

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

PIERRE DELAPORTE

Évolution de la mortalité française depuis un siècle

Journal de la société statistique de Paris, tome 79 (1938), p. 181-206

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1938__79__181_0

© Société de statistique de Paris, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

JOURNAL

DE LA

SOCIÉTÉ DE STATISTIQUE DE PARIS

N° 7. — JUILLET 1938

I

ÉVOLUTION DE LA MORTALITÉ FRANÇAISE DEPUIS UN SIÈCLE

TABLES DE MORTALITÉ ET DE SURVIE DE GÉNÉRATIONS

(Communication faite à la Société le 6 avril 1938)

(Thèse soutenue à l'Institut de Statistique de Paris, le 19 juin 1937)

Le nombre total des décès dans un pays tel que la France varie d'une année à l'autre d'une manière importante qui, à première vue, semble désordonnée. Peut-on dégager de ces variations une évolution continue, la tendance séculaire de la mortalité au cours du temps? Pour obtenir cette évolution, il faut considérer une population nombreuse et de tous âges sur laquelle on possède des documents statistiques précis et comparables entre eux, répartis sur de très nombreuses années; il faut aussi qu'aucune sélection à l'entrée ne soit venue superposer à l'évolution de la mortalité, celle du critérium de définition de la population.

L'étude de l'évolution de la mortalité a été très rarement faite. Ayant été proposée aux 4^e et 7^e Congrès internationaux d'Actuaires [27 et 28] (1), les communications se sont bornées pour la plupart à la simple confrontation des tables de mortalité.

Cauderlier [24] a suggéré en 1903 de considérer pour chaque âge et pour chaque année un coefficient de mortabilité ou de variation du taux de mortalité, mais n'a effectué aucun calcul numérique.

G. H. Knibbs [25], à la suite du recensement de l'Australie de 1911, a examiné

(1) Les nombres entre crochets renvoient à la bibliographie.

l'évolution de la mortalité de ce pays en traçant à âges constants les courbes des probabilités de décès en fonction du temps.

En 1936, A. Afzalipour [26] a fait une étude de démographie mathématique et l'a justifiée par une application à la population de la Suède; il a construit la surface de mortalité de ce pays obtenue en considérant le taux de mortalité comme fonction de l'âge et du temps.

Ces divers travaux ne semblent pas pleinement satisfaisants du point de vue de la démographie statistique, c'est pourquoi nous avons repris la question d'une manière tout à fait objective.

Bien que de nombreuses difficultés se présentent quant à la comparabilité des documents, la population de la France nous a cependant semblé la plus intéressante à étudier, car, outre l'intérêt national, démographique et sanitaire, cette population comporte comme sous-ensembles les clientèles des Assurances sociales, et Assurances privées, Caisses de retraites etc.

Nous avons heureusement pu étendre notre étude sur un peu plus d'un siècle en distinguant le sexe et l'âge des personnes; il est en effet nécessaire d'utiliser une longue période de temps pour pouvoir distinguer clairement l'évolution séculaire, des variations d'ordre accidentel de la mortalité.

Les documents principaux que nous possédons sur la mortalité française sont les relevés annuels des décès et les tables de mortalité; nous ne retiendrons que ces dernières pour la raison simple que ces documents sont plus précis et que nous en possédons d'époques plus anciennes. Nous étudions séparément le sexe masculin et le sexe féminin des tables portant sur l'ensemble de la population de la France, toute élimination d'une portion de celle-ci pouvant produire une sélection empêchant de les rendre comparables.

Parmi les tables de mortalité de la population française, seules les neuf tables suivantes nous ont semblé offrir les garanties suffisantes pour être utilisées.

Tables de 1817-1831 de Demonferrand [1]. — Établies avec les relevés annuels des décès de la période 1817-1831 connus année par année d'âge jusqu'à 10 ans, par périodes de 5 années ensuite, les recensements de 1821, 1831, 1836 et les états du recrutement de 1815 à 1831; Demonferrand a utilisé la méthode de Halley (on retranche successivement du nombre total des décédés le nombre des décès de 0 à 1 an, de 1 à 2 ans, etc., on forme ainsi la table de survie d'où l'on déduit la table de mortalité). Il a corrigé cette méthode qui implique une population stationnaire (nombre annuel de naissances constant, mortalité invariable pendant la période d'observation) et fermée en estimant que la population s'accroissait annuellement d'une fraction égale à 2 ‰ à la naissance, 6 ‰ à 21 ans et atteignant 8,3 ‰ à la fin de la vie. Demonferrand a vérifié de manière ingénieuse tous les documents qui ont servi à calculer ses tables et a donné les quotients de mortalité pour chaque année d'âge.

Tables de 1840-1859 du Dr Bertillon père [2]. — Ces tables ont été calculées d'après les décès de 1840 à 1859 et les recensements de 1851, 1856 et 1861 qui ont pour la première fois donné la répartition par âges de la population française. Les taux annuels de mortalité ont été calculés pour chaque année d'âge de 0 à 5 ans, au-dessus de 5 ans seules les valeurs moyennes des taux pour des groupes de 5 ans sont données.

Tables de 1853. — Pour permettre une bonne interpolation des tables de mortalité du milieu du XIX^e siècle, nous avons calculé de 0 à 50 ans des tables de mortalité d'après les décès de 1853 [3] et le recensement de 1851 [11] connus année par année d'âge. Nous avons supposé les taux de mortalité de 1853 applicables à 1851 et 1852, cette hypothèse nous semblant justifiée par le fait que le nombre total des décès a été sensiblement le même pendant ces 3 années.

Tables de 1856-1865 du Dr Bertillon père [4]. — Utilisent les décès de 1856 à 1865 et les recensements de 1856, 1861 et 1866; elles ne donnent que le nombre des survivants V_x sur 500 naissances. Ce nombre étant beaucoup trop faible pour en déduire des valeurs approchées des taux de mortalité, nous avons cherché à obtenir des décimales par diverses méthodes d'ajustement. Les meilleurs résultats ont été obtenus par la formule :

$$V'_x = \frac{V_{x-2} + 2 V_{x-1} + 4 V_x + 2 V_{x+1} + V_{x+2}}{10}.$$

Il est alors facile d'en déduire les taux de mortalité que nous avons ajustés graphiquement. Remarquons pour l'utilisation qui sera faite de cette table que l'ajustement ainsi effectué a tendance à diminuer l'amplitude des oscillations du taux de mortalité lors des maxima et minima.

Tables publiées par la Statistique générale de la France :

Tables de 1861-1865 [5] et *tables de 1877-1881* [6]. — Ces tables ont été calculées d'après les résultats bruts des décès des deux périodes 1861 à 1865, 1877 à 1881 et les recensements de 1861 et 1866, 1876 et 1881. Des probabilités de décès m_x indiquées de 5 en 5 ans d'âge, nous avons déduit les taux de mortalité par la relation classique :

$$q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}.$$

Tables de 1898-1903 [7], *de 1908-1913* [8], *de 1920-1923* [9], *de 1928-1933* [10]. — Les méthodes de calcul et d'ajustement de ces tables sont suffisamment connues pour qu'il soit inutile de les décrire ici.

LA SURFACE DE MORTALITÉ

A l'aide du matériel que nous venons d'énumérer, il nous faut essayer de déterminer la tendance séculaire de la mortalité suivant l'âge, si toutefois elle existe. Nous définirons le taux annuel de mortalité q à l'âge x et à l'instant t comme la probabilité qu'a une personne d'âge x de mourir avant d'atteindre l'âge $x + 1$ qu'elle aurait à l'instant $t + 1$, l'âge et le temps étant comptés en années. Nous pouvons ainsi considérer que ces taux annuels de mortalité définissent un point dans un espace à 3 dimensions pour chaque année d'âge et de temps. La question se présente alors sous la forme suivante : les points obtenus se présentent-ils sous la forme d'un nuage de points concentrés autour

d'une surface que l'on peut déterminer par ajustement et qui sera la surface de mortalité? La méthode la plus simple pour déterminer cette surface est d'en faire les sections par des plans perpendiculaires aux axes de coordonnées, ce sont ici les plans :

$$\begin{aligned}t &= \text{cte} \\x &= \text{cte} \\q &= \text{cte}\end{aligned}$$

Nous allons examiner ceux qui nous semblent les meilleurs pour la formation et l'ajustement de la surface de mortalité.

Sections par les plans d'époques constantes $t = \text{cte}$. — Nous ne les connaissons pas directement, mais en première approximation les tables de mortalité peuvent nous en donner une idée assez exacte; pour cela nous avons rapporté les tables à leur année moyenne (et non au milieu de la période d'observations de décès.) On ne peut assimiler une table de mortalité reposant sur une période d'observation de plusieurs années aux sections $t = \text{cte}$ que si la variation de $q(x, t)$ en fonction de t est linéaire pendant toute la durée d'observation de la table. La constitution de la surface de mortalité, après son ajustement, nous montrera que cette hypothèse est presque toujours justifiée, étant données l'approximation avec laquelle sont construites les tables et la faible durée d'observation de la plupart de celles-ci. C'est sous cette forme qu'on a généralement cherché à étudier les variations de la mortalité au cours du temps. Mais ces sections ne représentent pas clairement la surface de mortalité et de plus ne permettent pas l'ajustement de la tendance séculaire.

