

# JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

GERMAIN BAUMANN

## Désaisonnalisation des séries chronologiques économiques

*Journal de la société statistique de Paris*, tome 116 (1975), p. 219-230

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_1975\\_\\_116\\_\\_219\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1975__116__219_0)

© Société de statistique de Paris, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DÉSAISONNALISATION DES SÉRIES CHRONOLOGIQUES ÉCONOMIQUES

*This paper deals with seasonal adjustment of economic time series through the spectrum analysis method. The application of a filter on the frequency spectrum provides good results and can easily be used.*

*Man studiert in diesem Artikel die „Entzeitlichung“ der wirtschaftlichen Zeitserien durch die Anwendung der Methode der Spektralanalyse. Die Verwendung eines Filters auf das Frequenzspektrum gibt gute Resultate und ist zu gleicher Zeit eine sehr einfache Methode.*

## 1. DÉSAISONNALISATION D'UNE SÉRIE CHRONOLOGIQUE

L'analyse spectrale des séries chronologiques réelles fait souvent apparaître en plus de la tendance générale, des variations saisonnières. Pour étudier la variation du phénomène réel, il faut alors éliminer du spectre les termes provenant du mouvement saisonnier.

Il faut donc en réalité, remplacer la série

$\{x_t\}$  de la série chronologique à étudier

par une série

$\{y_t\}$  corrigé des variations saisonnières.

On peut effectuer le passage de  $\{x_t\}$  à  $\{y_t\}$  par une opération linéaire appelée encore filtre linéaire, c'est-à-dire on remplace la série réelle  $\{x_t\}$  par une série nouvelle  $\{z_t\}$  telle que :

$$z_t = b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + \dots + b_n x_{t-n}$$

Dans le cas particulier où  $\sum b_j = 1$ , cela revient à effectuer une moyenne mobile.

Le spectre de fréquences  $S_z(\omega)$  de la nouvelle série peut alors se calculer à partir du spectre correspondant à la série initiale :

$$S_x(\omega) = \sum_{t=0}^n \{x_t\} e^{-i\omega t} dt$$

et l'on aura :

$$S_z(\omega) = \sum_{t=0}^n b_t e^{-i\omega t} \cdot S_x(\omega)$$

En posant alors :

$$\sum_{t=0}^n b_t e^{-i\omega t} = T(\omega)$$

qu'on appelle la fonction de transfert du filtre, on a :

$$S_z(\omega) = T(\omega) S_x(\omega)$$

Comme, d'autre part, on peut définir la densité spectrale par la relation :

$$\varphi_x(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|S_{T(x)}(\omega)|^2}{2T} \right\}$$

donc également :

$$\varphi_z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|S_{T(z)}(\omega)|^2}{2T} \right\}$$

ce qui donne :

$$\varphi_z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|T_{T(x)}(\omega) \cdot S_{T(x)}(\omega)|^2}{2T} \right\}$$

relation qui a pour limite :

$$\varphi_z(\omega) = |T(\omega)|^2 \varphi_x(\omega)$$

Comme, par définition, l'expression  $\varphi_z(\omega)$  représente la densité spectrale de  $\{z_t\}$ , on peut montrer que l'on passe de la densité  $\varphi_x(\omega)$  à la densité  $\varphi_z(\omega)$  par l'application de la fonction  $|T(\omega)|^2 = G(\omega)$  appelée gain du filtre et on a :

$$\varphi_z(\omega) = G(\omega) \varphi_x(\omega)$$

avec

$$G(\omega) = \left| \sum_{t=0}^n b_t e^{i\omega t} \right|^2$$

Remarquons que la transformation réciproque reste vraie.

