

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

FERIDOUN SADAT-AGHILI

Instabilité hiérarchique d'un ensemble de données économiques et applications

Journal de la société statistique de Paris, tome 128 (1987), p. 30-42

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1987__128__30_0

© Société de statistique de Paris, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INSTABILITÉ HIÉRARCHIQUE D'UN ENSEMBLE DE DONNÉES ÉCONOMIQUES ET APPLICATIONS

Feridoun SADAT-AGHILI
Université de Genève

La notion de hiérarchies semblables permet de définir la stabilité d'une famille à un paramètre de hiérarchies. A l'aide de considérations géométriques on caractérise les points stables et instables de cette famille. On applique les résultats précédents à l'évolution des taux de change des principales monnaies vis-à-vis du dollar. Ainsi, les changements de structure comme les dévaluations, réévaluations de certaines monnaies correspondent aux points instables de la famille de hiérarchie associée à cette évolution.

The notion of similar hierarchy enables us to define the stability of a one parameter family. The geometrical considerations allow to characterize stable and unstable points of this family. We apply the previous results to main currencies exchange rate evolution towards U.S. dollar. Thus the changes of structures such as devaluations and revaluations of some currencies correspond to unstable points of the hierarchy family associated with this evolution.

INTRODUCTION

Dans ce travail on étudie l'évolution des hiérarchies associées à un ensemble de données économiques qui dépendent du temps. On dira que deux hiérarchies sont semblables, si elles admettent la même représentation mais pas nécessairement le même indice. Cette notion permet en particulier de calculer la distance entre deux hiérarchies semblables.

Au paragraphe 3, on donne une interprétation géométrique des hiérarchies semblables, et cela nous permet de mettre en évidence la convexité des hiérarchies semblables ainsi que la propriété d'ouverture des hiérarchies semblables binaires.

Les considérations précédentes, nous permettent de définir la stabilité d'une famille à un paramètre de hiérarchies et de caractériser les points instables de cette famille.

Dans le paragraphe 6, on étudie le cas des suites discrètes de hiérarchies, et on utilise les résultats précédents, en approximant les suites discrètes par les familles continues de hiérarchies, on obtient ainsi un algorithme de détection des points instables. Pour obtenir des prévisions de hiérarchies, on adopte, suivant la nature des données économiques, des processus stochastiques ou des méthodes de régression linéaire.

Afin d'illustrer les propriétés précédentes, on étudie l'évolution des hiérarchies associées aux taux de change des principales monnaies vis-à-vis du dollar. On remarque ainsi que les modifications dans la structure des monnaies (comme par exemple les dévaluations ou réévaluations ou flottement de certaines monnaies) correspondent à des instabilités hiérarchiques.

On remarque aussi que dans certains cas les classifications associées à l'ensemble des monnaies sont modifiées aux points instables. Enfin en utilisant un programme de régression linéaire on obtient des prévisions à court terme des classifications hiérarchiques.

1. RAPPEL DES NOTIONS DE CLASSIFICATION HIÉRARCHIQUE, ET DE LA HIÉRARCHIE DU SAUT MINIMUM

Soit X un ensemble fini, une hiérarchie H sur X , est un ensemble de sous-ensembles de X tel que :

- i) $X \in H$ et $\Phi \in H$
- ii) Si $x \in X$, alors $\{x\} \in H$
- iii) Quels que soient h et h' éléments de H , on a :
 $h \subset h'$, ou $h' \subset h$, ou $h \cap h' = \Phi$.

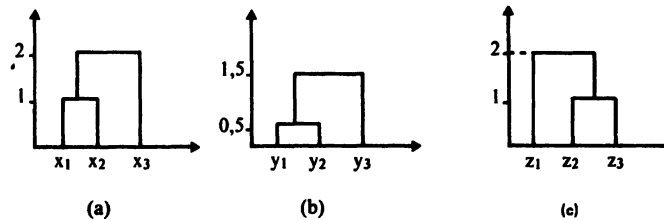
En particulier la hiérarchie H est indicée, s'il existe une application f de H dans $\mathbb{R}$, compatible avec la structure de hiérarchie : $h \subset h'$ (h et $h' \in H$) implique $f(h) < f(h')$, et $f(\{x\}) = 0$, pour $x \in X$.

A chaque hiérarchie indicée, on peut associer un arbre ainsi qu'une ultramétrie cf. [1], en particulier l'ensemble des hiérarchies indicées sur X , est en bijection avec l'ensemble des ultramétries définies sur X .

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons la hiérarchie du « saut minimum » définie par Jardine et Sibson [5] et Roux [8]. On dispose, en particulier de plusieurs algorithmes de construction pour cette hiérarchie.

2. HIÉRARCHIES SEMBLABLES

Considérons les hiérarchies du saut minimum (H_X, f_X) et (H_Y, f_Y) construites sur les ensembles à n éléments X et Y , nous dirons que les hiérarchies (H_X, f_X) et (H_Y, f_Y) sont semblables si elles admettent la même représentation, avec des indices pouvant être différents l'exemple suivant illustre de façon simple la propriété précédente.



Exemple

Avec la définition précédente les hiérarchies (a) et (b) sont semblables, mais pas (a) et (c) ni (b) et (c).