Sections par les plans d'âges constants $x = \text{cte}$. — Sous l'hypothèse précédente de variation linéaire du taux de mortalité en fonction du temps, on peut facilement obtenir quelques points des sections d'âge constant donnés par les tables. G. H. Knibbs [25] a proposé leur interpolation par la fonction $q_t = q_0 e^{at}$, a étant le taux de variation de la mortalité, et les a utilisées pour l'extrapolation de la mortalité de l'Australie jusqu'en 1940. A. Afzalipour [26] a ajusté celles de la Suède sur des tangentes hyperboliques généralisées et a construit d'après elles les surfaces de mortalité suédoises.

Nous n'avons pas cru qu'un ajustement analytique pût être une méthode exacte pour la représentation fidèle des sections de la surface de mortalité, nous le justifierons plus loin; or ces sections ne peuvent fournir une représentation de la surface de mortalité et rendent par là-même difficile un bon ajustement graphique.

Sections par les plans de taux de mortalité constants $q = \text{cte}$. — Le principal inconvénient de ces sections est qu'elles nécessitent une interpolation des tables pour leur calcul, mais par contre avec un choix judicieux des valeurs de q pour lesquelles on fait les sections, on peut leur faire exprimer d'une manière évocatrice la surface de mortalité, ainsi qu'un levé de terrain est représenté par des courbes de niveau. La vue d'ensemble qu'elles donnent de la surface en permet un bien meilleur ajustement. Ce sont ces sections que nous allons étudier en détail.

ÉTUDE DES SECTIONS PAR DES PLANS DE TAUX DE MORTALITÉ CONSTANTS

En interpolant les tables de mortalité, nous cherchons à obtenir la valeur fractionnaire de l'âge pour laquelle le taux annuel de mortalité a pris une certaine valeur moyenne pendant la durée d'observation de la table. Pour ne pas altérer les résultats statistiques, nous avons dû employer des méthodes différentes selon les tables et selon les âges. Voici celles auxquelles nous nous sommes arrêté.

Tables données année par année d'âge et ajustées. — Nous avons interpolé les taux de mortalité des âges successifs par des paraboles à l'aide de la formule de Newton en ne conservant la deuxième décimale de l'âge que pour les quatre dernières tables de mortalité. Pour les premiers âges (0 à 6 ou 8 ans) où le taux de mortalité est une fonction exponentielle de l'âge, nous avons effectué l'interpolation par $q_x = e^a + bx + cx^2$ en appliquant la formule de Newton au logarithme de q_x ; il n'a pas été utile de faire ainsi pour la période où q_x suit la loi de Makeham.

Tables données par groupes de 5 en 5 ans d'âge. — L'hypothèse qui a présidé à la construction de ces tables est celle de la variation linéaire du taux annuel de mortalité pendant des périodes de 5 années d'âge; elle est manifestement inacceptable pour tirer le maximum de précision qu'on peut espérer de ces documents.

Entre 5 et 40 ans, nous avons procédé à l'interpolation graphique en nous inspirant de la forme des tables de mortalité complètes encadrantes et en déterminant une courbe telle que les aires situées de part et d'autre du taux annuel moyen de mortalité pour une période de 5 ans soient égales. Lors des maxima et minima, la part d'arbitraire reste assez considérable, car il est parfois légitimement possible de faire passer deux courbes telles qu'un même taux de mortalité soit obtenu pour deux âges différant d'une demie à une année.

Au delà de 40 ans, les méthodes graphiques devenant imprécises, nous avons admis que pour une période quinquennale le taux de mortalité pouvait être représenté par une parabole, déterminée par le taux moyen de cette période et ceux des deux périodes encadrantes : c'est-à-dire $q_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$ étant les taux annuels moyens des périodes quinquennales et μ_x le taux instantané de mortalité, que :

$$\int_x^{x_0+5} \mu_x \cdot dx = 5 \bar{q}_1 \qquad \int_{x_0+5}^{x_0+10} \mu_x \cdot dx = 5 \bar{q}_2 \qquad \int_{x_0+10}^{x_0+15} \mu_x \cdot dx = 5 \bar{q}_3.$$

L'âge x pour lequel un certain taux annuel de mortalité Q est atteint est donné par :

$$x = x_0 + 2,5 + \frac{-(\alpha + \beta) \pm \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma + \bar{q}_1 - Q \right)}}{2\alpha}$$

x_0 étant l'âge initial de la période d'observation, avec :

$$\alpha = \frac{\Delta^2 \bar{q}_1}{50} \qquad \beta = \frac{2 \bar{q}_1 - \Delta^2 \bar{q}_1}{10} \qquad \gamma = -\frac{\Delta^2 \bar{q}_1}{24}$$

selon les notations usuelles de la théorie des différences finies.

L'application de cette méthode nous a conduit au résultat suivant : on peut, sans erreur notable par rapport à la précision des tables en question, rapporter le taux donné par une table à l'âge du début de la période quinquennale augmenté de 2,1 lorsque la différence seconde des taux de mortalité est positive et de 2,0 lorsqu'elle est négative. Remarquons que dans ce dernier cas, ces résultats coïncident avec ceux de l'hypothèse de la variation en progression arithmétique du taux annuel de mortalité durant une période quinquennale. L'interpolation peut alors se faire directement par la formule de Newton.

AJUSTEMENT DES SECTIONS DE MORTALITÉ CONSTANTE

Portons sur un graphique en abscisse les âges et en ordonnée le temps et joignons par des segments de droites les points obtenus par les sections de mortalité constante effectuées dans les tables de mortalité. Les lignes brisées ainsi obtenues sont voisines de courbes continues et ce sont ces dernières qui doivent représenter l'évolution séculaire de la mortalité, les écarts de la ligne brisée par rapport à celle-ci étant dus à des circonstances accidentelles : épidémies, guerres, années exceptionnellement favorables, etc.

Ajustement graphique. — La seule méthode qui nous ait semblé assez souple pour permettre un bon ajustement des sections de la surface de mortalité est la méthode graphique. Nous avons fait disparaître les oscillations des tables de Demonferrand au-dessus de 50 ans, car elles nous ont semblé dues uniquement à des phénomènes d'attraction des âges ronds dans les recensements ou les déclarations de décès. Nous avons fait passer nos ajustements par des taux légèrement moins élevés que ceux qu'indiquent les tables de Bertillon de 1840-59 entre 0 et 40 ans, les décès de ces tables comprenant ceux de la Révolution de 1848 (il y eut 973.000 décès contre 836.000 en 1847), de la guerre de Crimée (terrible épidémie de choléra, le siège de Sébastopol aurait occasionné la mort de 80.000 Français), de la guerre d'Italie en 1859 et de l'occupation de l'Algérie; ajoutons en France les deux épidémies de choléra de 1849 et 1854 (1); tous ces événements d'ordre accidentel n'ont pu qu'aggraver considérablement la mortalité qui est devenue beaucoup plus forte qu'elle ne l'aurait été par la simple évolution de celle-ci.

Les tables de Bertillon 1856-65 et de la Statistique générale de la France de 1861-65 présentent une mortalité normale bien qu'elles contiennent les décès de diverses expéditions coloniales (Syrie et Chine 1860, Cochinchine 1861-62), la guerre d'Italie, celle du Mexique 1863-65, l'occupation de l'Algérie et, en outre, l'épidémie de choléra de 1865. Cependant, la seconde table indiquerait entre 30 et 50 ans une mortalité trop faible pour les deux sexes.

Les tables de 1877-1881, calculées sans aucune correction des nombres bruts, n'indiquent pas le maximum que l'on observe vers 22 ans pour le sexe masculin, mais vers 20 ans pour les hommes et vers 25 ans pour les femmes une

(1) Nous rangeons le choléra parmi les fléaux qu'il serait utile d'éliminer, en effet il est apparu en Europe en 1832 et semble en avoir disparu, il ne doit donc pas faire partie de l'évolution naturelle de la surface de mortalité. L'épidémie de 1849 a environ doublé la mortalité de l'année à Paris pour les personnes de 15 à 60 ans, et augmenté de moitié celle des autres âges.

forte hausse du taux de mortalité non suivie de baisse; nous n'avons pas tenu compte de ces anomalies, aucune autre table ne les donnant.

Il n'y a rien de particulier à signaler au sujet des tables de 1898-1903 et de 1908-1913, sauf que les variations accidentelles propres à chaque table semblent aussi considérables pour celles-ci que pour les anciennes (ainsi d'ailleurs, que pour les deux plus récentes), bien que les méthodes utilisées soient beaucoup plus parfaites que pour les autres.

Les tables de 1920-1923 se trouvent situées presque immédiatement après la grande guerre, aussi n'est-il pas étonnant de trouver quelques irrégularités dans l'évolution de la mortalité qu'elles indiquent : le sexe masculin a naturellement subi les plus fortes perturbations, cependant les deux sexes indiquent de 4 à 30 ans une augmentation notable du taux de mortalité par rapport à ce qu'il aurait dû être de par son évolution séculaire naturelle; aucune différence ensuite pour les femmes, sauf peut-être une légère diminution entre 50 et 70 ans qui serait due à la sélection qu'a pu produire la guerre parmi celles de santé défaillante. Pour le sexe masculin, il nous est difficile de dire jusqu'à quel âge a pu agir la guerre pour accroître la mortalité, l'effet en est marqué jusqu'à 20 ans environ, il est très délicat de déterminer quelque chose ensuite entre 20 et 35 ans, nous en verrons plus loin la cause. A partir de 35 ans, et plus certainement à partir de 40 ans, nous assistons à une forte diminution du taux de mortalité dont l'amplitude est difficile à déterminer tant que les tables que l'on pourra construire porteront sur des générations ayant vécu pendant la guerre; cependant, à 45 ans le taux de mortalité était :

en 1908-13 de 0,01314,
en 1920-23 de 0,01079,
en 1928-33 de 0,01164.

