JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MAURICE FRÉCHET

Sur une expression simple approchée de la loi de probabilité des erreurs d'observation

Journal de la société statistique de Paris, tome 84 (1943), p. 52-70

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1943__84__52_0>

© Société de statistique de Paris, 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

III

SUR UNE EXPRESSION SIMPLE APPROCHÉE DE LA LOI DE PROBABILITÉ DES ERREURS D'OBSERVATION

RÉSUMÉ

L'essentiel des résultats suivants consiste en ce qu'on peut approcher de la fonction d'erreur dite aussi « loi normale » avec une *erreur absolue de moins de* 1/2 *centième*, par une expression assez simple qui a l'avantage de *mieux se prêter* que l'intégrale de Laplace (et aussi mieux que certaines expressions plus approchées de celles-ci qui ont été données) à certaines opérations analytiques, en particulier *à certaines intégrations*, qu'on a à effectuer en *Statistique mathématique*.

Nous avons représenté, plus loin, la fonction d'erreur par l'intégrale employée par les « probabilistes ».

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Nous la représenterons, dans ce résumé, par l'intégrale plus familière aux statisticiens

$$\frac{1}{2} + \Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

qui s'obtient par le changement de variable

$$t = \frac{u}{\sqrt{2}}, \qquad \text{d'où} \qquad 2\,\Phi(y) = \Theta\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right).$$

Ceci étant, on a, pour $y \geqslant o$, l'égalité approximative (1)

$$2\,\Phi(y) \;\underline{\Omega}\; 1 - 10^{-\gamma y - \delta y^2} = 1 - e^{-l y - m y^2}$$

en choisissant convenablement les constantes γ et δ.

En prenant $\gamma = 0{,}326.344$, $\delta = 0{,}173.1525$

ce qui revient à $l = 0{,}751.434.9$, $m = 0{,}398.698.3$,

on a le tableau suivant (déduit du tableau XIII, en prenant $y = x\sqrt{2}$).

TABLEAU I

y	0,070.71	0,141.42	0,353.55	0,707.11	1,414.21	2,121.32	2,828.43	3,535.53	4,242.64
$1 - 10^{-\gamma y - \delta y^2}$	0,053.65	0.107.99	0.270.64	0,518.50	0,844.39	0,966.94	0,995.09	0,999.52	0,999.97
$2\,\Phi(y)$	0,056.37	0.112.46	0,276.33	0,520.50	0,842.70	0,966.105	0,995.32	0,999.53	0,999.98

On peut aussi comparer les « moments » correspondants :

$$M_k = 2 \int_0^{+\infty} y^k\, d\,\Phi(y); \qquad M_k' = \int_0^{+\infty} y^k\, d\left[1 - 10^{-\gamma y - \delta y^2}\right]$$

(1) Nous représentons par $\underline{\Omega}$ une égalité approchée.

Pour les mêmes valeurs de γ, δ, on trouve

k	1	2	3	4
M'_k	0,797.885	0,999.98	1.603.69	1,522.70
M_k	0,797.885	1	1,595.77	1,5

Nous avons reproduit, dans ce mémoire, les chiffres tels qu'il nous ont été donnés par les calculs sans nous préoccuper de vérifier leur exactitude, la bonne approximation qu'ils fournissent d'expressions tout à fait différentes, nous paraissant une garantie suffisante de l'exactitude de leurs premières décimales.

Avertissement. — Les mathématiques n'intervenant, comme il convient, dans les publications de notre Société, que comme un moyen et non comme une fin, nous avons, pour faciliter la lecture de ce mémoire, rejeté à sa fin, en Annexe, toutes les démonstrations mathématiques un peu longues.

PREMIÈRE PARTIE

ANCIENNES ET NOUVELLES FORMULES D'APPROXIMATION DE LA LOI DES ERREURS D'OBSERVATION

Un point d'histoire concernant la loi des erreurs d'observation.

On sait que Laplace a proposé successivement (avant Gauss) deux expressions différentes pour la loi des erreurs d'observation, la probabilité pour qu'une erreur soit comprise entre x et $x + dx$ étant

$$(1) \qquad \frac{1}{2\mu} e^{-\frac{|x-x_0|}{\mu}} dx, \quad \text{pour la première,}$$

$$(2) \qquad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad \text{pour la seconde.}$$

C'est pourquoi, suivant E. B. Wilson, nous appelons les lois de probabilité correspondantes : première et seconde loi de Laplace. (A ce propos, rappelons un point d'histoire; comme l'a établi Karl Pearson, c'est de Moivre qui a, le premier, montré que la loi binomiale réduite peut être approchée par l'expression (2) en choisissant convenablement α et σ. Certains auteurs ont donc cru devoir appeler loi de Moivre, la seconde loi de Laplace. Il faut observer que, pour de Moivre, l'expression (2) était une simple expression approchée et c'est bien à Laplace, et non à de Moivre (pas plus qu'à Gauss) qu'il faut attribuer l'emploi de (2) comme expression de la loi des erreurs d'observation, loi dont la signification concrète est entièrement distincte de celle de la loi binomiale).

On est généralement d'accord pour penser que, si la première loi de Laplace fournit une assez bonne approximation (1) des tableaux empiriques d'erreurs d'observation, la seconde loi est généralement plus approchée.

Toutefois, pour l'appréciation de la probabilité P (ε) des erreurs dont les écarts avec la valeur probable sont, en valeur absolue, supérieurs à ε, cette seconde loi conduit à une expression peu maniable, sous forme de l'intégrale

$$(3) \qquad 1 - 2\,\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\varepsilon}^{-\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1 - \Theta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

$$(4) \qquad \text{avec} \qquad \Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Plusieurs auteurs se sont donc préoccupés de donner à P (ε) une expression approchée plus simple.

(1) Voir p. 5 et 6 de notre mémoire : *Sur la correspondance entre certaines lois d'erreurs et certaines définitions de la distance* (*Revue Scientifique*, 79e année, 1941, p. 3-14.)

Rappel de formules approchées antérieures.

Formule de Borel. — Admettons d'abord que P (ε) soit calculée en remplaçant la deuxième loi de Laplace par la première. On aura (1) :

$$P(\varepsilon) \underline{\Omega}\, 2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\mu}{2} e^{-\frac{t}{\mu}} dt = \left(-e^{-\frac{t}{\mu}}\right)_{\varepsilon}^{+\infty} = e^{-\frac{\varepsilon}{\mu}}.$$

Émile Borel a eu l'heureuse idée d'écrire cette expression sous la forme équivalente :

$$P(\varepsilon) \underline{\Omega}\, 10^{-\frac{\varepsilon}{\mu}M} \quad \text{où } M = \log_{10} e$$

ou plutôt sous la forme plus intuitive

$$(5) \qquad P(\varepsilon) \underline{\Omega} \frac{1}{10^k} \qquad \text{en posant } k = \frac{\varepsilon M}{\mu} \qquad \text{ou } \varepsilon = k\left(\frac{\mu}{M}\right).$$

On voit que la signification de $\frac{\mu}{M}$ est simple, c'est la valeur de l'écart ε′ tel qu'il y ait une probabilité égale à 1/10 que cet écart soit dépassé.

Quand il ne s'agit que de donner une idée de l'ordre de grandeur de P (ε), l'expression (5) fournit une expression simple et frappante, facile à retenir, de la probabilité cherchée.

Employée, comme l'a fait Émile Borel, dans un ouvrage de vulgarisation ou dans un exposé philosophique, cette formule est très satisfaisante et remplit parfaitement son but.

Toutefois, l'approximation obtenue est assez grossière. La formule revient à écrire :

$$1 - \Theta\left(\frac{\varepsilon}{\sigma\sqrt{2}}\right) \underline{\Omega}\, 10^{-\frac{\varepsilon M}{\mu}}$$

en égalant exactement pour $\frac{\varepsilon M}{\mu} = 1$ d'où :

$$1 - \Theta\left(\frac{\mu}{M\sigma\sqrt{2}}\right) = 1; \qquad \Theta\left(\frac{\mu}{M\sigma\sqrt{2}}\right) = 0{,}9.$$

En posant :

$$\frac{\mu}{M\sigma\sqrt{2}} = x', \text{ on a : } \Theta(x') = 0{,}9. \text{ Une table de } \Theta \text{ donne } x' = 1{,}163.025$$

et on a :

$$1 - \Theta(x) \underline{\Omega}\, 10^{-\frac{x}{x'}}.$$

On obtient alors le tableau suivant :

TABLEAU II.

x	0	$\frac{x'}{2}$	x'	$2x'$	$3x'$
$1 - \Theta(x)$	1	0,41	0,1	0,001	0,000.02
$10^{-\frac{x}{x'}}$	1	0,31	0,1	0,010	0,001

L'erreur absolue peut donc atteindre 1/10.