On peut donner une définition plus rigoureuse des hiérarchies semblables en utilisant la bijection ϕ de X dans Y ($X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$, $Y = \{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$) telle que $\phi(x_i) = y_i$. On a le lemme suivant :

Lemme :

Soit Φ l'application de $P(X)$ dans $P(Y)$, ($P(X)$ et $P(Y)$ sont l'ensemble des sous-ensembles de X et Y respectivement) définie par $\Phi(\{x_i\}) = \phi(\{x_i\})$, si H_X est une hiérarchie sur X , alors $\Phi(H_X)$ est une hiérarchie sur Y .

Démonstration :

Soit y_i un élément de Y , comme ϕ est une bijection de X dans Y , alors il existe $x_i \in X$ tel que $y_i = \phi(x_i)$ donc $\{y_i\} \in \Phi(H_X)$. De plus $Y = \phi(X) \in \Phi(X) \in \Phi(H_X)$ et $\emptyset = \Phi(\emptyset) \in \Phi(H_X)$.

Soient h'_1 et h'_2 deux éléments de $\bar{\Phi}(H_X)$, alors on a h_1 et h_2 de H_X tel que $h'_i = \Phi(h_i)$. Comme H_X est une hiérarchie on a $h_1 \subset h_2$ ou $h_2 \subset h_1$ ou $h_1 \cap h_2 = \emptyset$. Par conséquence $\bar{\Phi}(h_1) \subset \bar{\Phi}(h_2)$ ou $\bar{\Phi}(h_2) \subset \bar{\Phi}(h_1)$ ou $\bar{\Phi}(h_1) \cap \bar{\Phi}(h_2) = \emptyset$. Ceci entraîne donc que $\bar{\Phi}(H_X)$ est une hiérarchie sur Y .

Définition 2.1

Soient (H_X, f_X) et (H_Y, f_Y) deux hiérarchies, sur X et Y respectivement, nous dirons que ces deux hiérarchies sont semblables si $\bar{\Phi}(H_X) = H_Y$.

La définition 2.1 permet en particulier de calculer la proximité de deux hiérarchies semblables, en effet si $f_X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $f_Y = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ sont les indices associés à H_X et H_Y , on définit la distance entre H_X et H_Y par :

$$d^2(f_X, f_Y) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$$

Définition 2.2

Soit $\alpha > 0$ un nombre réel, les hiérarchies (H_X, f_X) et (H_Y, f_Y) sont α -semblables si elles sont semblables, et si de plus $d^2(f_X, f_Y) \leq \alpha^2$. Il est clair que la définition 2.2 implique la définition 2.1 et permet de mesurer de façon plus précise la similitude entre deux hiérarchies.

3. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES HIÉRARCHIES SEMBLABLES

Afin d'obtenir une interprétation géométrique des hiérarchies semblables, on définit l'espace H_n des hiérarchies indicées du saut minimum (H_X, f_X) , construites sur les ensembles $X = \{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$ avec $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

A chaque élément de H_n , on fait correspondre l'unique vecteur x de $\mathbb{R}^n$ défini par $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et on désigne par O^n l'image de H_n par cette application.

Dans O^n , on définit la relation d'équivalence suivante : deux vecteurs x et y de O^n sont équivalents, si et seulement si les hiérarchies (H_X, f_X) et (H_Y, f_Y) sont semblables. On démontre facilement que la relation précédente, est bien une relation d'équivalence.

Le quotient $\hat{O}^n$, de O^n par cette relation d'équivalence sera constitué d'un nombre fini de classes d'équivalences $A_1, \dots, A_p$, car le nombre de hiérarchies semblables distincts sur un ensemble à n éléments est fini (ou ce qui revient au même : le nombre de topologie ultramétrique sur un ensemble à n éléments est fini). On a le résultat suivant :

Proposition 3.1

Chaque classe d'équivalence A_i , ($1 \leq i \leq p$) est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Si x et y sont deux éléments de A_i , il suffit de démontrer que $\lambda x + (1-\lambda)y$, ($0 \leq \lambda \leq 1$) appartient à A_i . A x et y on fait correspondre les hiérarchies (H_x, f_x) et (H_y, f_y) respectivement, ces hiérarchies étant semblables on sait, cf. [9], que la hiérarchie du saut minimum

$$(H_{\lambda x + (1-\lambda)y}, f_{\lambda x + (1-\lambda)y})$$

construite sur l'ensemble $\lambda X + (1-\lambda)Y = \{\lambda x_i + (1-\lambda)y_i; x_i \in X, y_i \in Y\}$ est semblable à H_X et H_Y .

Comme A_i est la classe d'équivalence de x et y , on a $\lambda x + (1-\lambda)y \sim x \sim y$ et $\lambda x + (1-\lambda)y$ appartient à A_i .

Remarque

Si x n'est pas équivalent à y , il existe alors des valeurs de λ tel que $\lambda x + (1-\lambda)y$ ne soit pas équivalent à x , ceci permet en particulier d'obtenir un algorithme de détection des points instables.