Il semble que l'évolution normale aurait donné en 1920-23 un taux voisin de 0,01260 au lieu de 0,01079, ce qui représente un écart de 17 % de la mortalité obtenue. L'amplitude de cet écart décroît constamment lorsque l'âge augmente pour devenir nulle vers 70 ans. Nous nous trouvons donc encore en présence d'un phénomène de sélection chez ceux qui ont participé à la guerre; mais d'importance beaucoup plus forte que celle constatée pour les femmes.

Les tables de 1928-33 étant les dernières, il serait difficile de dire quelle nouvelle évolution elles marquent; cependant elles indiquent la continuation de l'évolution générale de la surface de mortalité. La forte sélection effectuée chez les générations qui ont été mobilisées, bien qu'en notable diminution, semble continuer, et une table calculée dix ans après celle de 1928-33 devrait en montrer la disparition totale, les tables suivantes seules le manifesteront.

UTILISATION DES SECTIONS D'ÂGE CONSTANT $x = cte$ POUR L'AJUSTEMENT
DES COURBES DE TAUX DE MORTALITÉ CONSTANT $q = cte$

Les sections à ajuster se sont présentées à nous en familles de courbes d'aspect bien régulier sauf entre 20 et 35 ans; pour le sexe féminin, la raison en était simple : la table de Demonferrand de 1817-31 accusait une variation en forme d'escalier du taux de mortalité depuis l'âge de 13 ans, aucune autre table ne

donnant de variations analogues, nous étions conduit à la considérer comme provenant d'erreurs propres à cette table. D'autre part, la table de 1877-81 présentait un palier entre 19 et 24 ans suivi d'une hausse brusque entre 24 et 26 ans, ce phénomène est certainement dû au mode de calcul par périodes quinquennales de la table et probablement aussi à ce que les calculs semblent avoir été effectués sur des séries statistiques n'ayant subi aucune correction.

Outre ces erreurs, la très faible variation du taux de mortalité du sexe féminin entre 20 et 35 ans fait qu'un écart de même amplitude du taux de mortalité entraîne une variation beaucoup plus considérable de l'âge que dans les autres périodes. Ces raisons nous ont fait adopter une autre méthode d'ajustement pour ces âges.

Le cas du sexe masculin est beaucoup plus complexe : la plupart des tables accusent un maximum du taux de mortalité vers 22 ans, suivi d'un minimum vers 26 ans, d'autres semblent n'avoir qu'un palier s'étendant de 23 à 33 ans. Enfin, les tables de 1872-76 et de 1877-81 n'accusent ni maximum ni minimum. C'est la période d'âges où les erreurs d'ajustement des tables sont les plus considérables, où les guerres, le mauvais état sanitaire des troupes dans les casernes et les occupations de pays extérieurs ont le plus d'influence, aussi était-il nécessaire de procéder à chaque âge à l'ajustement des taux de mortalité dans le temps.

Pour cette période, nous avons construit les sections d'âge constant de 2 en 2 ans et ce sont celles-ci que nous avons ajustées graphiquement. De ces ajustements, nous avons déduit à quelles époques, pour un âge déterminé, se trouvaient atteints les taux de mortalité de nos sections dans la surface de mortalité. Une très légère correction des valeurs ainsi obtenues a dû être effectuée pour la bonne interpolation de nos courbes de mortalité constante.

Ajustement analytique des sections d'âge constant.

Lors de son étude de la surface de mortalité suédoise, Afzalipour [26] a ajusté les sections de celle-ci par des plans d'âges constants : il a émis les deux hypothèses suivantes :

1° La fonction $\mu(x, t)$ représentant le taux instantané de mortalité à l'âge x et au temps t part asymptotiquement d'une valeur initiale $\eta(x)$, décroît, passe par un point d'inflexion, et tend asymptotiquement vers une limite inférieure $\xi(x)$ infranchissable.

2° Le taux de décroissement relatif de la mortalité à l'âge x est une fonction linéaire de la mortalité, c'est-à-dire qu'en posant $\nu(x, t) = \mu(x, t) - \xi(x)$, on a la relation :

$$\frac{\partial \nu(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{1}{\nu(x, t)} = \sigma(x) \cdot \nu(x, t) + \lambda(x)$$

$\sigma(x)$ et $\lambda(x)$ étant des fonctions de x .

En intégrant la dernière équation, il a mis la fonction $\mu(x, t)$ sous la forme $\mu(x, t) = \xi(x) - \alpha [1 - th(\gamma + \delta t)] + \beta(x, t)$, la fonction $\beta(x, t)$ étant petite lorsque t est grand et négligeable à l'approximation utile.

Afzalipour a déterminé graphiquement la valeur de l'asymptote $\xi(x)$ d'après la représentation de $\mu(x, t)$ pour des valeurs entières de x espacées de 5 en

5 ans, les autres paramètres ont été déterminés à l'aide de moyennes et de la méthode des moindres carrés.

Diverses raisons, en dehors de l'importance des calculs qu'elle entraîne, nous ont fait abandonner cette méthode :

1° La Suède possède une suite de tables englobant tous les décès depuis 1816, sans événement grave qui soit venu apporter de perturbation importante à la mortalité; la France par contre a ses tables de mortalité espacées, à intervalles irréguliers, elles sont même parfois chevauchantes : notons que de 1817 à 1933 seuls les décès de 65 années entières ont été utilisés, et que parmi les périodes laissées se trouvent les plus meurtrières. Il y aurait donc lieu d'employer une pondération variable avec la table, le sexe, l'âge et l'influence des erreurs systématiques dues à la méthode utilisée, il faudrait enfin éliminer presque totalement certaines tables à cause de discordances manifestes.

2° Si l'on peut actuellement éliminer les perturbations apportées par la guerre de 1870, il est impossible de le faire pour la guerre de 1914, et cela tant que les générations combattantes n'auront pas retrouvé une mortalité normale, si toutefois la sélection ne se fait pas sentir jusqu'à l'extinction de ces générations. Il en sera peut-être de même pour toutes les générations qui ont subi la guerre dans leur jeune âge.

3° La seconde hypothèse d'Afzalipour ne semble pas se vérifier en France jusqu'à présent, aussi la théorie démographique qui assigne au taux de mortalité une évolution suivant une tangente hyperbolique du temps ne peut-elle être appliquée *a priori*.

4° Ajoutons à ceci que la mortalité se trouve en France en pleine évolution à tous les âges, sauf pour le sexe masculin au delà de 50 ans, le taux de mortalité étant resté constant pendant la période que nous observons; nous ne pouvons donc actuellement faire nôtre la première hypothèse.

Toutes ces raisons nous ont fait abandonner les méthodes d'ajustement analytique; de plus, nous possédons seulement 9 tables utilisables, sur celles-ci quelques-unes, pour certains âges, ne méritent pas grande confiance, or tout ajustement analytique sur des fonctions de genres convenables entraîne l'estimation de 4 paramètres et donc on procéderait plus à une interpolation qu'à un ajustement.

Ajustement analytique des sections de taux de mortalité constant.

Nous avons essayé d'obtenir une représentation analytique des sections de taux de mortalité constant qui se présentaient sous la forme d'une courbe à 2 asymptotes verticales. Un ajustement systématique des courbes par une méthode telle que celle des moindres carrés ou celle des moments ne nous a pas donné de résultats satisfaisants car l'erreur d'une seule table peut modifier fortement la forme de la fonction interpolant au mieux les points expérimentaux.

Interpolation par une tangente hyperbolique généralisée.

Nous sommes obligé d'introduire 4 paramètres et de procéder à leur estimation, il nous en faut en effet 2 de position x_0 , t_0 et 2 d'échelle α , β pour l'âge et le temps.

Posons $y = \text{th } \lambda z$ et remarquons que l'on peut mettre cette fonction sous les deux formes :

$$z = \log_{10} \frac{1+y}{1-y} \quad (1) \quad \text{et} \quad y = \frac{\arg \log z - 1}{\arg \log z + 1} \quad (2)$$

en posant $\lambda = \log_e \sqrt{10}$. Pour plus de commodité, nous avons utilisé les logarithmes de Gauss, ce qui nous donne la relation très simple :

$$\log y = - [\log \text{ add } z + \log \text{ sous } z] \quad (3)$$

en posant :

$$y = \frac{x - x_0}{\alpha}, \quad z = \frac{t - t_0}{\beta}$$

nous obtenons la fonction interpolatrice :

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \text{th } \frac{t - t_0}{\frac{\beta}{\lambda}}$$

Nous déterminons graphiquement les valeurs $x(-\infty)$ et $x(+\infty)$ des âges asymptotes, cette détermination utilise 3 ou 4 des points expérimentaux; nous en choisissons 2 autres $\{x_{t_1}\} \{x_{t_2}\}$ particulièrement dignes de confiance et situés si possible de part et d'autre du point d'évolution et près de ce point. Les asymptotes nous fournissent les valeurs de x_0 et α :

$$x_0 = \frac{x(-\infty) + x(+\infty)}{2} \quad \alpha = \frac{x(+\infty) - x(-\infty)}{2}$$

on en tire les valeurs z_1 et z_2 par la formule (1), d'où :

$$\beta = \frac{t_2 - t_1}{z_2 - z_1} \quad t_0 = t_1 - \beta z_1$$

On peut alors calculer la valeur de l'âge x correspondant à une valeur t du temps par la relation (3).