Notre première formule. — Nous avons cherché à obtenir une précision meilleure au prix d'une complication de la formule de Borel (5) mais, en lui gardant encore une forme assez simple avec coefficients simples. Nous avons donc proposé (2) la formule suivante :

$$(6) \qquad P(\varepsilon) \underline{\Omega} \frac{1}{10^{\frac{k(k+1)}{2}}} \qquad \varepsilon = k\varepsilon'$$

où k est encore défini comme le nombre de fois que l'erreur absolue ε contient l'écart ε′, écart qu'il y a une probabilité égale à 1/10 de dépasser en valeur absolue.

(1) Nous représentons par $\underline{\Omega}$ une égalité approchée.

(2) *Une expression élémentaire approchée de la loi des grands nombres* (*Revue générale des Sciences*, 1923, 34e année, p. 211-212). Voir aussi : FRÉCHET et HALBWACHS, *Le Calcul des probabilités à la portée de tous*, (p. 232-236, chez Dunod, 1924).

On obtient, par (6), une approximation notablement meilleure que par (5), comme le montre le tableau suivant :

TABLEAU III

x	0	0,12	0,46	0,71	1,16	1,83	2,83
$1 - \Theta(x)$	1	0,87	0,52	0,32	0,10	0,0096	0,000.063
$10^{\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}}$	1	0,88	0,54	0,32	0,10	0,0094	0,000.067

Dans ce tableau, la plus grande différence en valeur absolue est 0,02; soient deux chances sur *cent*, c'est là une approximation tout à fait suffisante dans la plupart des applications pratiques.

Formule de Van Deuren. — Van Deuren (1) a proposé une formule toute différente :

$$\Theta(x) \underline{\Omega} \sqrt{1 - e^{-\frac{4x^2}{\pi}}} \quad , x \geqslant 0 \tag{7}$$

qui donne lieu au tableau suivant :

TABLEAU IV

λ	0	0,1	0,4	0,7	1,1	1,9	2,0
$1 - \Theta(x)$	1	0,888	0,572	0,322	0,120	0,007	0,005
$1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{4x^2}{\pi}}}$	1	0,888	0,571	0,320	0,114	0,005	0,004

La plus grande erreur de ce tableau n'est plus que de 6 millièmes, soit trois fois moins forte que par notre première formule. Cependant, notre formule, paraît avoir une forme analytique plus avantageuse dans certains cas.

La formule de Van Deuren présente, d'autre part, comme celle de Borel et comme notre première formule, le précieux avantage de fournir aussi une expression simple approchée de la « fonction inverse » de (Θ).

On tire, en effet, en la résolvant par rapport à k [1]

de la formule de Borel :

$$k = \log_{10} \frac{1}{P(\varepsilon)}$$

de notre formule :

$$k = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \log_{10} \frac{1}{P(\varepsilon)}} - \frac{1}{2}$$

et en résolvant celle de Van Deuren :

$$x = \frac{\pi}{2} \sqrt{\log_e \left(\frac{1}{1 - \Theta^2} \right)}.$$

Formule de Darling. — Mentionnons enfin l'existence d'une expression approchée de $\Theta(x)$ donnant une approximation sensiblement meilleure que les précédentes, l'erreur ne dépassant pas quelques chances sur dix mille, comme le montre le tableau suivant.

TABLEAU V

x	0	0,6	0,7	1,5	3	$-\infty$
$\Theta(x)$	0	0,603.928	0,677.863	0,966.245	0,999.976.1	1
Fonction de Darling	0	0,603.856	0,677.801	0,966.105	0,999.977.1	1

(1) *Cours de Calcul des probabilités.* École militaire belge, polycopie. Première partie, 1930.

Mais l'expression en question due à B. C. Darling (1) :

$$\Theta(x) \underline{\Omega} \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ e^{-\sqrt{\pi}} \left(e^{\sqrt{\pi}} + x^2 \right)^2 \right\}^x - 1, \qquad x \geqslant o$$

est trop compliquée pour être pratiquement utile et ne peut guère constituer qu'une curiosité mathématique.

Formules asymptotiques. — En dehors de ces formules, valables pour toute valeur positive de x, il est souvent utile d'employer la formule asymptotique classique :

$$\Theta(x) \underline{\Omega} 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \tag{8}$$

pour x assez grand, formule dont on peut indiquer l'erreur en l'écrivant sous la forme plus précise (2).

$$\Theta(x) \underline{\Omega} 1 - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 - \frac{\omega(x))}{2x^2} \right] \qquad \text{où } o < \omega(x) < 1 \text{ pour } x \geqslant o. \tag{9}$$

D'après celle-ci, l'erreur absolue de la formule (8) est inférieure à 0,0007 pour $x > 2$ et à à 0,000.002 pour $x > 3$.

L'erreur relative sur $1 - \Theta(x)$, ici plus intéressante, est :

$$\frac{\dfrac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} - [1 - \Theta(x)]}{1 - \Theta(x)} = \frac{\omega(x)}{2x^2 - \omega(x)}. \tag{10}$$

En dérivant le premier membre, on voit qu'elle décroît de $+\infty$ à 0 quand x croît de 0 à $+\infty$. Elle est donc positive et d'après (10) elle est inférieure à $\frac{1}{2x^2 - 1}$, pour $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Elle est donc inférieure à $\frac{1}{10}$ pour $x > 3$, à $\frac{1}{100}$ pour $x > 8$, à $\frac{1}{1.000}$ pour $x \geqslant 23$, à $\frac{1}{10.000}$ pour $x \geqslant 71$ et décroît constamment en tendant vers 0.

D'autre part, pour x petit, $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$ est voisin de $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5642$ et on a :

$$\Theta(x) \underline{\Omega} 1{,}1284\, x \qquad \text{pour } x \text{ petit} \tag{11}$$

On peut ici, aussi, préciser en observant que pour $x \geqslant o$, $e^{-x^2} - 1 + x^2$ est une fonction croissante, nulle pour $x = 0$, de sorte que

$$1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant 1 \quad \text{d'où} \quad x - \frac{x^3}{3} \leqslant \int_o^x e^{-t^2}\, dt \leqslant x$$

et par suite on peut écrire

$$\Theta(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \omega \frac{x^2}{3} \right) \quad \text{où} \quad O < \omega < 1,\ x \geqslant 0.$$

L'erreur relative commise par la formule (11) est donc fournie par

$$o \leqslant \frac{\dfrac{2x}{\sqrt{\pi}} - \Theta(x)}{\Theta(x)} = \frac{\omega x^2}{3 - \omega x^2} < \frac{x^2}{3 - x^2} \text{ pour } 0 \leqslant x < \sqrt{3} \tag{12}$$

En dérivant le premier membre, on voit qu'elle décroît et tend vers o avec x; d'après (12) elle est déjà inférieure à $\frac{1}{200}$ pour $x \leqslant 0{,}1$.

---

(1) *An approximation to* $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_o^u e^{-t^2}\, dt$, *The quarterly Journal of Math.*, vol. XLIX, 1923, p. 37.

(2) Voir, par exemple, pour la démonstration, p. 219 de nos « *Recherches théoriques modernes sur le Calcul des Probabilités* », Premier livre, Gauthier-Villars, 1937, 308 pages.

Amélioration de notre première formule.

La formule (6) n'est pas la plus précise des précédentes, mais elle a le grand avantage de mieux se prêter à certaines intégrations dont le calcul est nécessaire en Statistique-Mathématique. Dans bien des cas, on pourrait donc la préférer telle qu'elle est, sa précision de l'ordre de 1/50e étant déjà suffisante dans beaucoup de questions pratiques. Toutefois, comme une plus grande précision est parfois nécessaire, il est souhaitable d'améliorer celle-ci à ce point de vue tout en conservant, à la formule, la même forme analytique et, par suite, son avantage au point de vue des intégrations considérées. Les tableaux I et XIII des pages 52 et 62 montrent qu'on peut ainsi atteindre une précision du même ordre que celle de van Deuren. A cet effet, nous allons d'abord transformer notre expression (6) approchée de P (ε) en une expression équivalente approchée de Θ (x).