Exemple 3.1

Si on prend $n=3$, O^3 est l'ensemble des $x = (x_1, x_2, x_3)$ tel que $0 < x_1 < x_2 < x_3$. On obtient trois classes d'équivalence.

$$A_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \text{ tel que } x_2 - x_1 < x_3 - x_2\}$$

$$A_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \text{ tel que } x_2 - x_1 = x_3 - x_2\}$$

$$A_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \text{ tel que } x_2 - x_1 > x_3 - x_2\}$$

On peut vérifier directement, la convexité des A_i ($1 \leq i \leq 3$), en particulier A_2 est constituée des hiérarchies non binaires, tandis A_1 et A_3 correspondent à des hiérarchies binaires.

Proposition 3.2

Si A_i est une classe d'équivalence des $x \in O^n$ telle que (H_x, f_x) soit une hiérarchie binaire, alors A_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

Si (H_x, f_x) est une hiérarchie binaire, alors pour chaque $1 \leq i \leq n$ on a $x_{i+1} - x_i < x_i - x_{i-1}$ (où $x_{i+1} - x_i > x_i - x_{i-1}$), et ces inégalités restent valables pour chaque hiérarchie (H_y, f_y) avec $y \in A_i$.

Le sous-espace A_i de O^n est donc l'intersection des images réciproques d'ouverts par des applications linéaires continues $x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}$. Donc A_i est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 3.2

En utilisant l'exemple 3.1 on remarque que A_1 et A_3 sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$, mais A_2 est constituée des hiérarchies non binaires et A_2 n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Corollaire 3.2.1

La proposition 3.2 permet d'affirmer que si (H_x, f_x) est une hiérarchie binaire, alors il existe un $\varepsilon > 0$, tel que quel que soit $y = (y_1, \dots, y_n)$ avec $\sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < \varepsilon$ alors la hiérarchie du saut minimum construite sur y est binaire et semblable à (H_x, f_x) .

Corollaire 3.2.2

On peut déterminer la valeur de ε par des considérations géométriques, en effet il suffit de calculer les distances les plus courtes de $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ aux hyperplans $(y_{i+1} - y_i) - (y_i - y_{i-1}) = 0$. Si on pose $a_i = (x_{i-1} - x_i) - (x_i - x_{i-1})$, comme la hiérarchie (H_x, f_x) est binaire, tous les a_i sont différents de zéro.

Posons

$$a_{io} = \inf_{1 < i < n} \{(x_{i+1} - x_i) - (x_i - x_{i-1}); (x_i - x_{i-1})\} \text{ alors pour } \varepsilon < a_{io} \text{ toutes les hiérarchies } (h_y, f_y) \text{ telles}$$

que $\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| < \varepsilon$ sont semblables à (H_x, f_x) .

Dans l'ensemble 3.1. si on choisit $x = (1, 2, 4)$ on obtient

$$(x_3 - x_2) - (x_2 - x_1) = (4 - 2) - (2 - 1) = 1, \text{ alors pour chaque } y = (y_1, y_2, y_3), \text{ avec}$$

$\sup_{1 \leq i \leq 3} |y_i - x_i| < 1$, la hiérarchie (H_y, f_y) est semblable à (H_x, f_x) .

4. STABILITÉ D'UNE FAMILLE À UN PARAMÈTRE DE HIÉRARCHIES

Soit $I = [0, T]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $X_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, $t \in I$, une famille d'ensembles qui dépendent de t .

Dans la suite de ce travail, nous supposons que les fonctions x_i sont continues : $x_i \in C(I, \mathbb{R})$, pour $1 \leq i \leq n$.

On désigne par $(H_t, f_t); t \in I$, les hiérarchies du saut minimum, construites sur les ensembles X_t .

Nous dirons que la famille de hiérarchie $(H_t, f_t)_{t \in I}$ est stable en un point $t_0 \in I$, si au voisinage du point t_0 , la forme de cette hiérarchie ne se modifie pas; de façon plus précise, on a la définition suivante :

Définition 4.1

La famille de hiérarchies $(H_t, f_t)_{t \in I}$ est stable au point $t_0 \in I$, s'il existe un voisinage V_{t_0} de t_0 dans I , tel que pour chaque $t \in I: (H_t, f_t)$ soit semblable à (H_{t_0}, f_{t_0}) .

Les propositions suivantes permettent en particulier de caractériser les points stables et instables d'une famille de hiérarchies.

Lemme 1

Soit t_0 un point d'intersection des courbes $x_i(t)$ et $x_j(t)$, ($i \neq j$ et $1 \leq i, j \leq n$) alors t_0 est un point instable de la famille $(H_t, f_t)_{t \in I}$.

Démonstration

Au point t_0 , l'ensemble X_{t_0} , admet au plus $n-1$ éléments, donc la hiérarchie construite sur X_{t_0} n'est forcément pas semblable à une hiérarchie construite sur un ensemble à n éléments.

Afin de déterminer d'autres points instables se trouvant entre deux points consécutifs d'intersection des courbes $x_i(t)$ et $x_j(t)$ on utilise l'interprétation géométrique du § 3.

On remarque que la correspondance entre l'espace des hiérarchies H_n et le sous-ensemble O^n de $\mathbb{R}^n$, permet d'associer à chaque famille de hiérarchies $(H_t, f_t)_{t \in I}$, une courbe de $C(I, O^n)$.

