES

BOLLERSLEV T. (1986) "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *J. of Econometrics*, 307-327.

CHAMBERLAIN G., ROTHSCHILD H. (1983) "Arbitrage, Factor Structure and Mean Variance Analysis on Change Asset Markets", *Econometrica*, 1281-1301.

DIEBOLD F., NERLOVE M. (1989) "The Dynamic of Exchange Rate Volatility : A Multivariate Latent Factor ARCH Model", *J. of Applied Econometrics*, 1-22.

DUFFIE D., SINGLETON R. (1989) *Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices*, Working Paper.

ENGLE R. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 987-1008.

ENGLE R., LILIEN D., ROBBINS R. (1987) "Estimating Time Varying Risk Premium in the Term Structure : the ARCH-M Model", *Econometrica*, 391-407.

GOURIEROUX C. (1992) "Models ARCH : Applications Financières", *Economica*, 400.

GOURIEROUX C., MONFORT A. (1992) "Qualitative Threshold ARCH Models", *J. of Econometrics*, 52, 159-200.

GOURIEROUX C., MONFORT A., RENAULT E. (1991) *Dynamic Factor Models*, CREST D.P.

GOURIEROUX C., PEAUCELLE I. (1991) *Analyse statistique des transitions : l'exemple de la Nouvelle Politique Économique en URSS 1922-1927*, à paraître dans Economie et Prévision.

HAMILTON J. (1989) "A New approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle", *Econometrica*, 357-384.

HARVEY A., RUIZ E., SHEPARD N. (1991) *Modelling Volatility : Some Alternatives to ARCH*, London School of Economics.

KING M., SANTANA E., WADHWANI S. (1990) *A Heteroscedastic Factor Model of Asset Returns and Risk Premia with Time Varying Volatility : An Application to Sixteen World Stock Markets*, London School of Economics.

LOFTON T. (1986) *Trading Tactics : A Livestock Futures Anthology*, Chicago Mercantile Exchange.

NELSON D. (1987) *Conditional Heteroskedasticity in Asset Return : A New Approach*, M.I.T. D.P..

PAGAN A., SCHWERT W. (1990) "Alternative Models for Conditional Stock Volatility", *J. of Econometrics*, 267-290.

RABEMANANJARA R., ZAKOÏAN J.M. (1992) *Threshold GARCH models and Asymmetries in Volatility*, à paraître dans J. of Applied Econometrics.

TAYLOR S. (1985) *Modelling Financial Time Series*, North-Holland.