Les avantages de cette méthode sont de permettre une interpolation très précise, si l'on a soin de déterminer rigoureusement les asymptotes; ainsi la section $q = 0,02$ de la surface féminine donne des erreurs toutes inférieures à 0,1 pour l'âge en choisissant les asymptotes $x(+\infty) = 0,44$ $x(-\infty) = 3,82$. La limite supérieure des erreurs constatées ne dépasse donc pas celle qu'on attribuerait aux erreurs des tables.

AJUSTEMENT PAR TANGENTE HYPERBOLIQUE GÉNÉRALISÉE

La méthode précédente est délicate à utiliser lorsqu'on n'a pas de raisons sérieuses de considérer certains points comme très supérieurs aux autres; dans ce cas, il nous semble préférable, après détermination des asymptotes et des paramètres x_0 et α , de placer les valeurs de y sur un graphique obtenu en portant sur un axe de coordonnées les temps t , sur l'autre une échelle fonctionnelle $z = \arg \text{th } y$ [33]. Les points ainsi obtenus peuvent alors être ajustés graphiquement sur une droite en tenant compte du poids que l'on croit pouvoir attribuer à chaque table pour cet âge. La droite ainsi déterminée a pour équation $z = \frac{t - t_0}{\beta}$ d'où l'on tire t_0 et β .

Ajustement par la fonction de Gauss :

$$\Theta(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz$$

En posant $y = \Theta(z)$ et $z = \frac{t-t_0}{\beta}$, nous ramenons la détermination de β et t_0 à celle d'une droite en utilisant une échelle fonctionnelle relative à $\Theta(z)$ [29].

L'emploi simultané de ces deux fonctions pour l'ajustement des sections $q = \text{cte}$ nous est apparu intéressant pour déterminer si l'une était plus adéquate que l'autre et si la fonction de Gauss incomplète, intégrale de la 7^e courbe de dispersion type de Karl Pearson, pouvait convenir. Les résultats que nous avons obtenus sont les suivants : les courbes $q = \text{cte}$ peuvent être très correctement représentées par l'une ou par l'autre des 2 fonctions $y = \text{th } z$ ou $y = \Theta(z)$, la meilleure dépendant des points expérimentaux que l'on possède, sans que l'on puisse savoir *a priori* quelle elle sera : si l'on désirait se limiter à un seul type, il semble que l'on pourrait adopter aussi bien une fonction que l'autre, seules les observations futures pourront renseigner sur ce sujet, et seules elles montreront l'importance de la perturbation amenée par la guerre de 1914 pour la détermination des asymptotes. Les résultats de nos calculs d'ajustement indiquent que le point d'évolution maximum de la mortalité se serait trouvé en général entre 1890 et 1900.

ÉTUDE QUALITATIVE DE LA SURFACE DE MORTALITÉ A L'AIDE DES SECTIONS DE MORTALITÉ CONSTANTE

Nous allons maintenant étudier l'évolution de la mortalité suivant le sexe et l'âge au cours du temps [34].

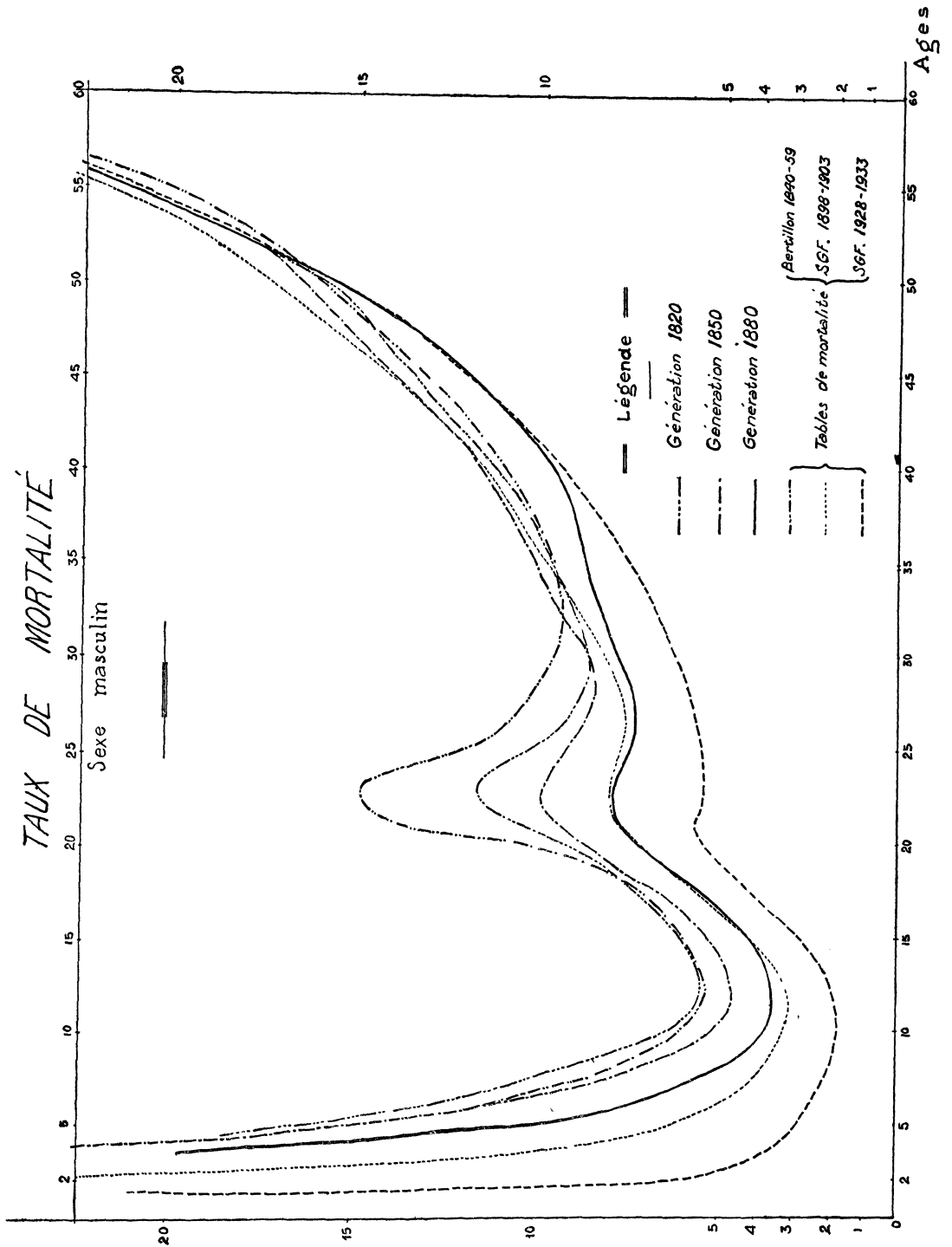
Sexe masculin (graphique 1).

0 à 1 an. — La mortalité a baissé depuis 1880 : d'après les tables de mortalité elle aurait été dans la période précédente en faible hausse. Le taux actuel est égal à 51 % de sa valeur en 1817-31.

1 à 11 ou 13 ans. — Baisse très légère jusque vers 1880 qui s'accélère ensuite fortement, puis est ralentie dans les années qui ont suivi la guerre de 1914-18, mais une très forte baisse entre la table de 1920-23 et celle de 1928-33 montre que l'évolution a continué et que la guerre n'a été qu'un accident sans suite actuellement décelable dans cette baisse; les taux de mortalité actuels ne représentent que 17 % à 3 ans et 29 % à 10 ans de ceux de 1825. C'est la période de la vie pour laquelle la mortalité a de beaucoup le plus baissé.

11 à 13 ans. — L'âge du minimum de la probabilité de décès au cours de la vie a été ramené de 13 ans en 1825 à 11 ans en 1930. Cette baisse semble avoir été uniforme pour le sexe masculin; c'est par ajustement que nous avons obtenu les époques des minima des courbes de mortalité constante. L'abaissement du taux de mortalité à l'âge du minimum semble avoir été uniforme également, mais il semble difficile de savoir ce qu'il a été avant 1840, le taux donné par la table de Demonferrand étant très faible par rapport aux valeurs qu'indiquent

Taux de mortalité pour 1.000.



les tables voisines. Valeur actuelle par rapport à celle de 1925 : 0,33. La diminution annuelle du taux de mortalité est de 0,000042, c'est-à-dire 2,7 % de sa valeur présente : ceci montre que cette diminution ne peut se prolonger longtemps, bien qu'elle dure depuis près de 100 ans. Cette période de pleine évolution dont rien n'indique la fin est près de se terminer, au moins pour certains âges. Vers le minimum les courbes récentes sont beaucoup plus évasées que les anciennes, ce qui semble correspondre à une extension de la période où l'adolescent n'est plus soumis à la mortalité de l'enfance et ne l'est pas encore à celle des adultes.