Ainsi à l'aide des propriétés topologiques de O^n , on peut déterminer les points instables de cette famille.

L'espace O^n étant la réunion des classes d'équivalences $A_1, A_2, \dots, A_p$.

Les points instables apparaîtront chaque fois que la courbe associée aux hiérarchies traversera transversalement les frontières ∂A_i , des A_i , et si A_i est constitué de hiérarchies binaires, on a la propriété suivante :

Proposition 4.1

Soit $(H_t, f_t)_{t \in I}$, une famille de hiérarchies et t_0 un point de I . Si (H_{t_0}, f_{t_0}) est une hiérarchie binaire, alors $(H_t, f_t)_{t \in I}$ est stable au point $t_0 \in I$.

Démonstration

Soit $x(t_0)$ élément de O^n correspondant à la hiérarchie binaire (H_{t_0}, f_{t_0}) , il existe d'après la proposition 3.2, un $\varepsilon > 0$ et une boule $B(x(t_0), \varepsilon)$ dans O^n , tel que pour chaque $x(t)$ appartenant à cette boule, (H_t, f_t) soit binaire.

L'application $t \mapsto x(t)$ de I dans O^n étant continue, il existe un voisinage V_{t_0} de t_0 dans I tel que, $t \in V_{t_0}$ implique que $x(t) \in B(x(t_0), \varepsilon)$. Ceci prouve que t_0 est un point stable de la famille $(H_t, f_t)_{t \in I}$.

Corollaire 4.1

Dans la décomposition de O^n par des classes d'équivalences, $A_1, \dots, A_p$; si A_i est constituée de hiérarchies binaires, alors elle est définie par un ensemble d'inégalités strictes :

$$x_{i+1} - x_j < x_i - x_{i-1} \text{ (ou } x_{i+1} - x_i > x_j - x_{j-1} \text{)}$$

pour $2 \leq i \leq n-1$.

Par contre pour les hiérarchies non binaires, certaines de ces inégalités sont remplacés par des égalités.

Soit $(H_t, f_t)_{t \in I}$ une famille de hiérarchies alors chaque changement strict des inégalités ci-dessus signifie qu'il existe au moins un point instable. En effet si :

$$\begin{aligned} x_{i+1}(t_1) - 2x_i(t_1) + x_{i-1}(t_1) &< 0, \\ \text{et } x_{i+1}(t_2) - 2x_i(t_2) + x_{i-1}(t_2) &> 0, \end{aligned}$$

alors d'après la continuité des $x_i(t)$, il existe au moins un t_0 , tel que $x_{i+1}(t_0) - 2x_i(t_0) + x_{i-1}(t_0) = 0$, et donc que (H_{t_0}, f_{t_0}) est une hiérarchie binaire.

Corollaire 4.2

On représente les distances $d_{ij}(t) = |x_i(t) - x_j(t)|$ par une matrice symétrique : $d(t) = (d_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Les inégalités caractérisant les hiérarchies semblables

$$x_{i+1} - x_i < x_i - x_{i-1} \text{ et } (x_{i+1} - x_i > x_i - x_{i-1})$$

se transforment en $d_{i+1,i} < d_{i,i-1}$ (resp. $d_{i+1,i} > d_{i,i-1}$).

La famille (H_t, f_t) est alors stable dans un intervalle $[t_1, t_2]$ si pour chaque $t \in [t_1, t_2]$, les inégalités entre les éléments des matrices $d(t)$ sont conservées.

Exemple

Si on considère les fonctions $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ et $x_3(t) = t^3$ pour $t \in [2,3]$, on a $d_{12} = t^2 - t$ et $d_{23} = t^3 - t^2$. On a $d_{32} - d_{21} = t^3 - 2t^2 + t = t(t-1)^2 > 0$ pour chaque $t \in [2,3]$ donc $d_{32} > d_{21}$ et la famille des hiérarchies du saut minimum est stable dans l'intervalle $[2,3]$.

5. CAS DES FAMILLES DISCRÈTES DE HIÉRARCHIES

Considérons la famille de hiérarchies (H_k, f_k) construite sur les ensembles X_k ($1 \leq k \leq p$) où $X_k = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$. On construit la famille continue de hiérarchie $X(t)$, en reliant les points $x_i(k)$ et $x_i(k+1)$ par des segments de lignes droites définie par les équations :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= (k+1-t) x_i(k) - (k-t) x_i(k+1) \\ k &\leq t \leq k+1 \end{aligned}$$

En utilisant la remarque de la proposition 3.1, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1

Si les hiérarchies H_k et H_{k+1} sont semblables, alors pour chaque t ; $k \leq t \leq k+1$, la hiérarchie H_t construite sur l'ensemble $X_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, où $x_i(t)$ est le segment de droite reliant $x_i(k)$ à $x_i(k+1)$, est semblable à H_k et H_{k+1} .

Démonstration : Cela résulte de la convexité des hiérarchies semblables, cf. Proposition 3.1

Corollaire 5.1.

Algorithme de détection des points instables de la famille de hiérarchies H_t ,

1. Comparaison des hiérarchies H_k et H_{k+1} , à l'aide des algorithmes classiques de construction des hiérarchies (A.C.P ou voisins réciproques).