Si nous appliquons une moyenne mobile sur 12 mois,

$$12 \cdot z_t = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-11}$$

nous obtenons pour le filtre  $G(\omega)$  :

$$G(\omega) = |1 + e^{i\omega} + e^{2i\omega} + e^{3i\omega} + \dots + e^{11i\omega}|^2 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

Mais on peut également utiliser une moyenne mobile généralisée ( $\sum b_t \neq 1$ ) et calculer le gain correspondant  $G(\omega)$ .

On peut ainsi définir, pour les données mensuelles, le gain

$$G(\omega) = (6 + K - \cos \omega - \cos 2\omega - \dots - K \cos 12\omega)^2$$

en introduisant un paramètre  $K$  pouvant prendre des valeurs différentes selon l'importance de la variation saisonnière à éliminer.

## 2. DÉTERMINATION DE LA SÉRIE $z(t)$ DÉSAISONNALISÉE

Une fois enlevées les irrégularités provenant des variations saisonnières, il est intéressant d'obtenir la série  $x(t)$  qui représente le phénomène physique à étudier. On peut le reconstituer à partir du spectre de Fourier corrigé. Soit  $S'(\omega)$  ce spectre. On a alors une fonction périodique :

$$F'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{-n} e^{-j \frac{n\pi\omega}{\omega_0}}$$

avec :

$$C_{-n} = \frac{1}{2\omega_0} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S'(\omega) e^{j\frac{\omega\pi n}{\omega_0}} d\omega$$

ce qui donne :

$$C_{-n} = \frac{1}{2\omega_0} z\left(n \frac{\pi}{\omega_0}\right)$$

Donc  $z(t)$  et  $S'(\omega)$  sont reliées par :

$$z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S'(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Comme on peut remplacer  $S'(\omega)$  par la fonction périodique  $F'(\omega)$  dans l'intervalle  $-\omega_0, +\omega_0$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} F'(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ z(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\pi e^{j\omega t}}{\omega_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) e^{-j\frac{\omega\pi n}{\omega_0}} d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega} \left[t - \frac{n\pi}{\omega_0}\right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \left[ \frac{2 \sin(\omega_0 t - n\pi)}{t - \frac{n\pi}{\omega_0}} \right] \\ z(t) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n\pi}{\omega_0}\right) \frac{\sin(\omega_0 t - n\pi)}{\omega_0 t - n\pi} \end{aligned}$$

On peut donc construire la fonction  $z(t)$  corrigée en définissant en chaque point d'échantillonnage une fonction  $\sin z/z$  d'amplitude égale à celle de la fonction d'échantillonnage corrigée en ce point.

Nous allons appliquer ces relations à deux séries chronologiques économiques :

— la série des indices d'ensemble de la production industrielle en France sans le bâtiment;

— la série donnant la production d'électricité en France.

Mais nous allons d'abord effectuer les analyses spectrales de ces deux séries.

### 3. ANALYSE SPECTRALE DE DEUX SÉRIES CHRONOLOGIQUES ÉCONOMIQUES

#### 3.1. Indices d'ensemble de la production industrielle (sans le bâtiment)

##### 3.1.1. Variation en fonction du temps

Les indices d'ensemble sont donnés pour les années 1960 à 1969, par rapport à une base 100 pour l'année 1959.

La variation de ces indices en fonction du temps est représentée par une courbe croissante mais présentant de nombreuses fluctuations (fig. 1). On remarque notamment une diminution brusque de ces indices, chaque année, au mois d'août et correspondant aux vacances.

D'autre part, on constate également une diminution légère au début de chaque année et se répétant assez régulièrement. Mais ce sont là les seules constatations que l'on peut tirer de l'étude de ce graphique, dont nous allons effectuer maintenant l'analyse spectrale.

### 3.1.2. Analyse spectrale

Nous étudierons donc le spectre de fréquence des indices d'ensemble soit :

$$F(\omega) = C_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{36} C_\tau \cos(\omega\tau)$$

avec :

$$C_\tau = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} (y_i - \bar{y})(y_{i+\tau} - \bar{y})$$

et

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (n = 120)$$

Nous posons  $\omega = k \frac{\pi}{36}$  et, en prenant successivement :

$$k = 0 \quad k = 1 \quad \dots \quad k = 36$$

nous obtenons le spectre de fréquence (fig. 2). Le calcul a été effectué sur un ordinateur UNIVAC 1080.