Il faut d'abord exprimer $\frac{k(k+1)}{2}$ en fonction de x, au moyen de $x = k\,x'$, d'où

$$1 - \Theta(x) \;\underline{\Omega}\; \frac{1}{10^{\frac{x(x+x')}{2x'^2}}} = e^{-\frac{x(x+x')}{2\,M\,x'^2}}.$$

Ceci fait, on a une formule de la forme

$$(13) \qquad 1 - \Theta(x) \;\underline{\Omega}\; e^{-ax-bx^2} = 10^{-\alpha x-\beta x^2}$$

où les coefficients α, β, a et b prennent les valeurs particulières.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\,x'} = 0{,}429.913, \qquad a_1 = \frac{1}{2\,M\,x'} = 0{,}989.912$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2\,x'^2} = 0{,}369{,}651, \qquad \beta_1 = \frac{1}{2\,M\,x'^2} = 0{,}851.153,$$

qui ne sont pas des valeurs numériques simples.

Dès lors, se présente naturellement l'idée de choisir a et b de façon à diminuer l'erreur résultant de la formule (13) tout en lui conservant intégralement la simplicité de sa forme analytique.

Définitions diverses de la meilleure approximation.

Le problème à résoudre n'est cependant pas aussi déterminé qu'il peut sembler. En quel sens dira-t-on que l'approximation est meilleure? D'abord, doit-elle porter sur l'erreur absolue ou sur l'erreur relative?

Il serait vain de vouloir rendre très petit le maximum de l'erreur relative. En effet, on sait qu'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \Theta(x)}{\frac{1}{x\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}} = 1, \qquad \text{d'où}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-ax-bx^2} - [1 - \Theta(x)]}{1 - \Theta(x)} = x \lim_{\to +\infty} x\sqrt{\pi}\,e^{-ax+(1-b)x^2} - 1$$

quantité qui tend vers $+\infty$ pour $b < 1$, vers -1 pour $b > 1$, vers $+\infty$ pour $b = 1$, $a < o$ et vers -1 pour $b = 1$. $a > o$; enfin vers $+\infty$ pour $b = 1$, $a = o$.

Le maximum de l'erreur relative ne peut donc être abaissé en valeur au-dessous de la valeur 1.

Quant à l'erreur absolue, on peut chercher à diminuer : soit sa plus grande valeur, soit son ensemble de valeurs absolues en rendant minimum l'intégrale de son carré, ou celle de sa valeur absolue, etc...

Il y a donc un certain arbitraire dans le choix du meilleur système de valeurs à donner à a et b. Et il semble bien que, suivant l'usage, qu'on veut faire de la formule obtenue, telle ou telle convention sera plus indiquée. Par exemple, on pourra chercher à obtenir une bonne approximation absolue de $1 - \Theta(x)$, pour les probabilités non négligeables, c'est-à-dire pour des valeurs de x ne dépassant pas quelques unités. Ou bien, ou voudra obtenir une formule qui donne de bons résultats dans les intégrations et on devra chercher à obtenir une bonne erreur relative même pour des valeurs assez grandes de x.

Quoiqu'il en soit, voici la convention que nous avons faite et le résultat qu'elle a donné. Nous avons cherché les valeurs de a et de b rendant minimum l'intégrale :

$$V(a, b) = \int_o^{+\infty} \left\{ e^{-ax-bx^2} - [1 - \Theta(x)] \right\}^2 dx = \int_o^{+\infty} Q^2\,dx.$$

Cette convention qui rendra petite, non pas la plus grande des erreurs, mais l'ensemble

des erreurs, a l'avantage, non seulement d'être assez naturelle, mais de se prêter à un calcul simple des conditions assurant le minimum cherché.

Toutefois, la résolution mathématique numérique de ces conditions, qui conduit au calcul de a et de b, est assez pénible et pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous la reportons à la fin, page 66.

Contentons-nous de dire ici qu'en employant cette méthode, on trouve que la valeur de l'intégrale V (a, b) du carré de l'erreur se réduit à 0,000.360 pour :

(14) $a = 1{,}04$ $b = 0{,}835$

correspondant à $\alpha = 0{,}451.666.3$ $\beta = 0{,}362.635.9$

et qu'alors on obtient les tableaux XV et XVI de la page 69.

Méthodes empiriques.

La définition ci-dessus de la meilleure approximation (repérée ainsi par la valeur de V (a, b) est une des plus satisfaisantes, mais, comme nous l'avons dit plus haut, conduit à des transformations analytiques et à des calculs numériques longs et pénibles. Nous avions donc d'abord cherché à éviter ceux-ci en effectuant des choix de a et de b moins rationnels mais plus simples à effectuer. Il ne nous a pas paru inutile d'en reproduire maintenant les résultats pour montrer qu'ils conduisent à des systèmes de valeurs de a et de b (ou de α et de β) assez voisins les uns des autres et à des approximations assez bonnes. Et même, pour des raisons exposées page 61, ce sont les valeurs de a, b obtenues par la quatrième méthode empirique que nous avons retenues de préférence à celles fournies par la méthode rationnelle, pour les transformer en valeurs de l, m, γ, δ dans le résumé.

Première méthode empirique. — Il s'agit d'obtenir l'égalité approximative

$$10^{-\alpha x - \beta x^2} \underline{\Omega}\ 1 - \Theta(x) \qquad \text{ou encore}$$

(16) $$\alpha + \beta x \underline{\Omega} - \frac{1}{x} \log_{10} [1 - \Theta(x)]$$

Nous avons résolu par la méthode des moindres carrés les équations dites résiduelles linéaires en α, β, obtenues en substituant à x dans ces équations, certaines valeurs choisies assez arbitrairement, à savoir $x =$

0 (1); 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,4; 1; 1,5; 2; 3; 4; 4,5.

Ces douze équations ont fourni deux équations « normales » qui ont donné

(17) $$\alpha = 0{,}467.120.44\ \Omega\ 0{,}467.120$$
$$\beta = 0{,}367.555.8\ \ \Omega\ 0{,}367.556.$$

D'ailleurs, en posant :

$$10^{-\alpha x - \beta x^2} \equiv e^{-ax - bx^2}, \text{ on a en général}$$
$$\alpha = a\,\mathrm{M},\ \beta = b\,\mathrm{M}, \text{ avec } \mathrm{M} = \log_{10} e,$$

d'où ici

(17 *bis*) $$a = 1{,}075.584.5$$
$$b = 0{,}846.328.5.$$

En posant, comme plus loin $c = \dfrac{a}{2\sqrt{b}}$, on trouve :

$$c = 0{,}584.581.4$$

On a alors le tableau suivant.

Tableau VII

x	0	0,02	0,15	0,7	1,3	2,5	3,5
$1 - 10^{-\alpha x - \beta x^2}$	0	0,021.61	0,165.05	0,688.89	0,940.90	0,999.66	0,999.999.27
$\Theta(x)$	0	0,022.56	0,168.00	0.677,80	0,934.01	0,999.59	0,999.992.57

(1) Quand $x \to o$, le second membre de (16) tend vers $\mathrm{M}\left\{\frac{d}{dx}[\Theta(x) - 1]\right\}_{x=o} = \frac{2\mathrm{M}}{\sqrt{\pi}} = 0{,}490.06$ et le premier vers α. Nous avons donc pris pour première équation :

(18) $$\alpha\ \Omega\ 0{,}490.06.$$

Les différences entre les valeurs exactes et les valeurs approchées de $\Theta(x)$, qui allaient jusqu'à l'ordre de dix chances sur cent dans le tableau II relatif à la formule (5), deux chances sur cent dans le tableau III concernant la formule (6) se réduisent à onze chances sur mille dans le tableau VII relatif aux valeurs (17) de α, β. On va, plus loin, réduire encore ces différences.