13 à 20 ans. — A toutes les époques, ce groupe d'âges a été caractérisé par une hausse rapide, avec l'âge, des taux de mortalité indiqués dans les tables; leur diminution au cours du temps n'a probablement commencé que vers 1860, selon la confiance que l'on accorde à la table de Demonferrand pour ces âges; en effet, alors que pour cette période d'âges, la table du sexe féminin accuse une courbe en forme d'échelle certainement inexacte, la forme de celle du sexe masculin semble être normale, et il y aurait lieu de lui faire confiance, surtout que Demonferrand a appliqué aux deux sexes le même coefficient d'accroissement annuel des populations d'âges successifs qu'il avait déterminé en comparant les effectifs recensés pour le recrutement aux nombres des naissances masculines; les résultats obtenus pour le sexe masculin peuvent donc être beaucoup plus exacts que les autres. Sous ces réserves, les taux de mortalité actuels représentent 50 % des anciens.

20 à 30 ans. — Cette période a été de beaucoup la plus délicate de toutes celles que nous avons eues à étudier, à cause des différences considérables que les diverses tables présentent entre elles. Nous allons examiner successivement chaque table pour essayer de trouver les raisons de ces discordances.

La table de Demonferrand présente un maximum élevé à 0,0123, puis une chute plutôt lente à 0,0084 à 30 ans. Nous devons remarquer que d'une part Demonferrand n'a connu pour cette période les décès que par tranche de 5 ans d'âge et qu'il était donc délicat d'en déduire la position et l'amplitude exacte du maximum, et que d'autre part, la mortalité de ceux qui étaient sous les drapeaux devait être plus élevée que la mortalité générale de ceux qui n'y étaient pas; aucune statistique sanitaire de l'armée n'était publiée à cette époque, Benoist^{on} de Châteauneuf énonçait alors que la mortalité dans l'armée [22] était plus grande que dans la vie civile (22,5 ‰ dans l'infanterie), ce à quoi Demonferrand [1] répondait que la différence ne devait être qu'apparente, car les tables de mortalité que l'on comparait à celle-ci n'indiquaient pas d'accroissement brusque de la mortalité à cet âge, et il l'expliquait par le fait que c'est celui où les jeunes ouvriers vont dans les grands centres d'industrie terminer leur apprentissage, où le service domestique fait quitter la campagne aux jeunes gens des deux sexes, où ceux qui ont fait des études abandonnent leur famille ou les établissements d'enseignement secondaire pour aller dans les villes chercher l'éducation professionnelle; donc beaucoup sont alors livrés brusquement à eux-mêmes. Nous pourrions ajouter aux arguments précédents un autre qui aurait semblé négligeable à cette époque : l'hygiène déplorable dans laquelle devaient se trouver la plupart de ces jeunes gens. Demonferrand s'appuyait sur ceci : la mortalité masculine de 19 à 30 ans repré-

sentait 6,85 % du nombre total des décès de la France entière, alors que pour le département de la Seine, elle représentait 11,97 % du total, c'est-à-dire près du double. Cet argument pouvait sembler logique à cette époque où la méthode de calcul des tables de mortalité de Halley était presque la seule utilisée, elle reposait sur l'hypothèse d'une population stationnaire, or ce ne pouvait être le cas puisqu'une grande quantité de jeunes gens affluaient à Paris, augmentant l'effectif de ces âges en diminuant d'autant celui du reste de la France. Quoi qu'il en soit, la mortalité militaire était certainement pour une bonne part dans cet accroissement des taux. La table de Demonferrand comprend les décès de la campagne d'Espagne (1823), de l'expédition de Grèce (1827), et du début de la conquête de l'Algérie qui, si elle fut peu meurtrière, dut entraîner de nombreux décès par les maladies occasionnées par le climat.

La table de Bertillon 1840-59 indique pour la période 20-25 ans un taux de mortalité de 0,0134, ce qui représente à 22 ans un taux moyen de mortalité de l'ordre de 0,0145 si l'on veut interpoler cette table avec une courbe de la forme de celles qui l'encadrent. Cet accroissement brusque de la mortalité est mis en évidence par la chute qu'il subit ensuite à 0,0090 vers 31 ans. La longue période pendant laquelle les décès ont été observés contient de nombreux événements : d'abord deux épidémies de choléra en 1849 et 1854, mais elles n'ont fait que peu de victimes à cet âge. D'autre part cette période voit, comme les suivantes, une mortalité élevée chez les troupes d'Algérie; puis la révolution de 1848 : du 23 au 26 juin, il y eut environ 1.000 tués dans les troupes, davantage chez les insurgés et des milliers d'exécutions sommaires; la guerre de Crimée a occasionné dans l'armée française des pertes de l'ordre de 100.000 soldats; enfin, il y eut la prise de Rome en 1849 et la guerre d'Italie en 1859. Bref, si nous cherchons à avoir un ordre de grandeur de la mortalité due aux guerres, nous devons évaluer à 25.000 environ le nombre des morts âgés de 22 à 23 ans et si nous estimons à 290.000 l'effectif moyen de cette classe d'âge en France, durant la période 1840-59 le taux de mortalité se trouve ramené de 0,0145 à 0,0100 environ, ce qui supprimerait presque totalement le maximum observé.

Les tables suivantes indiquent des maxima beaucoup moins élevés que les précédentes, et l'amplitude de ceux-ci semble décroître avec le temps, la table 1928-33 n'accusant qu'un maximum de 0,00550 à 21 ans pour ne descendre qu'à 0,00515 à 23 ans, il se trouve donc toujours à l'âge du service militaire, mais son amplitude s'est presque annulée. Remarquons que ceci va de pair avec l'amélioration de la mortalité des troupes séjournant en Afrique du Nord.

Le problème qui se posait à nous était celui de l'ajustement de la mortalité lors de ce maximum, donc de savoir ce qu'elle avait dû être, non ce qu'elle aurait dû être s'il n'y avait eu ni guerre, ni épidémie, car la forte sélection ainsi produite a certainement influé sur la mortalité ultérieure de ces générations; c'est un point important pour l'utilisation que nous ferons de la surface de mortalité, nous l'avons résolu à l'aide des données précédentes.

Pour nous rendre compte de l'exactitude des arguments donnés par Demonferrand, nous avons construit nous-même une table de mortalité reposant sur les décès de 1853 et le recensement de 1851, ce sont les seules années pour lesquelles nous avons pu trouver à la fois ces deux données âge par âge, d'une

part pour la France entière, d'autre part pour le département de la Seine, sans que cela provienne de répartition effectuée par des méthodes plus ou moins arbitraires. Nous avons donc calculé une table pour chaque sexe et pour la France entière, et d'autre part une table de mortalité du sexe masculin se rapportant au département de la Seine seul. Nous avons exposé plus haut les méthodes de calcul que nous avons utilisées. La table de la France nous indique, pour le sexe masculin, une pointe très accusée avec des taux de mortalité sensiblement égaux à 22 et 23 ans : $q_{22} = 0,0130$, $q_{23} = 0,0132$, suivie d'une chute jusqu'à 0,0081 à 30 ans. La table se rapportant au département de la Seine nous montre à tous les âges une mortalité bien plus importante, les taux sont en général plus élevés de moitié, mais dès 15 ans ils augmentent beaucoup plus considérablement et atteignent 3,0 fois le taux donné par la France entière

à 18 ans; baisse ensuite du rapport $\frac{q \text{ Seine}}{q \text{ France}}$ lors du maximum du taux de mortalité à 1,85 à 23 ans. Ce rapport continue ensuite à décroître en même temps que le taux de mortalité et se stabilise vers 1,5 dès 25 ans. Le maximum relatif du taux de mortalité dans la Seine s'établit donc vers 18 ans et en ceci nous serions tenté de voir les conséquences de l'émigration vers les villes indiquées par Demonferrand, la mortalité militaire agissant ensuite également sur les citadins et les ruraux. Le phénomène que nous venons de relater n'influe pratiquement que très peu sur la mortalité générale de la France, en effet si l'on construit pour ces âges la table de mortalité se rapportant à la France moins le département de la Seine, nous trouvons l'élimination pure et simple du léger crochet que l'on constatait vers cet âge pour la mortalité générale.

Un autre problème se présente encore : en dehors des accidents tels que les guerres, épidémies, etc., y a-t-il des phénomènes s'étendant d'une manière presque générale aux différentes tables et venant apporter une perturbation à la reproduction fidèle par les tables de l'évolution de la mortalité qui s'est produite en France? Il est une chose certaine : le passage par l'armée de tous les contingents amenait d'abord une première erreur sur les recensements : la plupart des bulletins sur lesquels aucune déclaration d'âge n'avait été faite provenait de soldats, d'autre part Demonferrand signalait qu'à son époque environ 100.000 soldats n'avaient pas été déclarés, ce chiffre était obtenu en comparant les comptes rendus du recrutement aux résultats des recensements : la répartition de ces omis avait été faite par âge pour la rectification des nombres bruts qui sont entrés dans le calcul de la table 1817-1831. La série statistique des décès utilisée pour le calcul des tables de mortalité est, elle aussi, faussée et l'est dans le sens opposé à la précédente : les décès de militaires devaient être parfois comptés au lieu de décès et au domicile, aucun contrôle ne pouvant être effectué pour savoir si la déclaration n'avait pas été faite en double. Tous ces éléments viennent aggraver une situation mauvaise de la mortalité à ces âges : la période 1863-65 accusait un taux de mortalité de 0,00922 (1) pour les troupes cantonnées en France et pour les soldats effectuant leur première année de service, pendant ce temps 0,00700 de l'effectif moyen

(1) Il n'y a pas lieu d'apporter à ces valeurs les réserves précédentes, car elles ont été calculées d'après les effectifs moyens, décès et réforme, indiqués par la statistique médicale de l'armée.