2. Si H_k n'est pas semblable à H_{k+1} , alors il existe au moins un point instable entre k et $k+1$. Afin de déterminer les points instables on distingue les cas :

- l'ordre des éléments de H_k est identique à l'ordre des éléments de H_{k+1}
- l'ordre de H_k est différent de l'ordre de H_{k+1} .

On a alors dans le cas a) :

Les points instables s'obtiennent en trouvant les intersections de :

$$x_{i+1}(t) \text{ avec } \frac{1}{2} (x_i(t) + x_{i+2}(t))$$

$$(1 \leq i \leq n-2)$$

Et dans le cas b) :

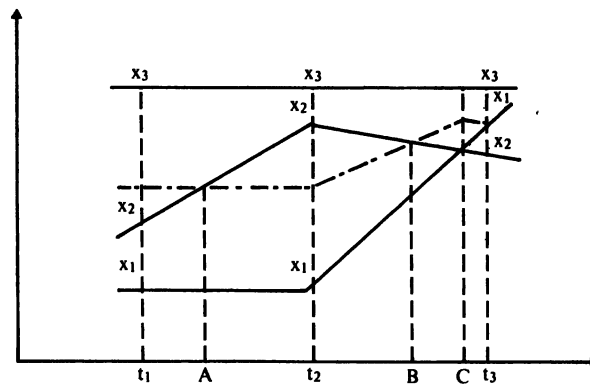
On utilise la proposition 5.1, en déterminant les points d'intersection ; ensuite entre deux points d'intersection on utilise a)

Exemple : Soit $X_t = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}$ avec $t = 1, 2, 3$

$$X_1 = \{1; 2; 4\}$$

$$X_2 = \{1; 3.5; 4\}$$

$$X_3 = \{3.5; 3; 4\}$$



(A, B, C, sont des points instables)

6. PROBLÈMES RELATIFS À LA PRÉVISION D'UNE CLASSIFICATION HIÉRARCHIQUE

Les problèmes de prévision sont souvent liés à la nature des données. Ainsi pour chaque problème, il faut spécifier une méthode adaptée à la structure et à la nature des données.

Dans le cas d'une famille continue de hiérarchies $(H_t, f_t)_{t \in I}$ construite sur les ensembles $X_t = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$, on peut utiliser dans certains cas les processus aléatoires, en considérant chaque $x_i(t)$ comme une variable aléatoire.

Ceci permet de déterminer les valeurs des $x_i(t)$, en dehors d'un intervalle où elles sont observées et ainsi de construire des hiérarchies permettant de classer les données à des instants à l'extérieur des intervalles d'observation.

Dans le cas d'une famille discrète de hiérarchies $(H_k, f_k)_{1 \leq k \leq p}$, sur les ensembles $X_k = \{x_1(k), \dots, x_n(k)\}$, on peut dans certains cas utiliser la régression linéaire sur chaque variable x_i , afin d'obtenir des valeurs de l'ensemble

$$X_{p+1} = \{x_1(p+1), \dots, x_n(p+1)\}$$

et ainsi construire la hiérarchie (H_{p+1}, f_{p+1}) .

7. APPLICATIONS

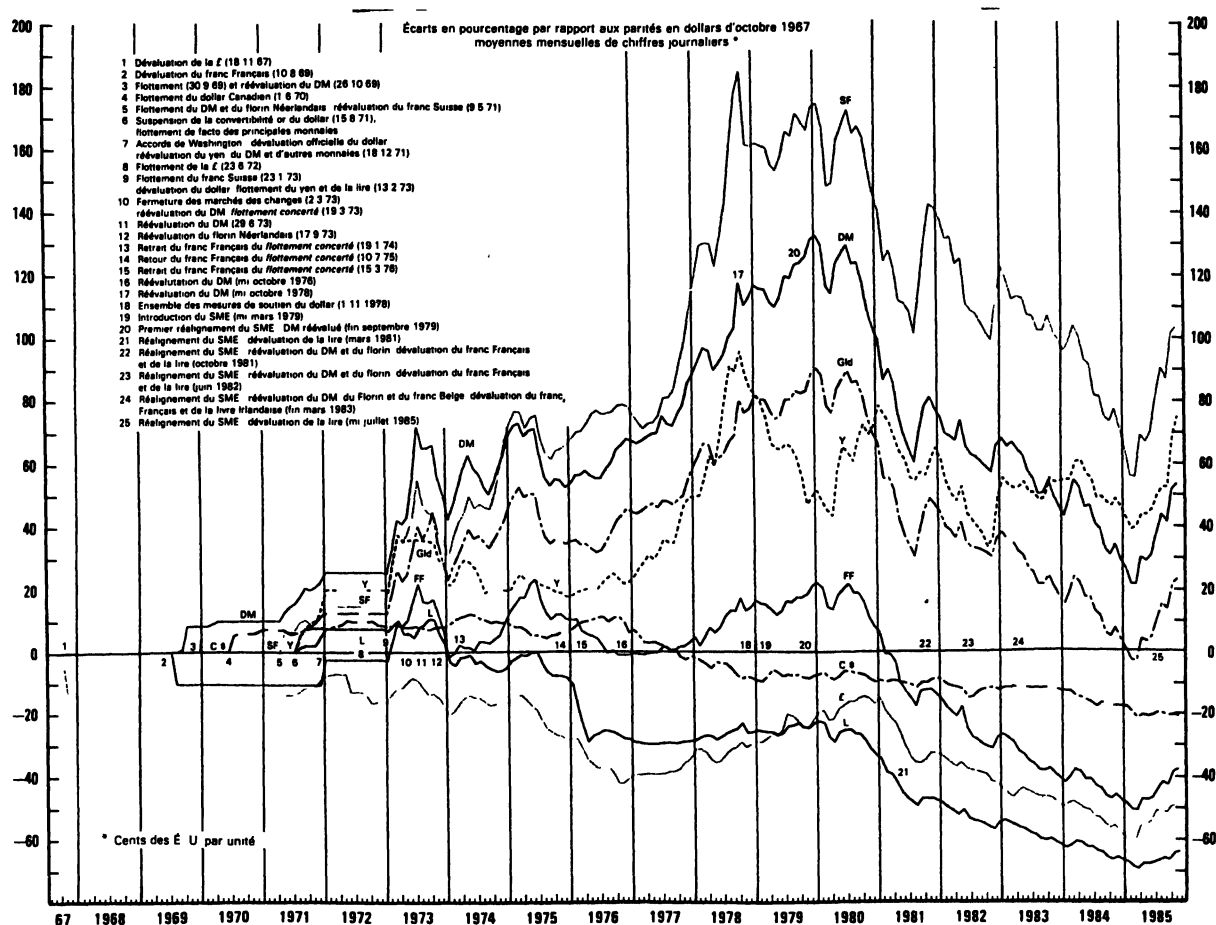
Les méthodes décrites dans les parties 1 à 6 peuvent s'utiliser dans les cas où l'on étudie l'évolution des hiérarchies, associée à un ensemble de données unidimensionnel.