Expressions des moments. — On peut, en effet, chercher à rapprocher les moments M_k, M'_k des deux distributions (c'est-à-dire les valeurs moyennes des puissances k^e d'une variable aléatoire vérifiant, pour M_k, la loi de Laplace, pour M'_k, son expression approchée). A cet effet, nous établirons plus loin, page 63 les expressions de M'_k en fonction de k. On trouve :

$$M'_0 = 1, \qquad M'_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, g(c) \tag{19}$$

avec

$$c = \frac{a}{2\sqrt{b}} \qquad \text{et}$$

$$g(c) = e^{c^2}\,[1 - \Theta(c)]\,. \tag{20}$$

et on prouve la relation

$$M'_k = a\,\frac{M'_{k+1}}{k+1} + 2\,b\,\frac{M'_{k+2}}{k+2} \tag{21}$$

qui permet de calculer de proche en proche, M'_3, M'_4.., M'_7..., à partir des expression (19) de M'_0 et M'_1.

D'autre part, on connait (1) les moments de la loi de Laplace :

$$M_{2n+1} = \frac{1.\,2.\,3.....\,n}{\sqrt{\pi}}, \quad M_{2n} = \frac{1.\,3.\,5.....\,(2n-3)\,(2n-1)}{2^n} \tag{22}$$

d'où en particulier

$$\begin{aligned} &M_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad M_5 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}, \quad M_7 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \\ &M_2 = \frac{1}{2}, \quad M_4 = \frac{3}{4}, \quad M_6 = \frac{15}{8}. \end{aligned} \tag{23}$$

Ces formules permettent de comparer les valeurs de M_1, M_4, par exemple, aux valeurs de M'_1..... M'_4 correspondant aux formules d'approximation indiquées plus haut et, d'autre part, d'obtenir d'autres formules en prenant a et b de sorte que les premières valeurs de $(M_k - M'_k)$ soient petites.

On obtient d'abord le

TABLEAU VIII

k	1	2	3	4
M_k	0,564.19	0,5	0,564.19	0,75
M'_k relatif au tableau II	0,505.08	0,512.55	0,780.19	1,583.45
M'_k relatif au tableau III	0,573.91	0,507.41	0,568.805	0,751.27
M'_k relatif au tableau VII	0,553.71	0,477.87	0,525.885	0,683.73

Deuxième méthode empirique. — La relation (21) est linéaire en a et b, on peut en profiter pour déterminer a et b par la méthode des moindres carrés appliquée au système obtenu en prenant les premières valeurs de k dans (22) (en fait, nous avons pris $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) et en y joignant la relation mentionnée en note en bas de la page 58. Nous avons, en outre, adopté le « poids » $\frac{1}{M_k}$ pour l'équation (21). On trouve ainsi :

$$a = 1{,}084.179 \qquad \alpha = 0{,}470.848$$
$$b = 0{,}725.767 \qquad \beta = 0{,}315.193$$
$$c = 0{,}636{,}315$$

(1) Voir, par exemple, les formules (194) de la p. 88 de nos Leçons de Statistique mathématique, Premier Cahier : *Introduction, Exposé préliminaires de Calcul des Probabilités*, polycopié, 119 pages, 1943, chez Tournier et Constans.

TABLEAU IX

x	0,05	0,1	0,25	0,50	1	1,50
$1 - 10^{-\alpha x - \beta x^2}$ $\Theta(x)$	0,054.48 0,056.37	0,109.24 0,112.46	0,271.23 0,276.33	0,514.96 0,520.50	0,836.33 0,842.70	0,961.58 0.966.10

x	2	2,50	3	3,50	4
$1 - 10^{-\alpha x - \beta x^2}$ $\Theta(x)$	0,993.73 0,995.32	0,999.29 0,999.59	0.999.94 0.999.98	0,999.996.90 0.999.992.57	0,999.999.88 0,999.999.98

La différence maximum est ainsi réduite à moins de sept chances sur mille.
Et on a le

TABLEAU X

k	1	2	3	4
M'_k M_k	0,574.20 0,564.19	0,520.09 0,5	0,604.06 0,564.19	0,831.63 0,75

Troisième méthode. — Nous avons aussi déterminé a et b de façon que les deux distributions voisines aient cette fois *exactement* les mêmes moments des deux premiers ordres, c'est-à-dire que, d'après (19), (21) et (23)

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}\, g(c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{\pi}\, c\, g(c)}{b} = \frac{1}{2}.$$

On détermine c par l'équation

$$h(c) = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{8} \qquad \text{avec} \qquad h(c) = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} - c\, g(c)}{g^2(c)}$$

puis b par

$$\sqrt{b} = \frac{\pi\, g(c)}{2}$$

et enfin $a = 2\, c\sqrt{b}$.

On trouve $c = 0{,}6175$
$a = 1{,}086.518$
$b = 0{,}773.999$, d'où $\alpha = 0{,}471.864$
$\beta = 0{,}336.140$

TABLEAU XI

x	0,05	0,1	0,25	0,5	1
$1 - 10^{-\alpha x - \beta x^2}$ $\Theta(x)$	0,054.7 0,056.37	0,109.87 0,112.46	0,275.35 0,276.33	0,521.33 0,520.50	0,844.40 0,842.70

a	1,5	2	2,5	3
$1 - 10^{-\alpha x - \beta x^2}$ $\Theta(x)$	1,965.65 0,966.105	0.990.58 0,995.32	0,999.81 0,999.59	0,999.97 0,999.98

La plus grande des différences est même devenue ici inférieure à cinq chances sur mille. Et on a :

TABLEAU XII

k	1	2	3	4
M'_k	0,564.19	0,499.99	0,566.99	0,761.35
M_k	0,564.19	0,5	0,564.19	0,75

Quatrième méthode. — Les trois méthodes précédentes conduisent à des calculs littéraux immédiats et des calculs numériques assez rapides. Une quatrième méthode, un peu plus rationnelle, donne des calculs un peu plus longs, moins longs encore cependant que la méthode rationnelle exposée en premier lieu.

Elle consiste à observer que, pour obtenir a et b, il suffit de poser l'égalité de deux moments des deux répartitions voisines et que si l'on pose

$$M'_2 = M_2, \quad M'_3 = M_3 \tag{24}$$

on peut justifier ce choix (qui n'entraîne pas, de soi, des valeurs voisines de $1 - \Theta(x)$ et de de e^{-ax-bx^2}), par une application de la méthode des moindres carrés formulée en introduisant un poids convenable.

En effet, nous verrons un peu plus loin que dans les équations (38), (39) de la page 64, s'il n'y avait pas le facteur e^{-ax-bx^2}, ces équations se réduiraient précisément à (24). Appelons a', b' le système de valeurs de a, b que nous voulons chercher. Il est clair qu'on fera disparaître le facteur gênant si l'on introduit le poids $e^{a'x+b'x^2}$.

En résumé, comme nous allons le prouver directement quelques lignes plus loin, ces équations (38), (39) peuvent être considérées comme représentant le système de conditions que doivent vérifier a', b' pour que l'estimation pondérée de l'erreur, fournie par la formule

$$\int_0^{+\infty} \left\{ e^{-ax-bx^2} - [1 - \Theta(x)] \right\}^2 e^{+a'x'+b'x'^2}\, dx \tag{25}$$

et calculée pour des valeurs variables de a et de b soit minimum quand $a = a'$ et $b = b'$

C'est là une justification supplémentaire *a posteriori* de la convention (24), justification qui est assez artificielle, mais qui peut conduire à considérer cette convention comme un peu moins arbitraire que la convention faite précédemment :

$$M'_1 = M_1, \quad M'_2 = M_2$$

L'expression (25) a, quand a, b varient, un minimum obtenu pour des valeurs de a et de b annulant les dérivées de (25) par rapport à a et b. Si ces valeurs sont précisément a' et b', ces équations sont

$$\int_0^{+\infty} \left\{ e^{-a'x-b'x'} - 1 + \Theta(x) \right\} x\, dx = o$$

$$\int_0^{+\infty} \left\{ e^{-a'x-b'x^2} - 1 + \Theta(x) \right\} x^2\, dx = o.$$

de la forme

$$\int_0^{+\infty} Q(x)\, x^k\, dx = o, \qquad k = 1,2. \qquad \text{Mais}$$

$$\int_0^{+\infty} Q(x)\, x^k\, dx = \frac{1}{k+1}\Big[Q(x)\, x^{k+1}\Big]_0^{+\infty} - \frac{1}{k+1}\int_0^{+\infty} x^{k+1}\, dQ(x)$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big[M'_{k+1} - M_k\Big]$$

D'où

$$M'_{k+1} = M_k, \qquad (k = 1, 2)$$

c'est le système (24).