La courbe obtenue a la forme du spectre d'un phénomène de tendance croissante mais présente, pour les fréquences élevées de très nombreuses fluctuations, ce qui rend son analyse très difficile.

Pour remédier à cet inconvénient, nous avons donc « lissé » le spectre en appliquant un filtre pour le calcul du spectre. Nous avons ainsi calculé le spectre corrigé :  $H(\omega)$ , tel que :

$$H(\omega) = C_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{18} \left[ 1 - 6 \left( \frac{\tau}{36} \right)^2 \left( 1 - \frac{\tau}{36} \right) \right] C_\tau \cos\left(\frac{k\pi}{36} \tau\right) + 2 \sum_{\tau=19}^{36} \left[ 2 \left( 1 - \frac{\tau}{36} \right)^3 \right] C_\tau \cos\left(\frac{k\pi}{36} \tau\right)$$

pour  $k$  variant de  $k = 0, k = 1 \dots k = 36$

et le spectre corrigé  $S(\omega)$ , tel que :

$$S(\omega) = C_0 + 2 \sum_{\tau=1}^{36} C_\tau \left[ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{36} \tau\right) \right] \cos\left(\frac{k\pi}{36} \tau\right)$$

pour  $k$  variant de  $k = 0, k = 1 \dots k = 36$

On obtient les spectres  $H(\omega)$  et  $S(\omega)$  ainsi lissés, des courbes de tendance décroissante correspondant à un cycle de conjoncture croissante (fig. 2).

D'autre part, les fluctuations statistiques fort importantes pour les fréquences élevées, sont pratiquement éliminées par l'emploi de « fenêtres ».

Par contre, on voit apparaître nettement des pics pour :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{6} \quad \omega_2 = \frac{\pi}{3} \quad \omega_3 = \frac{2\pi}{3}$$

ce qui correspond pour la série chronologique à l'existence de trois cycles différents pour des périodes respectives de :

$$T_1 = 12 \text{ mois} \quad T_2 = 6 \text{ mois} \quad T_3 = 3 \text{ mois}$$

et que ne pourrait mettre en évidence l'étude du graphique en fonction du temps (fig. 1). Ces trois cycles indiquent qu'il existe 3 phénomènes différents qui se superposent au phénomène à croissance continue.

### 3.2. La production d'électricité

#### 3.2.1. Variation de la production d'électricité

La production d'électricité est donnée en milliards de kWh pour les années 1960 à 1969.

La variation de cette production en fonction du temps est représentée par une courbe de tendance générale croissante, mais présentant de nombreuses et importantes fluctuations (fig. 3). Nous remarquons que ces fluctuations sont plus nombreuses que dans le graphique des indices de production.

Nous constatons notamment une brusque diminution de la production pour le mois d'août correspondant aux vacances, ainsi qu'une forte augmentation en décembre-janvier, correspondant aux mois d'hiver. Mais d'autres variations semblent également se produire assez régulièrement, que nous étudierons par la méthode d'analyse spectrale.

#### 3.2.2. Analyse spectrale

Nous étudions ainsi, pour la production d'électricité, les spectres

$$F(\omega), H(\omega) \quad \text{et} \quad S(\omega) \quad \text{précédemment définis.}$$

Nous constatons que l'allure générale des trois spectres est celle d'un phénomène de tendance croissante (fig. 4).

Cependant, pour le spectre  $F(\omega)$ , les fluctuations, pour les fréquences élevées, sont telles qu'aucune conclusion ne peut être tirée de leur étude.