En effet suivant la nature d'un ensemble de données, une instabilité hiérarchique, peut signifier un changement d'état ou de structure des données.

Il est cependant clair, que les résultats obtenus n'ont qu'une valeur indicative, ceci d'ailleurs comme dans la plupart des méthodes d'analyse des données.

Afin d'illustrer certains résultats sur l'instabilité hiérarchique, on étudie, dans cette partie, l'évolution du taux de change des principales monnaies vis-à-vis du dollar;

Les données qui suivent, sont extraites des statistiques de l'O.C.D.E. elles concernent les monnaies : Franc Suisse « FS », Deutsche Mark « DM », Gulden « Gld », le Yen « Y », le Franc Français « FF », le Dollar Canadien « C\$ », la Livre Sterling « £ » et la Lire Italienne « L ».



Dans le paragraphe 7.1 on peut remarquer que les notes 1 à 22 représentent les dévaluations, réévaluations, ainsi que les flottements concertés de certaines monnaies.

On constate que chaque événement de 1 à 22 correspond à des instabilités hiérarchiques, cependant d'autres événements, comme la montée du Yen à partir de 1983, peuvent provoquer des changements de formes dans les hiérarchies.

On peut donc déterminer à l'aide de l'algorithme du § 5 les points instables de cette famille.

Les graphiques 7.2 à 7.7, représentent les hiérarchies associées aux taux de change de janvier 1980 à janvier 1985.