On observera que dans l'intégrale (25), la fonction $e^{a'x+b'x^2}$ qui joue le rôle de poids tend vers l'infini avec x. Elle accroît donc le rôle des grandes erreurs, c'est-à-dire que la méthode actuelle devrait renforcer la précision de l'approximation pour les grandes valeurs de la variable, tandis que, par exemple, la première méthode empirique ne tenait aucun compte de ces valeurs. Il en résulte que la solution de la méthode actuelle sera plus appropriée aux intégrations sur un domaine s'étendant à l'infini.

Nous indiquerons plus loin comment on déduit numériquement a et b des conditions (24). On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1{,}062.989.4 \\ b = 0{,}797.396.7 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \beta = 0{,}461.650.4 \\ \alpha = 0{,}346.305.0 \end{array}\right.$$

$$c = 0{,}595.198.4$$

Si les calculs étaient exacts, on devrait trouver

$$M'_2 = M_2 = 0{,}5 \quad ; \quad M'_3 = M_3 = 0{,}564.189.6;$$

en fait, on trouve

$$M'_2 = 0{,}500.000.0 \quad , \quad M'_3 = 0{,}564.191.6$$

l'écart n'étant que de 2 millionièmes. On constate, en outre, des égalités approximatives qui qui n'étaient pas assurées d'avance :

$$M'_1 = 0{,}565.67 \quad \text{au lieu de} \quad M'_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}564.189.6.$$

$$M'_4 = 0{,}752.67 \quad — \quad M_4 = 0{,}75$$

$$M'_5 = 1{,}141.92 \quad — \quad M_5 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1{,}128.379.2$$

$$M'_6 = 1{,}918.38 \quad — \quad M_6 = 1{,}875$$

$$M'_7 = 3{,}520.45 \quad — \quad M_7 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} = 3{,}385.137.6$$

Et on peut dresser le tableau suivant.

TABLEAU XIII

x	0	0,02	0,05	0,1	0,15	0,25
$1 - \Theta(x)$	1	0,977.435.6	0,943.628.2	0,887.537.0	0,832.004.1	0,723.673.7
$10^{-\alpha x - \beta x^2}$	1	0,978.652.5	0,946.350.0	0,892.014.5	0,837.453	0,729.362.3

x	0,5	0,7	1	1,3	1,5
$1 - \Theta(x)$	0,479.500.1	0,322.199.0	0.157.299.2	0,065.992.0	0,033.894.8
$10^{-\alpha x - \beta x^2}$	0,481.502.4	0,321.480.9	0,155.612.5	0,065.252.8	0,033.755.0

x	2,0	2,5	3	3,5	4
$1 - \Theta(x)$	0,004.677.7	0,000.470.0	0,000.022.1	0,000.000.743.09	0,000.000.015.42
$10^{-\alpha x - \beta x^2}$	0,004.914.5	0,000.480.25	0,000.031.5	0,000.001.386.7	0,000.000.040.975

SECONDE PARTIE

Annexe : *Démonstrations mathématiques des résultats de la première partie.*

I. — *Calcul des moments.*

A la page 52, nous avons introduit les quantités

(26) $$M'_k = \int_0^{+\infty} x^k \, d\left[1 - e^{-ax - bx^2}\right] = \int_0^{+\infty} x^k \, d\left(-e^{-ax - bx^2}\right).$$

Pour établir la relation (21) écrivons, d'une part

(27) $$M'_k = \int_0^{+\infty} x^k \, e^{-ax - bx^2} (a + 2\,bx) \, dx,$$ d'autre part

en intégrant (21) par parties

$$M'_k = \left[x^k\left(-e^{-ax-bx^2}\right)\right]_o^{+\infty} + k\int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\, x^{k-1}\, dx, \text{ d'où}$$

(28) $$M'_k = k\int_o^{+\infty} x^{k-1}\, e^{-ax-bx^2}\, dx$$

d'où l'on déduit que (27) peut s'écrire sous la forme annoncée (21)

D'autre part, on sait que $M'_o = 1$ et on a, d'après (28)

$$M'_1 = \int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\, dx = e^{\frac{a^2}{4b}} \int_o^{+\infty} e^{-b\left(x+\frac{a}{2b}\right)^2} dx$$

d'où, en posant

$$y = \sqrt{b}\left(x + \frac{a}{2b}\right)$$

$$M'_1 = \frac{e^{\frac{a^2}{4b}}}{\sqrt{b}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{b}}}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{e^{c^2}}{\sqrt{b}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 - \Theta(c)\right]$$

ce qui établit la formule (19). On en déduit.

(29) $$M'_2 = \frac{1 - \sqrt{\pi}\, c\, g(c)}{b}$$

en faisant $k = o$ dans (21) et on calcule de même M'_3, M'_4...

II. — *Calcul de a et de b par la quatrième méthode empirique.*

En faisant $k = o$ et $k = 1$ dans (21), les conditions (24) deviennent, en tenant compte de (23) :

(30) $$\frac{1 - a\, M'_1}{b} = \frac{1}{2}\ ; \qquad 3\left(\frac{2\, M'_1 - \frac{a}{2}}{4\, b}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

En portant M'_1, tirée de la première équation (30) dans la seconde, on aura :

$$\frac{3}{4\, b}\left[\frac{2 - b}{a} - \frac{a}{2}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ou :

(31) $$6\, c^2\,(4 - a^2) = a^2\left(3 + \frac{4\, a}{\sqrt{\pi}}\right)$$

et en le portant dans (19), on a :

(32) $$1 - \sqrt{\pi}\, c\, g(c) = \frac{a^2}{8\, c^2}.$$

En éliminant a entre (31) et (32) et posant pour simplifier l'écriture :

(33) $$\omega(c) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} - c\, g(c),$$

on a une équation en c

(34) $$\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} - (2\, c^2 + 1)\, \omega(c)\right]^2 - \left(\frac{128}{9\sqrt{\pi}}\right) c^2\, \omega^3(c) = o.$$

Ayant résolu cette équation en c, on aura :

(35) $$a^2 = 8\sqrt{\pi}\, c^2\, \omega(c), \text{ d'où } a, \text{ puis}$$

(36) $$b = \frac{a^2}{4\, c^2} = 2\, \omega(c)\sqrt{\pi},$$

et :

(37) $$\alpha = a\, M \qquad \beta = b\, M$$

Pour résoudre cette équation (34), on peut employer une quelconque des méthodes de calcul des racines d'une équation non algébrique. On trouve ainsi qu'il y a une racine entre 0,595 et 0,598. En appelant U (c) le premier membre de (34), nous avons fait calculer le tableau suivant :

c U (c)	0,595 — 0,000.150	0,595.1 0,000.001.17	0,595.18 — 0,000.000.19	0,595.189 — 0,000.000.02	
c U (c)	0,595.195 + 0,000.000.20	0,595.20 + 0,000.000.14	0,595.5 + 0,000.004.30	0,596 + 0,000.010	0,598 0,000.034

On voit que U (c) est très petit au voisinage de $c = 0,5952$. Pour obtenir une plus grande précision, les septième et huitième décimales étant, dans les moyens de calcul employés, assez incertaines, nous avons fait une interpolation parabolique qui nous a donné :

$$c = 0,595.198.4 \qquad (\text{avec U}(c) = +\ 0,000.000.4)$$

d'où, calculés comme il a été indiqué plus haut, on tire les valeurs de a et b indiquées p. 58.

III — *Calcul de* a *et de* b *par la méthode rationnelle.*

Nous avons vu qu'une convention assez naturelle consisterait à prendre comme valeurs de a et de b celles qui rendent minimum l'intégrale V (a, b) de la p. 57.

L'intégrale considérée est une fonction de a et de b qui est continue, dérivable et toujours $\geqslant o$. Elle a donc un minimum et ce minimum est atteint pour au moins un système de valeurs de a et de b vérifiant les équations :

(38) $\dfrac{\partial V}{\partial a} = o, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b} = o$, c'est-à-dire, avec les notations de la p. 57 :

(39) $\int_o^{+\infty} Q\, e^{-ax-bx^2}\, x\, dx = o \qquad \int_o^{+\infty} Q\, e^{-ax-bx^2}\, x^2\, dx = o.$

C'est ce système qu'il s'agit de résoudre. Il ne nous paraît pas inutile de reproduire ici les calculs littéraux assez compliqués qui vont être exposés en vue de cette résolution, parce que plusieurs des formules intermédiaires (et en particulier la formule (48)) peuvent être utiles, comme nous l'avons éprouvé, dans d'autres questions de Statistique mathématique.