Par contre, dans les spectres  $H(\omega)$  et  $S(\omega)$ , les fluctuations pour les fréquences élevées sont éliminées et nous voyons apparaître nettement des pics pour les fréquences :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{6} \quad \omega_2 = \frac{\pi}{3} \quad \omega_3 = \frac{\pi}{2} \quad \omega_4 = \frac{2\pi}{3} \quad \omega_5 = \frac{5\pi}{6}$$

et correspondant, pour la production d'électricité à l'existence de différents cycles correspondant à des retards de :

$$T_1 = 12 \text{ mois} \quad T_2 = 6 \text{ mois} \quad T_3 = 4 \text{ mois} \quad T_4 = 3 \text{ mois} \quad T_5 \sim 2,4 \text{ mois}$$

Ces cycles s'interprètent comme dans le cas des indices d'ensemble avec les mêmes remarques :

$$\omega_1 = \frac{\pi}{6} \quad \omega_2 = \frac{\pi}{3} \quad \omega_3 = \frac{\pi}{2} \quad \omega_4 = \frac{2\pi}{3} \quad \omega_5 = \frac{5\pi}{6}$$

et correspondant, pour les indices des textiles à l'existence de cycles ayant pour périodes respectives :

$$T_1 = 12 \text{ mois} \quad T_2 = 6 \text{ mois} \quad T_3 = 4 \text{ mois} \quad T_4 = 3 \text{ mois} \quad T_5 = 2,4 \text{ mois}$$

Les études que nous venons d'effectuer montrent donc que l'analyse spectrale permet de bien mettre en évidence les variations saisonnières qui se détachent sous forme de pic de résonance de la courbe de tendance représentant le phénomène économique pur.

Mais nous pouvons également obtenir la tendance générale du phénomène économique en effectuant une désaisonnalisation des spectres de fréquence.

#### 4. DÉSAISONNALISATION DES INDICES DE PRODUCTION ET DE LA PRODUCTION D'ÉLECTRICITÉ

##### 4.1. Méthode de calcul

Nous allons maintenant appliquer la méthode de désaisonnalisation par utilisation d'un filtre sur le spectre de fréquence et en considérant les deux spectres précédemment calculés. Pour ce faire nous utilisons les filtres suivants :

##### 4.1.1. Moyenne sur 4 mois :

En prenant une moyenne sur 4 mois, donc en remplaçant la série  $x(t)$  par  $y(t)$ , telle que :

$$y(t) = \sum_{j=-4}^4 a_j x(t-j)$$

$$a_0 = K + 2$$

avec

$$a_j = -\frac{1}{2} \quad j = 1, 2$$

$$a_j = 0 \quad j = 3$$

$$a_j = -K \quad j = 4$$

$$a_j = a_{-j}$$

nous obtenons le filtre 
$$G(\omega) = \left[ K + 2 - \sum_{j=1}^4 \cos j\omega - K \cos 4\omega \right]^2$$

La constante  $K$  peut être ajustée selon l'importance des termes saisonniers.

4.1.2. *Moyenne sur 6 mois*

En prenant une moyenne sur 6 mois, donc en remplaçant la série  $x(t)$  par  $y(t)$ , telle que :

$$y(t) = \sum_{j=-6}^6 a_j x(t-j)$$

avec

$$a_0 = 3 + K$$

$$a_j = -\frac{1}{2} \quad j = 1, 2, 3$$

$$a_j = 0 \quad j = 4, 5$$

$$a_j = -K \quad j = 6$$

$$a_j = a_{-j}$$

nous obtenons le filtre  $G(\omega) = \left[ K + 3 - \sum_{j=1}^3 \cos j\omega - K \cos 6\omega \right]^2$