était réformé. Si donc, nous remarquons que seuls les sujets en bonne santé peuvent entrer dans l'armée, cette sélection devrait apporter une baisse sensible de la mortalité; au contraire, nous constatons un taux de mortalité élevé chez les troupes cantonnées en France et l'occupation de pays tels que l'Algérie apporte naturellement une mortalité bien plus élevée : il n'est alors pas étonnant de constater un maximum de la mortalité vers ces âges.

La valeur du taux de mortalité en 1928-33 par rapport à celui de 1817-31 est de 0,43 entre 20 et 25 ans, de 0,58 entre 25 et 30 ans.

30 à 50 ans. — L'évolution de la mortalité entre 30 et 50 ans se trouve caractérisée au cours du temps par une augmentation qui s'est poursuivie depuis le début de la période que nous observons jusqu'à la table 1877-81 où le taux de mortalité atteignait 105 à 110 % des valeurs données par la table de Demonferrand. Depuis cette époque, la mortalité était en décroissance, puis la table 1920-23 calculée sur des générations qui ont été mobilisées pendant la guerre donne un taux bien inférieur, en 1920-23 la mortalité est en forte augmentation sur celle indiquée par la table précédente mais est encore inférieure à la valeur qu'elle aurait accusée si la guerre de 1914 ne s'était pas produite. Entre 40 et 50 ans, nous observons le même phénomène qu'entre 30 et 40 ans avec cette différence que l'amplitude en est moins accentuée. Le rapport de la probabilité de décès en 1928-33 à celle de 1817-31 est : entre 30 et 40 ans : 0,76; entre 40 et 50 ans : 0,91.

50 à 90 ans. — Il semble qu'il ne se soit produit aucune évolution du taux de mortalité à partir de 50 ans, c'est à peine si nous trouvons pour la table 1920-23 une petite baisse du taux de mortalité presque entièrement annihilée par celle de 1928-33, aussi n'en avons-nous pas tenu compte dans nos ajustements. Ce phénomène tout à fait remarquable de la constance du taux de mortalité au delà de 50 ans semble montrer qu'aucun progrès n'a été accompli dans cette période pour le sexe masculin; nous devons faire observer cependant que l'amélioration considérable avant 50 ans produit un fort accroissement dans l'effectif des différents âges qui se répercute jusqu'à l'extinction de la génération.

Au-dessus de 90 ans. — Ce n'est qu'à titre indicatif que nous avons ajusté les taux de mortalité donnés, ils sont en effet presque à coup sûr erronés, chaque table ayant subi des méthodes d'ajustement variées et presque toutes arbitraires.

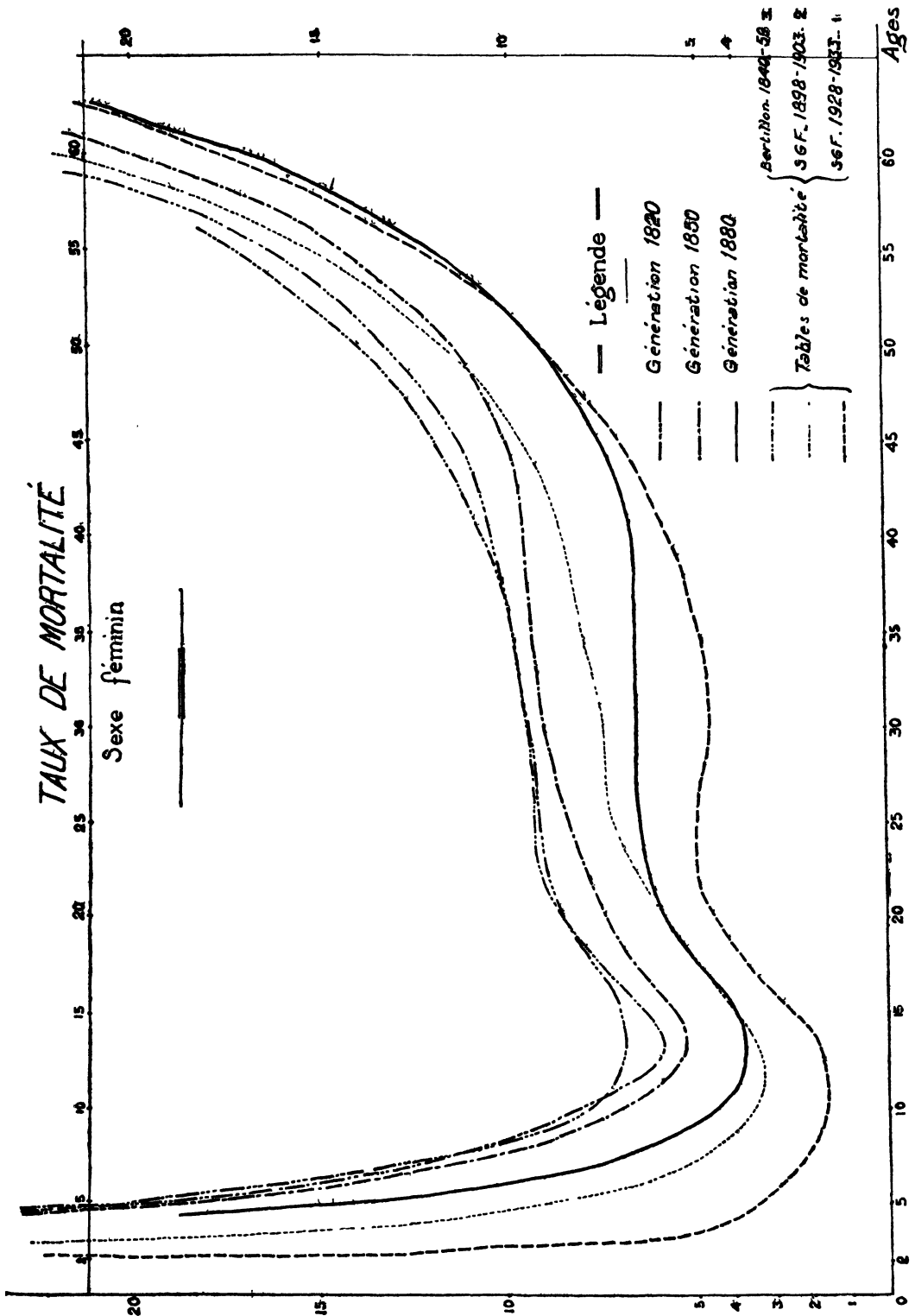
Sexe féminin (graphique 2).

0 à 1 an. — Comme pour le sexe masculin la mortalité ne semble avoir diminué que depuis 1880, le taux actuel serait égal à 47 % de celui de la période 1817-31.

1 à 10 ou 12,5 ans. — L'évolution de la mortalité a été exactement la même que celle du sexe masculin; valeur du taux actuel : 20 % de celle de 1817-31.

10 à 12,5 ans. — C'est l'âge du minimum du taux de mortalité, il se trouve donc environ une demi-année à une année plus tôt que pour le sexe masculin, et la courbe qui joint les valeurs de l'âge au minimum est voisine d'une courbe à deux asymptotes en forme de tangente hyperbolique. La valeur du taux actuel au minimum est : 31 % de celle indiquée par la table de 1817-31, mais

Taux de mortalité pour 1.000.



cette dernière nous semble fortement sous-estimée et nous inclinerions à prendre une valeur de l'ordre de 25 % au lieu de 31 %. Nous faisons ici la même remarque sur l'évasement des courbes que pour celles du sexe masculin.

13 à 18 ans. — Comme pour le sexe masculin, cette période est caractérisée par une hausse du taux de mortalité mais moins rapide, et l'amélioration en est bien moins accusée qu'avant 13 ans; il est difficile d'en donner des chiffres précis car, nous l'avons déjà indiqué à propos de l'étude du sexe masculin pour cette même période, la forme de la courbe en escalier que donnent les taux de mortalité de la table de Demonferrand montre une inexactitude de celle-ci pour le sexe féminin; la valeur actuelle serait égale à 50 % de celle de 1817-31.

18 à 40 ou 50 ans (jusqu'à la section $q = 0,011$). — Contrairement à ce qui se passait pour le sexe masculin, nous n'avons eu aucune difficulté pour la construction des courbes $q = \text{cte}$, l'évolution en est très régulière et la famille de courbes montre que si l'on trace les sections $x = t - t_0$ faites dans la surface de mortalité, on constate que les générations nées après 1855 ont eu pendant des durées variant de 8 à 19 ans (19 ans pour les générations nées en 1892 et 1893) un taux de mortalité constant, c'est-à-dire que lorsque ces personnes arrivaient à l'âge de 22 ou 23 ans, elles conservaient pendant de nombreuses années leur probabilité de mort; or, cette période de constance se trouvait en pleine évolution du taux de mortalité au cours du temps, aussi ces valeurs de q étaient-elles en baisse de 0,00009 d'une génération à la suivante.

Il est possible qu'un maximum du taux de mortalité tende à se former durant ces dernières années vers l'âge de 23 ans, le phénomène actuellement constaté peut n'être dû qu'aux conséquences de la guerre de 1914 : les tables ultérieures reprendraient alors les mêmes formes que les précédentes.