Comme de toutes façons, il est utile de calculer le minimum de V (a, b), nous allons, avant de le dériver, transformer V (a, b) en une expression ramenant son calcul à celles de fonctions dont on a des tables ou dont on peut facilement dresser une table.

Calcul de V (a, b). — On peut écrire, en posant :

$$Q = e^{-ax-bx^2} - [1 - \Theta(x)], \quad V(a, b) = \int_o^{+\infty} Q^2\, dx = \left[x\, Q^2\right]_o^{+\infty} - 2\int_o^{+\infty} x\, Q\, d\, Q$$

$$= -2\int_o^{+\infty} x\,[e^{-ax-bx^2} + \Theta(x) - 1]\left[d\, e^{-ax-bx^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}\, dx\right].$$

(40) $$\frac{1}{2}\, V(a, b) = -\int_o^{+\infty} x\, d\, \frac{1}{2}\left[e^{-ax-bx^2}\right]^2 - \int_o^{+\infty} x\, \Theta(x)\, d\, e^{-ax-bx^2}$$

$$+ \int_o^{+\infty} x\, d\, e^{-ax-bx^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^{+\infty} x\, e^{-ax-bx^2-x^2}\, dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^{+\infty} x\, \Theta(x)\, e^{-x^2}\, dx$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx$$

La seconde intégrale peut s'écrire :

$$\left[x\, \Theta(x)\, e^{-ax-bx^2}\right]_o^{+\infty} - \int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\, \Theta(x)\, dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^{+\infty} x\, e^{-ax-bx^2-x^2}\, dx,$$

où le dernier terme vient réduire le quatrième terme de $\frac{1}{2}$ V (a, b). On a donc :

$$\frac{1}{2}V(a,b) = -\left[\frac{x\, e^{-2ax-2bx^2}}{a}\right]_o^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_o^{+\infty} e^{-2ax-2bx^2}\, dx + \int_o^{+\infty} \Theta(x)\, e^{-ax-bx^2}\, dx$$

$$+ \left[x\, e^{-ax-bx^2}\right]_o^{+\infty} - \int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_o^{+\infty} \Theta(x)\, d\, e^{-x^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_o^{+\infty} d e^{-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_o^{+\infty} e^{-2ax-2bx^2}\,dx + \int_o^{+\infty} \Theta(x)\, e^{-ax-bx^2}\,dx - \int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\,dx$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[\Theta(x)\, e^{-x^2}\Big]_o^{+\infty} - \frac{2}{\pi\sqrt{2}}\int_o^{+\infty} e^{-2x^2}\,dx\,\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big(e^{-x^2}\Big)_o^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{M} + \mathrm{I} - \mathrm{N} - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

ou :

(41) $$\mathrm{V}(a, b) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Big[2 - \sqrt{2}\Big] = \mathrm{M} - 2\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{I}.$$

On calcule facilement en général, pour $m > o$:

(42) $$\int e^{-mx^2+kx+p}\,dx = e^{p+\frac{k^2}{4m}}\int e^{-m\left(x-\frac{k}{2m}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\, e^{p+\frac{k^2}{4m}}\,\Theta\left(\sqrt{m}\left(x - \frac{k}{2m}\right)\right)$$

d'où :

(43) $$\int_o^{+\infty} e^{-mx^2+kx+p}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}\, e^{p+\frac{k^2}{4m}}\left[1 + \Theta\left(\frac{k}{2\sqrt{m}}\right)\right]$$

et en particulier

(44) $$\mathrm{N} = \int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{c^2}\Big[1 - \Theta(c)\Big], \text{ en posant } c = \frac{a}{2\sqrt{b}}$$

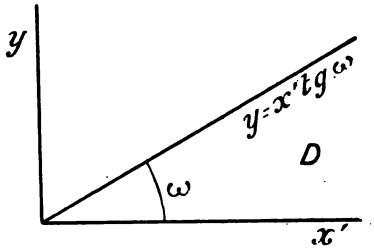
$$\mathrm{M} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2b}}\, e^{2c^2}\Big[1 - \Theta\left(c\sqrt{2}\right)\Big].$$

Il reste à calculer

(45) $$\mathrm{I} = \int_o^{+\infty} \Theta(x)\, e^{-ax-bx^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_o^{+\infty} e^{-ax-bx^2}\int_o^{x} e^{-y^2}\,dy\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi b}}\iint_{\mathrm{D}} e^{-x'^2-y^2-2cx'}\,dx'\,dy \qquad \text{en posant } x' = x\sqrt{b}$$

D étant le domaine (fig. 1) : $o \leqslant y \leqslant \frac{x'}{\sqrt{b}} = x' \operatorname{tg}\omega$; $\quad x' \geqslant o$.



(Fig. 1).

En passant en coordonnées polaires :

$$\sqrt{\pi b}\,\frac{1}{2} = \int_o^{\omega}\int_o^{+\infty} e^{-\rho^2-2c\rho\cos\varphi}\,\rho\,d\rho\,d\varphi$$

$$= \int_o^{\omega} e^{c^2\cos^2\varphi}\,\mathrm{J}(\varphi)\,d\varphi \quad \text{avec}$$

$$\mathrm{J}(\varphi) = \int_o^{+\infty} e^{-(\rho+c\cos\varphi)^2}\,\rho\,d\rho = \int_{c\cos\varphi}^{+\infty} e^{-u^2}(u - c\cos\varphi)\,du$$

$$= \left(\frac{e^{-u^2}}{-2}\right)_{c\cos\varphi}^{+\infty} - c\cos\varphi\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_o^{c\cos\varphi} e^{-u^2}\,du\right]$$

$$= \frac{e^{-c^2\cos^2\varphi}}{2} - \frac{c\cos\varphi\sqrt{\pi}}{2} + c\cos\varphi\int_o^{c\cos\varphi} e^{-u^2}\,du$$

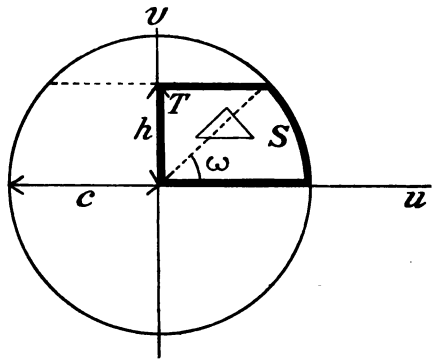
$$\sqrt{\pi b}\, I = \int_0^\omega \left[1 - \sqrt{\pi}\, e^{c^2 \cos^2\varphi}\, c \cos\varphi + 2\, e^{c^2\cos^2\varphi}\, c \cos\varphi \int_0^{c\cos\varphi} e^{-u^2}\, du\right] d\varphi$$

$$= \omega - \sqrt{\pi}\, e^{c^2} \int_0^\omega e^{-c^2 \sin^2\varphi}\, dc \sin\varphi + 2\, e^{c^2} \int_0^\omega \left[\int_0^{c\cos\varphi} e^{-u^2}\, du\right] e^{-c^2\sin^2\varphi}\, d\, c \sin\varphi$$

$$= \omega - \sqrt{\pi}\, e^{c^2} \int_0^\omega e^{-v^2}\, dv + 2\, e^{c^2} \int_0^h \int_0^{\sqrt{c^2 - v^2}} e^{-u^2 - v^2}\, du\, dv = \omega + e^{c^2}\left[2\,R - \frac{\pi}{2}\Theta(h)\right]$$

en posant $h = c \sin\omega$, avec $\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{\sqrt{b}}$.

Reste : $R = \int_0^h \int_0^{\sqrt{c^2 - v^2}} e^{-u^2 - v^2}\, du\, dv.$



(Fig. 2).