4.1.3. *Moyenne sur 12 mois*

En prenant une moyenne sur 12 mois, donc en utilisant la série  $y(t)$ , telle que :

$$y(t) = \sum_{j=-12}^{12} a_j x(t-j)$$

avec

$$a_0 = 6 + K$$

$$a_j = -\frac{1}{2} \quad j = 1, 2, \dots, 6$$

$$a_j = 0 \quad j = 7, 8, \dots, 11$$

$$a_j = -K \quad j = 12$$

$$a_j = a_{-j}$$

nous obtenons le filtre :

$$G(\omega) = \left[ K + 6 - \sum_{j=1}^6 \cos j\omega - K \cos 12\omega \right]^2$$

4.1.4. *Moyenne sur 24 mois*

En prenant la moyenne sur 24 mois donc en prenant la série  $y(t)$  telle que :

$$y(t) = \sum_{j=-24}^{24} a_j x(t-j)$$

avec

$$a_0 = 6 + K$$

$$a_j = -\frac{1}{2} \quad j = 1, 2, \dots, 12$$

$$a_j = 0 \quad j = 14, 15, \dots, 23$$

$$a_j = -K \quad j = 24$$

$$a_j = a_{-j}$$



nous obtenons le filtre :  $G(\omega) = \left[ K + 6 - \sum_{j=1}^{12} \cos j\omega - K \cos 24\omega \right]^2$

#### 4.2. Résultats

Nous avons donc étudié chacun des filtres précédents sur les 2 spectres, et pour chaque filtre nous avons fait varier la valeur de la constante  $K$ .

Nous avons obtenu le meilleur résultat pour le filtre sur 12 mois qui a donné la courbe de désaisonnalisation la plus régulière.

Nous donnerons l'effet d'un tel filtre de 12 mois sur le spectre de fréquences des indices d'ensemble avec :

$$k = 6 \quad (\text{fig. 5})$$

ainsi que le spectre de fréquences des indices d'ensemble corrigé après application de ce même filtre (fig. 6).

Nous avons dans notre calcul, appliqué le filtre  $G$  et le filtre  $G^2$  afin d'avoir une meilleure correction.

Le filtre 12 mois donnant le meilleur résultat, nous avons cherché, parmi les filtres 12 mois celui donnant un effet optimum.

Le meilleur résultat est obtenu pour le filtre :

$$G(\omega) = \left[ 1 + \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \cos j\omega \right]^2$$

ce qui correspond à la série :

$$y(t) = \frac{1}{12} \sum_{j=-6}^6 x(t-j)$$

c'est-à-dire en prenant pour la série  $y(t)$  la moyenne mobile sur 12 mois (fig. 7).

Nous avons alors également appliqué le même calcul au spectre de la production d'électricité. Nous observons que, pour ce spectre également, le meilleur résultat est obtenu pour le filtre correspondant à la moyenne mobile de la série (fig. 8).

Ainsi la méthode d'analyse spectrale nous permet donc d'obtenir facilement la série désaisonnalisée. La méthode est ici particulièrement intéressante puisque sur les spectres de fréquences les variations saisonnières se détachent très nettement.

Germain BAUMANN

*Professeur, laboratoire de physique théorique de Nancy*

#### RÉFÉRENCES

- GRANGER C. W., HATANAKA M. — *Spectral Analysis of economic time series*. Princeton-N. J.-Princeton University Press, 1964.
- MALINVAUD E. — *Méthodes statistiques de l'économétrie*. Dunod, 1969.

FIGURE 1. — Indices d'ensemble (1960-1969)