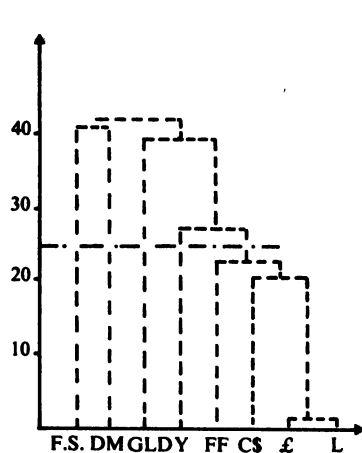


FIG. 7.2 — Janvier 1980

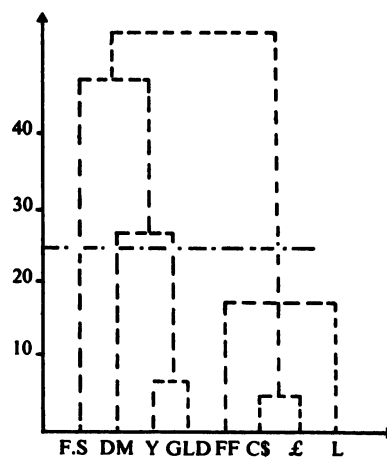


FIG. 7.3 — Janvier 1981

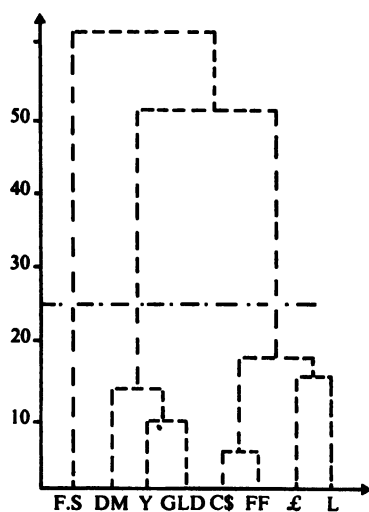


FIG. 7.4. — Janvier 1982

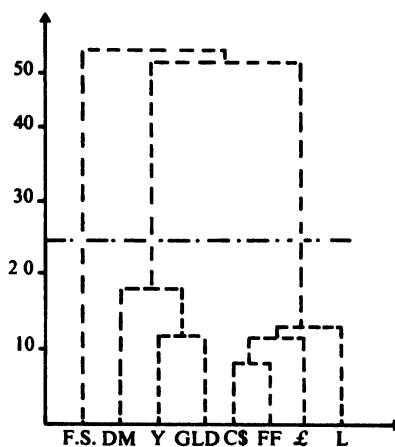


FIG. 7.5. — Janvier 1983

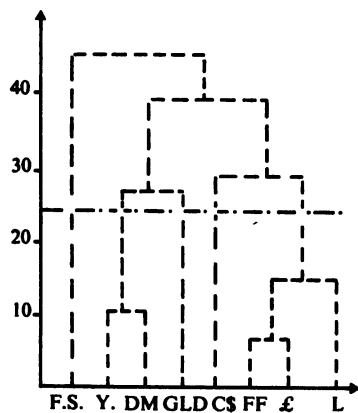


FIG. 7.6 — Janvier 1984

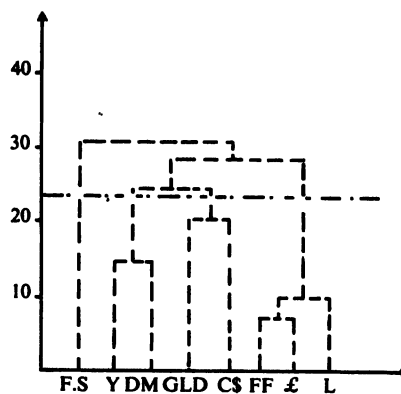


FIG. 7.7. — Janvier 1985

On remarque que les hiérarchies 7-2 à 7-7, ne sont pas semblables, en particulier la remontée du Yen provoque des instabilités à partir de 1983.

On a par contre des hiérarchies semblables sur des périodes restreintes, en effet les hiérarchies associées à janvier, février et mars 1985 sont semblables, on peut en outre mesurer leurs distances par la formule :

$$d^2(f_X, f_Y) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i)^2$$

où : $f_X = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $f_Y = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

Remarque :

La formule $\|f_X\|^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ est une mesure du taux de change des principales monnaies vis-à-vis du dollar. On peut en outre observer qu'une classification en plusieurs classes nous donne les résultats suivants :

TABLEAU 8.8

1980	F.S	DM	GLD	Y	FF, C\$ £, L	5 CLASSES
1981	F.S	DM	Y GLD		FF, C\$ £, L	4 CLASSES
1982	F.S	DM, Y GLD			C\$, FF £, L	3 CLASSES
1983	F.S	DM, Y GLD			C\$, FF £, L	3 CLASSES
1984	F.S	Y, DM	GLD	C\$	FF, £ L	5 CLASSES
1985	F.S	Y, DM	GLD	C\$	FF, £ L	5 CLASSES

On constate que le { F.S. }, le { DM } ainsi que { FF, £, L } sont dans les mêmes classes de 1980 à 1985, par contre on observe des changements de classe pour le Y, Gld et le C\$.

Afin d'obtenir des prévisions des classifications hiérarchiques, on utilise des méthodes de régression linéaire pour des périodes ne dépassant pas 5 mois, il est clair que les résultats sont plus précis pour des périodes plus courtes.

Le tableau suivant représente les taux de change vis-à-vis du dollar, des monnaies suivantes de janvier 1985 à mai 1985.

TABLEAU 7.9

	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
FS	78	70	62	63	76
Y	45	43	40	44	47
DM	30	25	22	32	37
Gld	5	0	- 4	7	10
C\$	-18	-17	-19	-19	-19
FF	-47	-48	-50	-47	-45
£	-55	-57	-60	-59	-52
L	-65	-67	-68	-68	-66

Afin d'obtenir des prévisions sur les taux de change des monnaies précédentes vis-à-vis du dollar, on utilise un programme de régression linéaire : T.S.P. Version 4.0B sur Vax (Digital).

On obtient les résultats suivants :

PLOT OF SERIES PSP		70	70	71	71	72	72
1985 6	:	+	+	+	+	+	+
1985 7	:			*			72 00000
1985 8	:	*					70 90000
	:						69 80000
PLOT OF SERIES YP		43	43	43	44	44	
1985 6	:	+	+	+	+	+	42 80000
1985 7	:	*		*			43 30000
1985 8	:					*	43 80000
PLOT OF SERIES DMP		25	26	27	28	29	
1985 6	:	+	+	+	+	+	25 00000
1985 7	:			*			27 10000
1985 8	:	*				*	29 20000
PLOT OF SERIES GLDP		0	1	2	2	3	4
1985 6	:	+	+	+	+	+	0 20000
1985 7	:	*		*			1 90000
1985 8	:					*	3 60000
PLOT OF SERIES CCP		-18	-18	-18	-18	-18	-18
1985 6	:	+	+	+	+	+	-17 60000
1985 7	:			*			-18 00000
1985 8	:	*					-18 40000
PLOT OF SERIES FFP		-48	-48	-48	-48	-48	-47
1985 6	:	+	+	+	+	+	-48 40000
1985 7	:	*		*			-47 90000
1985 8	:					*	-47 40000
PLOT OF SERIES STP		-57	-57	-57	-57	-57	-57
1985 6	:	+	+	+	+	+	-57 40000
1985 7	:			*			-57 00000
1985 8	:	*				*	-56 60000
PLOT OF SERIES LP		-67	-67	-67	-66	-66	-66
1985 6	:	+	+	+	+	+	-66 20000
1985 7	:			*			-66 50000
1985 8	:	*				*	-66 80000

