

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

RENÉ ROY

Théorie des choix

Journal de la société statistique de Paris, tome 85 (1944), p. 134-138

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1944__85__134_0

© Société de statistique de Paris, 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES CHOIX

Note de M. Roy, relative aux propriétés de l'indice des prix z , tel qu'il a été défini dans son ouvrage : *De l'utilité* (1).

Nous croyons utile de répondre à certaines objections qui nous ont été faites au sujet des propriétés que présente l'indice z , défini dans le mémoire, en publiant le détail des calculs permettant d'aboutir aux formules approchées :

$$\left\{ \begin{array}{l} w = \frac{\omega}{z} \\ \frac{dz}{z} = \frac{\sum q dp}{\sum qp} = \sum \alpha \frac{dp}{p} \end{array} \right.$$

en posant : $\alpha = \frac{qp}{\sum qp}$.

Comme il sera exposé par la suite, la validité de ces formules repose sur la communauté des valeurs prises par le degré final d'utilité du revenu en monnaie pour le complexe \bar{Q}

(1) *De l'Utilité, Contribution à la théorie des choix*. Hermann, Paris 1943. Cet ouvrage est analysé à la rubrique bibliographie, p. 138.

adapté à la situation (r, \bar{P}) et pour le complexe équivalent \bar{Q}' adapté à la situation $(r, z \bar{P}_0)$. Cette assimilation est couramment admise par les auteurs qui se sont efforcés d'approfondir la théorie des nombres indices; elle revient à supposer que le degré final d'utilité du revenu en monnaie reste constant lorsque le revenu nominal et l'indice des prix demeurent inchangés.

L'indice des prix z est défini par l'équation :

$$\Phi(r, \bar{P}) = \Phi(r, z \bar{P}_0)$$

ou Φ désigne la fonction d'utilité : U .

Nous nous proposons de montrer que la dérive partielle $\frac{\partial z}{\partial r}$ de z par rapport à r , qui n'est pas nul en général, est pratiquement négligeable, relativement à la somme des termes provenant des variations de prix.

Pour obtenir la valeur de $\frac{\partial z}{\partial r}$, nous différencions l'équation de définition par rapport à r et supposons par conséquent tous les prix p constants.

Le premier membre donne par différentiation le degré final d'utilité du revenu en monnaie, soit :

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \omega(r, \bar{P}).$$

Le second membre comprend, d'une part le terme provenant de la différentiation directe par rapport à r , d'autre part l'ensemble des termes provenant de la différentiation par rapport à z considéré comme une fonction implicite du revenu et des prix :

a) La différentiation directe du deuxième membre par rapport à r donne un premier terme égal à la valeur prise par ω pour la situation $(r, z \bar{P}_0)$. soit :

$$\omega' = \omega(r, z \bar{P}_0)$$

b) La différentiation par rapport à z donne une somme de termes ayant pour forme générale $p_0 \varphi'$, expression dans laquelle φ' désigne la valeur de $\varphi(r, P)$, dérivée partielle de Φ par rapport au prix p , lorsqu'on donne à chacun des prix une valeur de la forme $z p_0$.

L'ensemble de ces termes a donc pour expression :

$$\frac{\partial z}{\partial r} \sum p_0 \varphi'.$$

La différentiation par rapport à r des deux membres de l'équation qui définit z conduit en définitive à la relation :

$$\omega = \omega' + \frac{\partial z}{\partial r} \sum p_0 \varphi'.$$

Cette relation permet d'obtenir la dérivée cherchée, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\omega - \omega'}{\sum p_0 \varphi'}.$$

Le dénominateur de cette expression est négatif, puisque nous savons que toutes les dérivées partielles φ de la fonction d'utilité Φ par rapport au prix sont négatives.

Quant au numérateur, il représente l'écart entre les valeurs prises par le degré final d'utilité du revenu en monnaie pour chacune des situations (r, \bar{P}) et $(r, z \bar{P}_0)$. Or, nous admettons avec R. Frisch que le degré final d'utilité du revenu en monnaie reste constant pour deux situations telles que le revenu et le niveau des prix ne soient pas modifiés, quelque puisse être la définition admise pour l'indice qui caractérise le niveau des prix. Dans le cas particulier de l'indice z , cette affirmation est d'autant plus légitime que les situations envisagées définissent des complexes équivalant \bar{Q} et \bar{Q}' .

Dans la mesure où l'on considère cette affirmation comme plausible, l'indice z ne dépend pas directement de r et se trouve uniquement affecté par les variations de prix; il en résulte qu'il satisfait aux deux propriétés mentionnées dans le mémoire, à savoir :

$$1^\circ \quad \omega(r, z) = \frac{1}{z} \omega(p)$$

expression dans laquelle ρ désigne le revenu réel $\frac{r}{z}$ et $\omega(\rho)$ la dérivée par rapport à ρ de la fonction d'utilité : $U = \Omega(\rho) = \Phi(r, \bar{P})$

$$\text{2}^{\circ} \quad \frac{dz}{z} = \frac{\sum q dp}{\sum qp} = \Sigma \left(\alpha \frac{dp}{p} \right)$$

avec $\alpha = \frac{qp}{\sum qp}$.