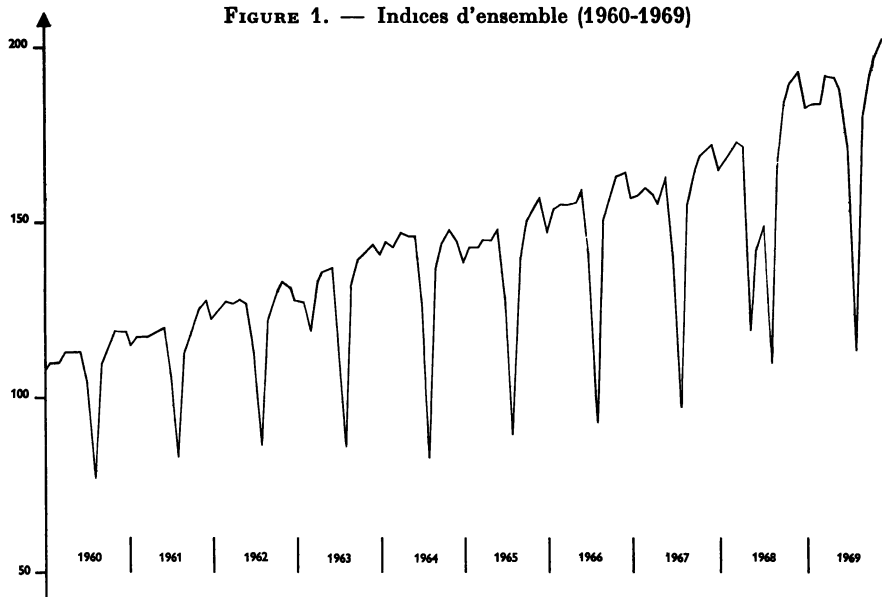


FIGURE 2. — Indices d'ensemble (1960-1969)

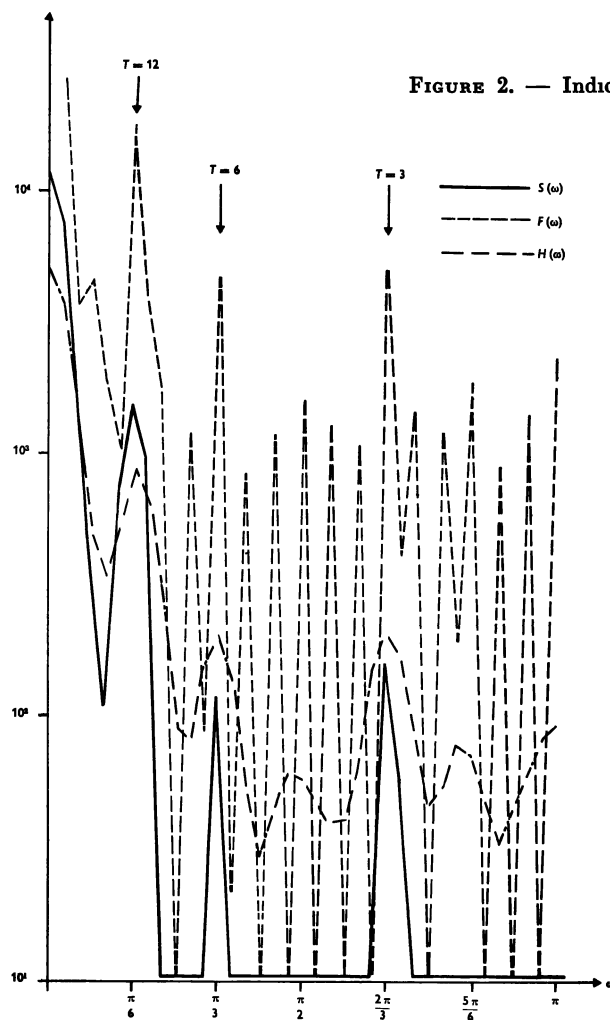


FIGURE 3. — Production d'électricité (1960-1969)