La courbe qui représente la section de la surface de mortalité par le plan $q = \text{cte}$ passe d'une forme très évolutive, analogue à celle d'une tangente hyperbolique, à une famille de droites. Valeur actuelle du taux de mortalité : 55 % de sa valeur en 1817-31.

De 40 ou 50 ans (section $q = 0,011$) à 90 ans. — Nous trouvons une famille de droites très régulièrement disposées et dont nous avons pu ajuster les coefficients angulaires; pendant un siècle entier, il y a donc eu amélioration du taux de mortalité pour ces âges, alors que pour les hommes nous n'avons constaté aucune amélioration. Taux actuels variant de 60 à 100 % de ceux de 1817-31.

Au-dessus de 90 ans. — Bien que le nombre des décès observés à chaque âge supérieur à 90 ans soit plus élevé que celui obtenu pour le calcul des tables masculines, nous devons faire les mêmes réserves sur la valeur des résultats.

En résumé, les surfaces de mortalité masculine et féminine nous montrent que nous sommes, depuis le dernier tiers du XIX^{e} siècle au moins, dans une période de forte amélioration du taux de mortalité, exception faite du sexe masculin au delà de 40 ans.

Y a-t-il eu auparavant une baisse du taux de mortalité, ou même une augmentation de celui-ci? Aucune table de mortalité ne semble avoir été calculée avant celles de Demonferrand sur la population de la France entière, mais une

communication de Benoiston de Châteauneuf à l'Académie Royale des Sciences en 1826 [16] indique qu'il y aurait eu entre 1780 et 1825 une autre période d'amélioration de la mortalité pour l'ensemble des deux sexes, le quotient du nombre de décès d'un groupe d'âges au total des décès de tous âges vers 1825 donnerait, par rapport à ce même quotient en 1780 : entre 0 et 10 ans 0,79, entre 10 et 50 ans 0,82, entre 50 et 60 ans 0,80. Ces résultats, si peu certains qu'ils soient, ne sont pas à négliger, mais il est possible qu'ils ne reflètent qu'un changement de structure de la population française.

TABLES DE MORTALITÉ ET DE SURVIE DE GÉNÉRATIONS

Les tables de mortalité que l'on a construites jusqu'à présent ont été obtenues en rapprochant, à un certain âge, les décès relevés pendant une ou plusieurs années, de la population qui les a fournis. On détermine ainsi le taux annuel de mortalité à l'âge x q_x^1 dont le complément à 1 donne la probabilité p_x' pour qu'une tête d'âge x atteigne l'âge $(x + 1)$; puis en multipliant un effectif initial, tel que 100.000 à l'âge 0, par les probabilités successives de vie d'un âge au suivant, on se croit autorisé à assimiler cette série de nombres à celle des survivants qui resteraient à ces âges sur 100.000 naissances et à en déduire des probabilités de vie ou de décès entre deux âges non consécutifs, des valeurs de la vie moyenne ou de la vie probable. En réalité, on mêle les probabilités de vie de générations différentes, prises à des âges différents; c'est pratiquement exprimer que, d'après une table construite en 1880 par exemple, les enfants nés en 1880 subiraient à 10 ans les probabilités de décès que subit la génération née en 1870; à 20 ans, celles de la génération 1860, etc. Or, les générations précédentes subissent, de par l'évolution séculaire, des mortalités qui leur sont propres à chacune. Dans le cas présent on majore ces probabilités de décès de quantités variables atteignant jusqu'à 45 % de celles-ci (sexe féminin, génération de 1880 à 40 ans), les nombres de survivants et les probabilités de vie correspondantes sont donc absolument différentes de la réalité.

Laplace, dans son *Essai philosophique des Probabilités*, [23] proposait en 1814 de prendre « dans les registres civils un grand nombre d'individus dont la naissance et la mort soient indiqués. On détermine combien de ces individus sont morts dans la première année de leur âge, combien dans la seconde année, et ainsi de suite ». On peut encore essayer de suivre au cours de leur vie les personnes nées une certaine année. Des essais d'application de cette dernière méthode ont été faits en Bavière et aux Pays-Bas, mais de très grosses difficultés se sont présentées pour suivre au cours du temps les personnes choisies dès leur naissance.

Voici la méthode que nous proposons pour obtenir des tables telles que les probabilités de vie et de décès d'un âge à un autre ainsi que le nombre des survivants correspondent à ce qu'on a l'habitude de vouloir leur faire exprimer, c'est-à-dire telles qu'on ait la relation fondamentale :

$$p_x^n = p_x^1 \cdot p_{x+1}^1 \cdot p_{x+2}^1 \dots p_{x+n-1}^1 = \frac{\varphi_{x+n}}{\varphi_x}$$

p_x^n étant réellement la probabilité pour une tête d'âge x d'atteindre l'âge $x + n$,

c'est-à-dire que les probabilités p_{x+i}^t reposent toutes sur des têtes nées la même année, donc comparables, et non sur des têtes de générations successives. Pour obtenir les compléments à 1, ou taux annuels de mortalité, de ces différentes probabilités, il suffit de faire dans la surface de mortalité des sections par des plans $x = t - t_0$ et nous aurons les différents taux de mortalité subis par la génération née à l'époque t_0 . Pratiquement sur les graphiques des sections $q = \text{cte}$ des surfaces de mortalité, nous avons tracé les droites $x = t - t_0$ et obtenu le long de ces droites les taux de mortalité aux différents âges par interpolation entre les courbes $q = \text{cte}$.

Nous avons construit les tables de mortalité des générations nées en 1820, 1850 et 1880, l'interpolation étant effectuée à l'aide d'un faisceau de droites, ce qui permet d'éviter tout calcul numérique; pour les toutes premières années de la vie, il nous a semblé préférable d'interpoler par rapport au temps les sections $x = \text{cte}$, étant donnée la très forte variation du taux de mortalité par rapport à l'âge. Les tables des générations 1850 et 1880 ont été prolongées au delà de 80 et 50 ans par une extrapolation des courbes $q = \text{cte}$ qui nous a semblé justifiée étant donnée la remarquable régularité des familles de droites qui représentent ces sections à partir de ces âges. Les taux de mortalité des tables sont les valeurs brutes obtenues par l'interpolation de graphiques à grande échelle contenant environ deux fois plus de sections $q = \text{cte}$ que ceux que nous donnons ici et où nous avons figuré en petits traits les sections qui représentent les trois générations 1820, 1850 et 1880 dans la surface de mortalité. A partir de ces valeurs, nous avons calculé le nombre des survivants sur 100.000 naissances et l'espérance de vie à la naissance.

Table de mortalité et de survie de générations.

Généra- tions	SEXE MASCULIN						SEXE FÉMININ					
	1820		1850		1880		1820		1850		1880	
	q	v	q	v	q	v	q	v	q	v	q	v
0	17.600	100.000	17.850	100.000	18.000	100.000	15.270	100.000	15.300	100.000	15.150	100.000
5	1.520	70.948	1.410	71.109	980	73.268	1.500	73.168	1.385	73.557	1.013	76.260
10	635	67.133	505	67.895	364	70.952	735	69.252	615	69.960	400	73.702
15	575	65.268	495	66.328	385	69.743	716	66.834	616	68.005	441	72.266
20	872	63.089	850	64.208	700	68.021	878	64.230	766	65.710	616	70.387
25	1.020	59.853	900	61.383	727	65.514	926	61.383	860	63.102	662	68.161
30	825	57.206	829	58.834	756	63.191	964	58.549	915	60.354	670	65.919
35	980	54.771	974	56.265	840	60.736	1.004	55.734	952	57.595	674	63.737
40	1.074	52.142	1.110	53.490	917	58.147	1.088	52.922	971	54.886	693	61.601
45	1.310	49.164	1.354	50.289	1.157	55.295	1.177	50.071	1.042	52.220	794	59.390
50	1.545	45.829	1.620	46.710	1.534	51.827	1.382	47.013	1.212	49.415	982	56.862
55	2.090	41.955	2.090	42.715	2.090	47.452	1.750	43.572	1.538	46.218	1.300	53.831
60	3.000	37.157	3.000	37.830	3.000	42.025	2.560	39.325	2.200	42.298	1.840	49.923
65	4.460	31.002	4.460	31.564	4.460	35.065	3.860	33.706	3.290	37.112	2.770	44.686
70	6.720	23.640	6.720	24.068	6.720	26.737	5.900	26.691	5.170	30.327	4.420	37.750
75	10.620	15.464	10.620	15.745	10.620	17.491	9.200	18.477	8.150	21.975	7.000	28.566
80	16.050	7.838	16.050	7.980	16.050	8.865	14.000	10.335	12.900	13.071	11.700	18.134
85	22.800	2.785	22.800	2.836	22.800	3.150	20.500	4.200	20.000	5.630	18.900	8.397
90	29.300	637	29.300	648	29.300	720	26.600	1.150	26.600	1.561	26.600	2.391
95	35.500	94	35.500	96	35.500	106	33.600	200	33.600	272	33.600	416
100		8		8		9		20		28		42

q taux annuel de mortalité pour 100.000.

v nombre de survivants sur 100.000 naissances.