NOTA I. — Dans l'expression de $\frac{dz}{dr}$, il est intéressant d'observer que le dénominateur peut se mettre sous la forme :

$$\Sigma p_0 \varphi' = -\omega' \Sigma p_0 q' = -\omega' \frac{\Sigma z p_0 q'}{z} = -\omega' \frac{r}{z}$$

q' désignant une composante du vecteur Q' qui représente le complexe adapté à la situation $(r, z \bar{P}_0)$.

Il en résulte que la variation de z , par rapport au revenu, peut être caractérisé par une élasticité partielle de la forme :

$$\frac{\partial z}{\partial r} \frac{r}{z} = -\frac{\omega - \omega'}{\omega'} = 1 - \frac{\omega}{\omega'}$$

Nous admettons comme il a été précisé, que cette élasticité est nulle puisque ω' est pratiquement assimilable à ω .

Ce calcul permet en outre de vérifier que l'indice z répond bien à la définition d'un indice fondé sur la notion d'équivalence puisque l'on a :

$$r = \Sigma qp = \Sigma z p_0 q' = z \Sigma q' p_0$$

Si nous désignons $\Sigma q' p_0$ par r_0 nous avons en définitive $z = \frac{r}{r_0}$.

Les complexes \bar{Q} et \bar{Q}' étant équivalents, z représente bien la valeur de l'indice des prix \bar{P} par rapport au prix de base P_0 pour le niveau d'existence défini par le revenu r et le vecteur \bar{P} .

NOTA II. — En définitive, le calcul se résume ainsi :

$$U = \Phi(r, \bar{P}) = \Phi(r, z \bar{P}_0) = \Omega(\rho)$$

La différentiation donne :

$$\begin{aligned} dU &= \omega dr + \Sigma \varphi dp = \omega d\rho \\ d\rho &= \frac{dr}{z} - \frac{r}{z} \frac{dz}{z} \\ \frac{dz}{z} &= \frac{dz}{dr} \frac{r}{z} \frac{dr}{r} + \Sigma \frac{dz}{dp} \frac{p}{z} \frac{dp}{p} \end{aligned}$$

en identifiant terme à terme nous avons :

$$a) \quad \omega = \frac{\omega}{z} \left(1 + \frac{\omega' - \omega}{\omega'} \right)$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\omega' = \frac{\omega}{z}$$

Cette dernière expression aurait pu se déduire directement de l'équation :

$$\Phi(r, z \bar{P}_0) = \Omega(\rho)$$

$$b) \quad \frac{dz}{z} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega'} \right) \frac{dr}{r} - \Sigma \frac{\varphi z}{\omega r} dp$$

En tenant compte des relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = z \omega' \\ \varphi = - \omega q \end{array} \right.$$

Nous avons pour les termes en $d p$:

$$\frac{\omega}{\omega'} \Sigma \frac{q}{r} d p$$

soit encore :

$$\frac{\omega}{\omega'} \Sigma \alpha \frac{d p}{p} \quad \left(\alpha = \frac{q p}{r} \right).$$

En définitive, nous obtenons :

$$\frac{d z}{z} = \left(1 - \frac{\omega}{\omega'} \right) \frac{d r}{r} + \frac{\omega}{\omega'} \Sigma \alpha \frac{d p}{p}.$$

Formules résumées.

Si nous posons :

$$\frac{\omega}{\omega'} = 1 + \varepsilon$$

nous avons en définitive :

$$\begin{aligned} \omega &= (1 + \varepsilon) \frac{\omega}{z} \\ \frac{d z}{z} &= (1 + \varepsilon) \Sigma \alpha \frac{d p}{p} - \varepsilon \frac{d r}{r}. \end{aligned}$$

Dans ces deux formules ε est une fonction qui ne s'annule identiquement que pour des formes particulières de la fonction d'utilité, mais qui, dans tous les cas, peut être considéré comme négligeable.

Les deux relations générales ci-dessus peuvent donc être remplacées par les formules approchées ci-après qui figurent dans le mémoire :

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega}{z} \\ \frac{d z}{z} &= \Sigma \alpha \frac{d p}{p} \end{aligned}$$

NOTA III. — Condition pour que z ne dépende pas de r .

Pour démontrer que z est pratiquement indépendant de r nous avons admis que ω conservait la même valeur pour Q et Q' . Il faudrait donc en toute rigueur que ω reste constant sur une même surface d'indifférence; cette condition peut s'exprimer ainsi qu'il suit :

En désignant par $u = \frac{\partial U}{\partial q}$ le degré final d'utilité d'une marchandise déterminée, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\frac{u}{p} = \omega$$

ou bien encore :

$$q u = \omega p q$$

en additionnant les relations ainsi obtenues pour les diverses marchandises, on obtient : $\Sigma q u = \Sigma \omega q p = \omega \Sigma q p = \omega r$, r étant constant lorsqu'on passe de Q à Q' , il faut

pour que w ne change pas que l'expression du premier membre Σqu reste constante sur la surface d'indifférence passant par Q.

En recourant aux équations tangentielles d'équilibre, on trouve comme nouvelle expression de la condition recherchée :

$$\Sigma p \varphi = - w r = C^{te}$$

L'indépendance de z vis-à-vis de r peut donc s'exprimer par l'une des conditions :

$$\Sigma q \frac{\partial U}{\partial q} = C^{te}$$

$$\Sigma p \frac{\partial U}{\partial p} = C^{te}.$$

René Roy.