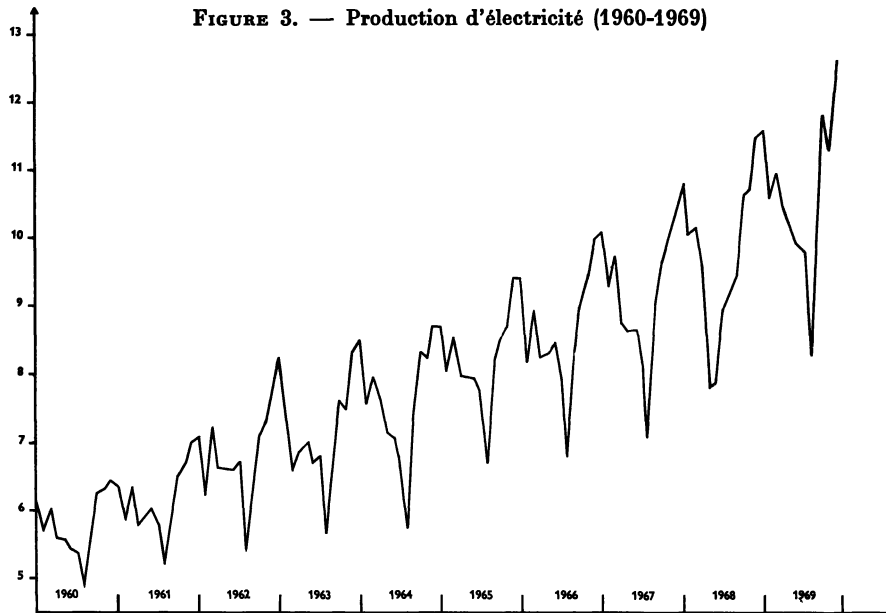


FIGURE 4. — Production d'électricité (1960-1969)