TABLEAU 7.10

Pour les hiérarchies associées aux prévisions des mois de juin, juillet, août 1985, on obtient les figures 7.11 à 7.13.

On constate que la hiérarchie 7-7 de janvier 1985 n'est pas semblable à la hiérarchie 7.11 de juin 1985 et cela est dû en particulier au rapprochement de la £ et L ainsi que le rapprochement du F.S. au groupe des monnaies { Y, DM, Gld, C\$ }.

Entre les figures 7.11 et 7.12, l'instabilité est due au rapprochement de la £ et FF tandis que les hiérarchies 7-12 et 7-13 sont semblables et il serait intéressant de calculer leurs distances.

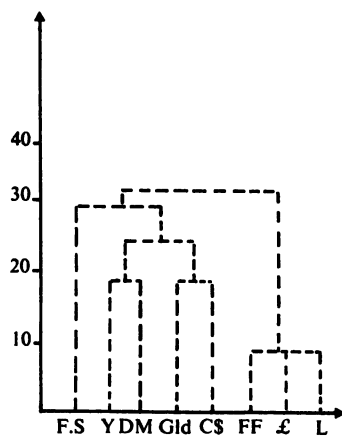


FIG. 7.11 — Juin 1985 (Prévision)

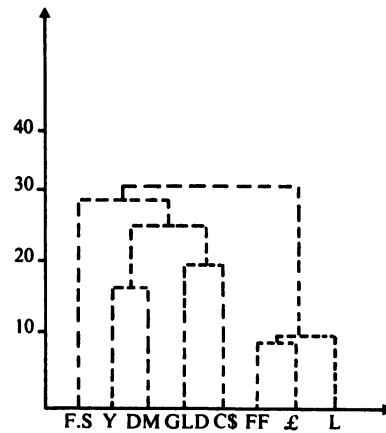


FIG. 7.12 — Juillet 1985 (Prévision)

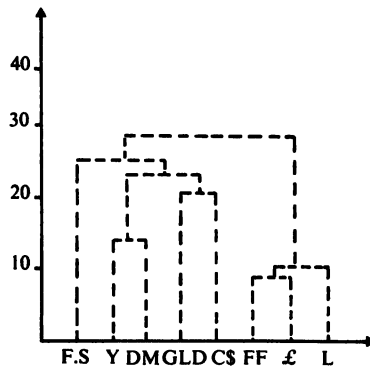


FIG. 7.13 — Août 1985 (Prévision)

8. CONCLUSION

Les notions de hiérarchies semblables et α -semblables permettent de distinguer les phénomènes ayant les mêmes formes de hiérarchies et de calculer la distance entre deux hiérarchies.

Ceci permet de définir la notion de stabilité hiérarchique d'un ensemble de données qui dépend du temps.

L'interprétation géométrique du §3 permet de caractériser les points instables d'une famille de hiérarchies du saut minimum dans le cadre unidimensionnel. Certains résultats peuvent se généraliser aux cas multidimensionnels et ceci en utilisant des résultats sur l'ordre et les ultramétriques [3].

A l'aide de l'algorithme de détection des points instables, on détermine les changements de hiérarchies associées à un ensemble de données unidimensionnelles, et ceci à l'aide des algorithmes classiques de construction des hiérarchies.

Ainsi l'évolution du taux de change des principales monnaies vis-à-vis du dollar, permet d'associer les changements de structure comme la dévaluation ou réévaluation de certaines monnaies aux instabilités hiérarchiques.

Les fluctuations rapides des monnaies permettent que des prévisions à court terme de hiérarchies et les prévisions sont relativement stables dans le cas où les hiérarchies sont binaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZECRI J.-P. — L'analyse des données. Dunod, 1973.
- [2] GRITCHLEY F. — Dimensionality theorems in multidimensional analysis. Journées internationales, Analyse de données, 1985.
- [3] DIDAY E. — Croisements, ordres et ultramétriques. Math. Sci. Hum. 1983.
- [4] DIDAY E.G. POUGET, LEMAIRE, TESTU. — Éléments d'analyse de données. Dunod 1982.
- [5] JARDINES N., SIBSON R. — The structure and construction of taxonomic Hierarchies. Math. Biasc. I, 173-179, 1967.
- [6] Perspectives économiques de l'OCDE, n° 37, juin 1985.
- [7] RAO C.R. — Advanced Statistical Methods in Biometric Research. New York. Wiley 1952.
- [8] ROUX M. — Thèse Université de Paris 6, 1962.
- [9] SADAT-AGHILI F. — Similar hierarchies and application, Working paper 1984.