C'est l'intégrale de $e^{-u^2 - v^2}\, du\, dv$ étendue au domaine Δ limité en traits pleins (fig. 2). Il se décompose en un secteur S et un triangle T et on a :

$R = \iint_S + \iint_T$, avec

$$\iint e^{-u^2 - v^2}\, du\, dv = \int_0^\omega \int_0^c e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \omega \left(\frac{e^{-r^2}}{-2}\right)_0^c = \frac{\omega}{2}\left(1 - e^{-c^2}\right)$$

$$\iint_T e^{-u^2 - v^2}\, du\, dv = \int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{h}{\sin\varphi}} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{e^{-r^2}}{-2}\right)_0^{\frac{h}{\sin\varphi}} d\varphi = \frac{1}{2}\int_\omega^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - e^{-\frac{h^2}{\sin^2\varphi}}\right] d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \omega\right] - \frac{1}{2}\int_\omega^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{h^2}{\sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$R = \frac{\pi}{4} - \frac{\omega}{2} e^{-c^2} - \frac{1}{2}\int_0^\psi e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta, \text{ en posant } \psi = \frac{\pi}{2} - \omega. \text{ D'où}$$

$$\sqrt{\pi b}\, I = \omega + e^{c^2}\left[\frac{\pi}{2} - \omega\, e^{-c^2} - \int_v^\psi e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta - \frac{\pi}{a}\Theta(h)\right]$$

$$= e^{c^2}\left\{\frac{\pi}{2}\left[1 - \Theta(h)\right] - \int_0^\psi e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta\right\}$$

et en posant :

(46) $$G(\psi, h^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^\psi e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\, d\theta$$

(47) avec $h = c\cos\psi$, $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{b}$, on a :

(48) $$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{c^2}\left[1 - \Theta(h) - G(\psi, h^2)\right].$$ D'où enfin :

(49) $$V(a, b) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[2 - \sqrt{2}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{2c^2}\left[1 - \Theta\left(c\sqrt{2}\right)\right] + e^{c^2}\left[\Theta(c) - \Theta(h) - G(\psi, h^2)\right]\right\}$$

On déduit de l'expression (49) de V $(a\ b)$, qui est aussi une fonction de h et de c, soit $l\,(h, c)$, les équations du minimum de V (a, b).

Exprimons d'abord explicitement $l\,(h, c)$ en fraction de h et c. On a:

$$(50)\qquad \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1}{tg\,\psi} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}; \quad \text{d'où}$$

$$(51)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[l\,(h, c) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}(2 - \sqrt{2})\right] = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{2c^2}\left[1 - \Theta\,(c\sqrt{2})\right]\right.$$
$$\left. + e^{c^2}\left[\Theta\,(c) - \Theta\,(h) - G\,(\psi, h^2)\right]\right\}.$$

Avant de dériver le second membre, calculons d'avance :

$$\frac{\partial}{\partial h}\,G\,(\psi, h^2) = \frac{2}{\pi}\,e^{-\frac{h^2}{\cos^2\psi}}\,\frac{\partial\psi}{\partial h} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\psi} e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\,\frac{h\,d\,\theta}{\cos^2\theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\,G\,(\psi, h^2) = \frac{2}{\pi}\,e^{-\frac{h^2}{\cos^2\psi}}\,\frac{\partial\psi}{\partial c}.$$

Or, comme $\cos\psi = \frac{h}{c}$, on a :

$$e^{-\frac{h^2}{\cos^2\psi}} = e^{c^2},\ -\sin\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial R} = \frac{1}{C};\ -\sin\psi\,\frac{\partial\psi}{\partial c} = \frac{-h}{e^2},\ \sin\psi = \frac{\sqrt{c^2 - h^2}}{c},$$

et d'autre part :

$$\int_c^{\psi} e^{-\frac{h^2}{\cos^2\theta}}\,\frac{R\,d\,\theta}{\cos^2\theta} = e^{-h^2}\int_c^{\psi} e^{-h^2\,tg^2\theta}\,d\,h\,tg\,\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-h}\,\Theta\,(h\,tg\,\psi)$$

avec $\quad h\,tg\,\psi = \sqrt{c^2 - h^2}$, d'où

$$\frac{\partial}{\partial h}\,G\,(\psi, h^2) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{c^2 - h^2}} + \sqrt{\pi}\,e^{-h^2}\,\Theta\left(\sqrt{c^2 - h^2}\right)\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial c}\,G\,(\psi, h^2) = \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{c}\,\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{c^2 - h^2}}.$$

On a donc pour première condition du minimum :

$$(52)\quad o = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\partial\,l\,(h, c)}{\partial\,c} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\left\{\frac{4\,c}{2\sqrt{2}}\,e^{2c^2}\left[1 - \Theta(c\sqrt{2})\right] + \frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{2c^2}\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-2c^2}\sqrt{2}\right)\right.$$
$$\left. + e^{c^2}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2} - \frac{2}{\pi}\,\frac{h}{c}\,\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{c^2 - h^2}} + 2\,c\,e^{c^2}\left[\Theta\,(c) - \Theta\,(h) - G\,(\psi, h^2)\right]\right]\right\}$$
$$- \frac{h\,c}{\sqrt{c^2 - h^2)^3}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{2c^2}\left[1 - \Theta\,(c\sqrt{2})\right] + e^{c^2}\left[\Theta\,(c) - \Theta\,(h) - G\,(\psi, h^2)\right]\right\}$$

ou :

$$(53)\qquad c\,[4\,(c^2 - h^2) - 1]\,\frac{e^{2c^2}}{2\sqrt{2}}\left[1 - \Theta\,(c\sqrt{2})\right]$$
$$+ c\,[2\,(c^2 - h^2) - 1]\,e^{c^2}\left[\Theta\,(c) - \Theta\,(h) - G\,(\psi, h^2)\right] + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(c^2 - h^2) - \frac{2\,h\sqrt{c^2 - h^2}}{\pi\,c} = o.$$

D'autre part :

$$(54)\quad o = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\partial\,l\,(h, c)}{\partial\,h} = \frac{h}{\sqrt{c^2 - h^2}}\,e^{c^2}\left\{\frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{-c^2}}{\sqrt{c^2 - h^2}} + \sqrt{\pi}\,e^{-h^2}\,\Theta\left(\sqrt{c^2 - h^2}\right)\right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-}\right\}$$
$$+ \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - h^2)^3}}\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}\,e^{2c^2}\left[1 - \Theta\,(c\sqrt{2})\right] + e^{c^2}\left[\Theta\,(c) - \Theta\,(h) - G\,(\psi, h^2)\right]\right\}.$$

On a ainsi les deux équations minimisantes (53)et (54) en c, h. On peut en déduire une équation en termes finis, ce qui est plus commode pour le calcul numérique en éliminant $G\,(\psi, h^2)$ entre ces deux équations, ce qui donne :

$$(55)\quad \frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{h}{c}\sqrt{c^2 - h^2} + 2\,\frac{h}{c}\left[1 - 2\,(c^2 - h^2)\right]e^{c^2 - h^2}\left[1 - \Theta\sqrt{(c^2 - h^2)}\right]$$

$$- c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{2c^2}\left[1 - \Theta\left(c\sqrt{2}\right)\right] = 1.$$

Et en combinant (53) et (54), on obtient une équation un peu plus simple que (53) :

$$(56)\qquad 2c\sqrt{\pi}\left\{ e^{c^2}\left[\Theta(h) + G(\psi, h^2) - \Theta(c)\right] - \frac{e^{2c^2}}{\sqrt{2}}\left[1 - \Theta\left(c\sqrt{2}\right)\right]\right\}$$
$$+ \frac{2h}{c}\, e^{c^2 - h^2}\left[1 - \Theta\left(\sqrt{c^2 - h^2}\right)\right] = 1.$$

Il faut résoudre ce système d'équations (56), (55), qu'on peut écrire (en retranchant l'unité) sous la forme :

$$L(h, c) = o, \qquad K(h, c) = o.$$

Il est naturel de penser que les systèmes de valeurs de (h, c) qui rendent petite l'erreur commise en remplaçant $\Theta(x)$ par $1 - e^{-ax - bx^2}$, sont des solutions approchées de ce système. C'est ce qui a lieu, en effet. Nous avons fait calculer les valeurs de L (h, c) et de K (h, c) pour des couples de valeurs de (h, c) identiques à ceux indiqués plus haut (ou voisins de ces couples) comme réalisant une assez bonne approximation. On a ainsi formé le tableau suivant :

TABLEAU XIV

Notations pour le système $(h\,c)$:				
h	0,394.400.2	0,418.261.0	0,430.508.0	0,444.940.4
c	0,536.587.3	0,567.182.2	0,584.920.8	0,596,286.6
L (h, c)	0,013.545.8	—0,000.112.6	— 0,013.877.5	0,001.243.0
K (h, c)	0,006.439.8	0,000.122.1	0,005.686.8	0,000.357.7
h	0.454.101.7	0,463.822.9		
c	0.607.547.4	0,617.773.2		
L (h, c)	— 0,002.683.6	— 0,001.369.9		
K (h, c)	— 0,001.311.1	— 0.000.899.8		

On voit que toutes ces valeurs de L et de K sont, en valeurs absolues, petites : inférieures à 2 centièmes et sont, même, pour certains couples de valeurs de h et c, toutes deux inférieures à 2 millièmes. Les valeurs cherchées de h et de c qui doivent annuler exactement L et K sont donc vraisemblablement voisines de 0,4 et 0,6 respectivement. On a observé d'ailleurs que ces différents couples de valeurs sont représentés par des points sensiblement alignés. (La droite $h = 0,855\,c - 0,0644$ passe près de tous ces points.) Autrement dit, les courbes L $(h, c) = o$, K $(h, c) = o$ dont l'intersection doit donner le point cherché ont chacune un arc très voisin de cette droite et par suite l'intersection est mal déterminée.