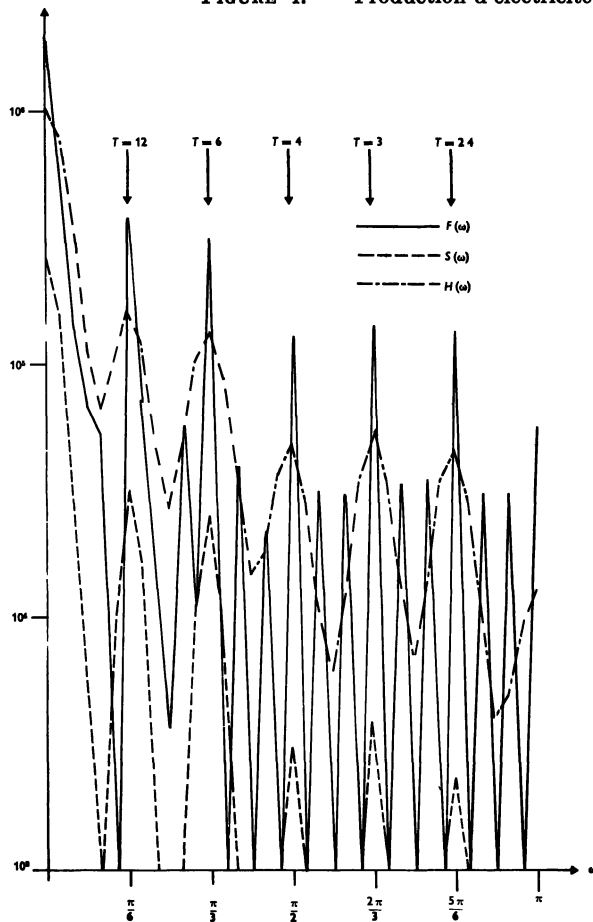


FIGURE 5

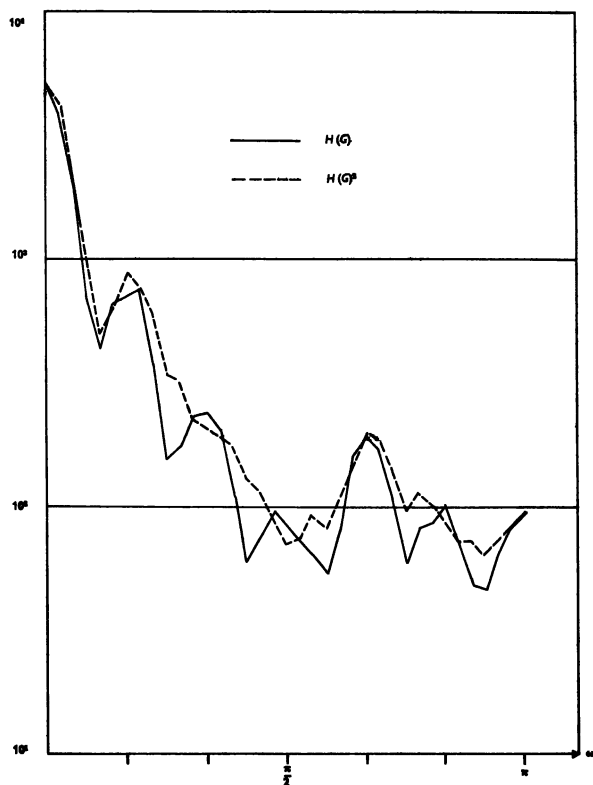
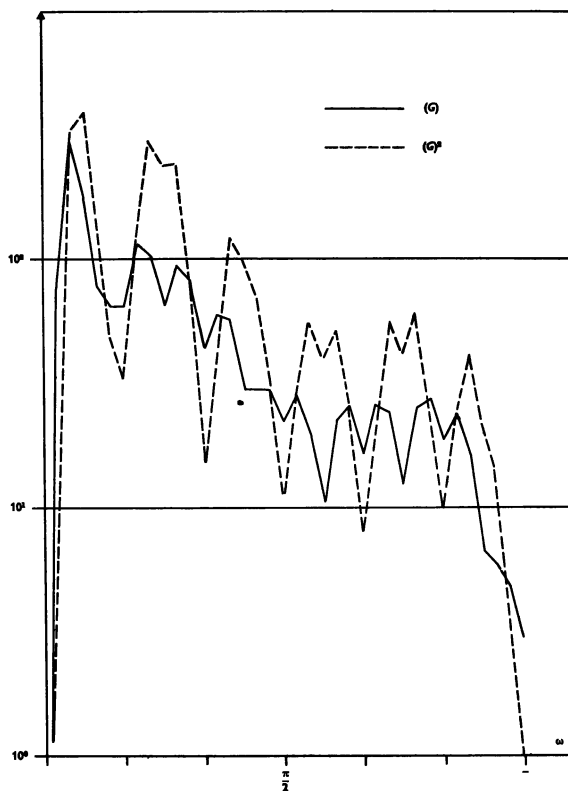


FIGURE 6

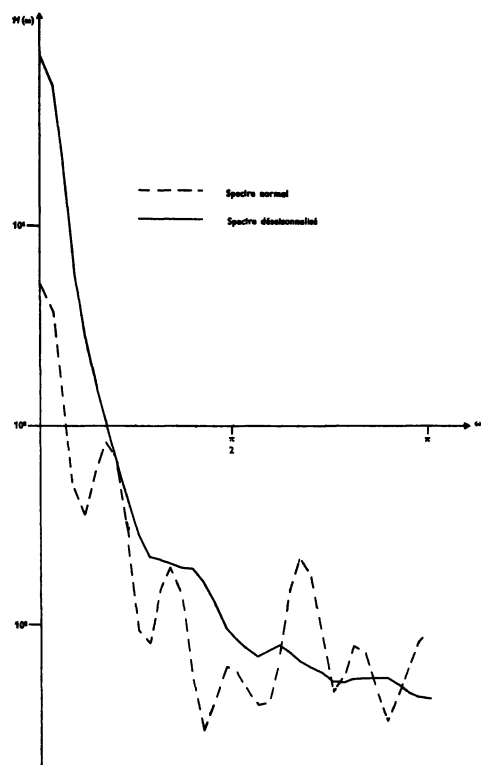


FIGURE 7. — Désaisonnalisation (Indices d'ensemble)

FIGURE 8. — Désaisonnalisation. Électricité