Pour obtenir un plus grand nombre de décimales exactes dans les valeurs de a et b correspondant au minimum, nous avons fait déterminer les valeurs de V (a, b) pour un certain nombre de points de coordonnées a et b. Le graphique ci-contre (fig. 3) met en évidence la représentation en géométrie cotée de la surface $z = V(a, b)$. Nous avons fait tracer approximativement quelques lignes de niveaux (1) correspondant aux valeurs :

0,000.400; 0,000.375; 0,000.360

de V (a, b). D'après le graphique, on peut admettre que le point cherché est à l'intérieur de la courbe V = 0,360. Choisissant un point assez central dans la région ainsi limitée, nous avons pris :

$$(57)\qquad a = 1,04 \qquad b = 0,835, \text{ d'où}$$

$$\alpha = 0,451.666.3 \qquad \beta = 0,362.635.9, \qquad c = 0,569.062.7$$

pour lequel :

$$h = 0,420.089.8;\ V(a, b) = 0,000.357;\ K(h, c) = 0,000.287.8;\ L(h, c) = 0,000,404.3$$

(1) Le tracé de ces courbes est très approximatif. En outre, il résulte d'un ajustement graphique et non d'une interpolation, de sorte que l'on doit considérer les cotes marquées obtenues par un calcul direct comme des valeurs approchées : les points correspondants peuvent être à l'extérieur d'une courbe de niveau dont la cote est plus grande et inversement. Mais ces approximations suffisent dans le cas actuel.

Mais on voit sur le graphique que si l'on change les deuxièmes décimales de a et b d'une unité, V (a, b) ne variera que de 0,000.01. On peut donc admettre qu'une variation de 0,01 sur a et b ne changerait pas sensiblement en valeur absolue l'erreur commise sur le minimum, c'est-à-dire conduirait à une approximation à peu près équivalente de $\Theta(x)$.

Pour se rendre compte de la signification de la valeur de V, observons qu'on a

$$V(a, b) = \int_0^{+\infty} Q^2(x)\,dx > \int_{J(\varepsilon)} Q^2(x)\,dx > \varepsilon^2 J(\varepsilon)$$

où J (ε) est la somme des longueurs des intervalles où $|Q(x)| > \varepsilon$.

Pour le système de valeurs (57), on a donc :

$$J(\varepsilon) < \frac{0{,}000.357}{\varepsilon^2}$$

De sorte que la longueur totale de l'ensemble des intervalles où e^{-ax-bx^2} diffère de $1 - \Theta(x)$ d'au moins 1/100, par exemple, en valeur absolue, est inférieure à 4, (Q (x) étant $< 1/100$ sur tout le reste de la demi-droite indéfinie $(o, +\infty)$).

Bien entendu, en réalité, cette longueur, si elle n'est pas nulle, est bien inférieure à 4, comme le montre le tableau suivant.

TABLEAU XV

Pour $a = 1{,}04$; $b = 0{,}835$.

x	0	0,02	0,05	0,1	0,15	0,25
$1 - \Theta(x)$	1	0,977.435.6	0,943.628.2	0,887.537.0	0,832.004.1	0,723.673.7
e^{-ax-bx^2}	1	0,981.344.8	0,947.348.9	0,893.731.6	0,839.637.5	0,731.844.3

a	0,5	0,7	1	1,3	1,5
$1 - \Theta(x)$	0,479.500.1	0,322.199.0	0,157.299.2	0,065.992.0	0,033.894.8
e^{-ax-bx^2}	0,482.511.2	0,320.731.8	0,153.354.9	0,063.092.7	0,032.104.8

x	2,0	2,5	3	3,5	4
$1 - \Theta(x)$	0,004.677.7	0,000.470.0	0,000.022.1	0,000,000.7	0,000.000.0...
e^{-ax-bx^2}	0,004.427.2	0,000.402.1	0,000.065.4	0,000.000.9	0,000.000.0...

On voit sur le tableau XV que l'erreur absolue maximum ne dépasse pas huit chances sur mille.

Nous terminerons par la comparaison des moments M_k de $\Theta(x)$ et M'_k de $1 - e^{-ax-bx^2}$ pour les mêmes valeurs de a et de b.

TABLEAU XVI

k	1	2	3	4
M_k	0,564.19	0,5	0.564.19	0,75
M'_k	0,564.382.6	0.494.661.0	0,551.782.4	0,726.650

k	5	6	7
M_k	1,128.379.2	1,875	3,385.137.6
M'_k	1,086.386.8	1.798.856.2	3,246.763.8

DISCUSSION

M. Risser. — M. Fréchet, dans sa très intéressante communication, nous a montré que l'on pouvait dans bon nombre de cas, substituer à la première et à la seconde formule de Laplace des formules approchées qui rendent les plus grands services. C'est ainsi qu'il a été amené — à propos de la première formule de Laplace — à remplacer une formule approchée due à M. Borel, par une autre fournissant une approximation plus grande, puis avec la deuxième formule de Laplace, à remplacer d'une manière heureuse une formule approchée due à M. Van Deuren.

A ce propos, on peut rappeler que Hermann Laurent, développant l'expression du nombre des vivants à l'âge x, en une série d'exponentielles, a été conduit à considérer deux formules du type suivant :

$$f(x) = f(a) + (\alpha^x - \alpha^a) f(a, b),$$
$$f(x) = f(a) + (\alpha^x - \alpha^a) f(a, b,) + (\alpha^x - \alpha^a)(\beta^x - \beta^b) f(a, b, c),$$

(voir note sur une formule d'interpolation par H. Laurent. *Bulletin de l'Institut des Actuaires français*, 1892), et montré que si les âges a, b, c... ont un diviseur commun assez grand, pour que $10^{1/n}$, soit voisin de 1, on pourra prendre $\alpha = \beta = \ldots = 10^{1/n}$, de sorte que les nombres α^a, α^b,... se réduisent à des puissances de 10.

On peut aussi faire remarquer que l'emploi d'expressions du type $(\beta + e^{a + bx + cx^2})$, peut être utilisé pour définir le taux instantané de mortalité, comme nous avons eu l'occasion de le constater en étudiant, d'une façon générale, la mortalité professionnelle, et en particulier celle des ouvriers mineurs (Voir le *Bulletin de l'Institut des Actuaires français*, 1909 et 1913).

M. Fréchet fait remarquer à M. Risser que la formule faisant l'objet de cette communication a le même but que celle de Van Deuren, au point de vue numérique, mais n'en est pas une transformation.

M. Barriol demande à M. Fréchet comment l'idée lui est venue de remplacer dans la formule approchée de Borel :

$$\frac{1}{10^k} \quad \text{par} \quad \frac{1}{10^{\frac{k(k+1)}{2}}}$$

M. Fréchet, répond que si l'on représente graphiquement P (ε) en fonction de k en prenant comme ordonnée log (ε), la courbe représentative devrait être à peu près une droite si la formule de Borel était très approchée. Or, en fait, la courbe représentative a une courbure accentuée. Il est donc naturel de l'assimiler à une parabole en seconde approximation. On obtient ainsi la formule (6) quand on s'astreint à prendre des coefficients numériques simples. La troisième approximation (où l'on augmente la précision en sacrifiant cette simplicité) est l'objet du présent mémoire.