Étude des taux de mortalité des tables de générations. — La comparaison des courbes des taux de mortalité montre une amélioration sensible de ceux-ci de la génération 1820 à celle de 1850, sauf que le sexe masculin présente une légère augmentation de la mortalité entre 30 et 51 ans, au delà de cet âge il n'y a eu, nous l'avons fait remarquer lors de l'étude de la surface de mortalité, aucune variation des taux, les deux courbes sont donc confondues et le sont aussi avec celle de la génération 1880. Cette dernière génération montre : 1^o à tous âges, une forte diminution des taux de mortalité surtout pour le sexe féminin; 2^o la résorption presque totale du maximum du taux de mortalité de 22 ans pour les hommes; 3^o pour les femmes, à partir de 23 ans, un palier qui se prolonge jusqu'à 40 ans.

Les courbes des taux de mortalité des générations coupent évidemment celles des tables de mortalité ordinaires des différentes époques à l'âge où la génération a vécu pendant l'année moyenne de chaque table, cependant l'ajustement de la tendance séculaire de la surface de mortalité produit parfois un léger écart.

Étude de la survivance et de la vie moyenne des tables de générations. — L'examen des courbes des survivants des tables de générations ne fait que confirmer ce que nous venons de dire au sujet des courbes de taux de mortalité, toutefois les tables de Demonferrand 1817-31 et de Bertillon 1840-59 sont voisines de celles de la génération 1820 à cause du peu d'évolution que présentait la mortalité vers cette époque. Les autres tables de mortalité diffèrent nettement de celles des générations.

Voici les valeurs de la vie moyenne (ou espérance de vie) à la naissance que nous avons obtenues pour les générations étudiées; précisons qu'il s'agit non de la génération elle-même, mais de la génération moyenne. Nous y avons adjoint les valeurs de la vie moyenne données par les différentes tables de mortalité bien que ces estimations ne puissent correspondre à aucune catégorie de personnes.

Générations.

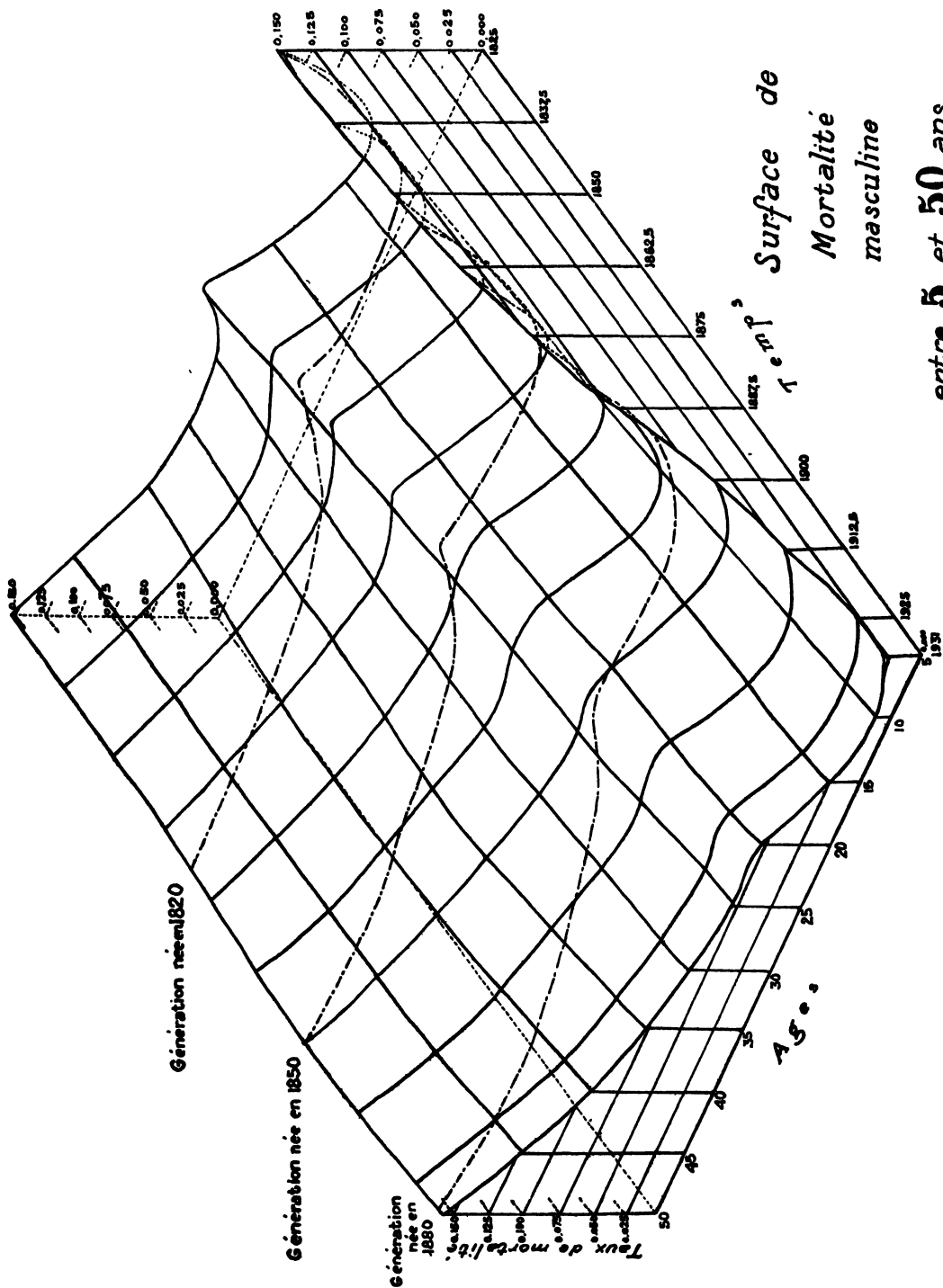
	1820	1850	1880
Hommes.	39,4	40,1	43,0
Femmes	41,0	42,6	47,8

Tables de mortalité.

	1817-31	1840-59	1856-65	1861-65	1877-81	1898-03	1908-13	1920-23	1928-33
H	38,3	39,3	39,6	39,10	40,83	45,74	48,49	52,19	54,30
F	40,8	41,0	41,2	40,55	43,42	49,13	52,41	56,09	59,02

Remarquons qu'il est fort possible que la vie moyenne des générations n'atteigne jamais les valeurs indiquées par les dernières tables, car la faible mortalité du jeune âge des dernières générations sera peut-être compensée par une augmentation des taux de mortalité des adultes, ces adultes qui donnent les probabilités de décès actuelles ayant été fort décimés dans leur enfance.

Taux de mortalité.



Concordance des générations et de leurs tables de survie. — Il serait difficile d'obtenir une bonne concordance entre les tables de survie des générations et les différents effectifs de celles-ci indiqués par les recensements, en effet il faudrait dépouiller ceux-ci des mouvements migratoires, d'une partie de la mortalité due aux guerres (la mortalité ultérieure des générations combattantes semble diminuée alors que celle des personnes qui en ont souffert dans leur jeune âge paraît accrue) et enfin des modifications territoriales. Par contre, nos tables de générations portent non sur la vie des individus naissant une certaine année, mais sur l'évolution moyenne d'une génération dont l'effectif initial se trouve progressivement mêlé de personnes de races étrangères qui ont des probabilités de vie différentes. En comparant les tables de générations avec les effectifs des générations rapportés au nombre initial de naissances, en ayant seulement fait subir une correction à l'attraction des âges ronds (celle-ci se manifeste dans certains recensements par des augmentations de 50 % de l'effectif d'un âge à celui du suivant), nous avons trouvé des écarts dépassant rarement 7 % et montrant plutôt une sous-estimation de la part des tables, ce qui correspond à l'excédent d'immigration sur l'émigration en France [21].

Représentation des tables de générations par la loi de Makeham. — Il nous a paru intéressant de chercher entre quels et quels âges les tables de mortalité de générations pouvaient être convenablement représentées par la fonction de Makeham $p_x = k s^x g^{c^x}$. Pour cela, nous avons remarqué que si p_x^m est la probabilité à l'âge x de vivre pendant m années :

$$\log p_x^m - \log p_{x+n}^m = -c^x (c^m - 1) (c^n - 1) \log g$$

$$\text{d'où en posant } \begin{cases} \alpha = \log c \\ \beta = \log [-(c^m - 1) (c^n - 1) \log g] \end{cases}$$

$$\log [\log p_x^m - \log p_{x+n}^m] = \alpha_x + \beta.$$

Pour que la loi de mortalité puisse être représentée par celle de Makeham, il faut et il suffit que $\log [\log p_x^m - \log p_{x+n}^m]$ soit une fonction linéaire de l'âge. En construisant pour $m = n = 1$ à l'aide d'une échelle logarithmique les valeurs de $\log [\log p_x^1 - \log p_{x+1}^1]$, nous avons trouvé que les tables de générations ne pouvaient être représentées ainsi qu'entre les âges :

	1820	1850	1880
Hommes.	30 à 82	29 à 82	41 à 82
Femmes	30 à 76	47 à 84	41 à 84

Cependant, les tables du sexe masculin de 1820 et de 1850 doivent donner un mauvais ajustement des taux de mortalité entre 43 et 50 ans pour la première, entre 45 et 52 ans pour la seconde, ce phénomène se produit donc aux seuls âges qui ont subi un accroissement du taux pendant la seconde moitié du XIX^e siècle; la table de la génération 1880 n'accuse aucun phénomène anormal, les taux étant redevenus voisins de ce qu'ils étaient vers 1825.

Il semble intéressant de remarquer que cette loi de Makeham, qui possède

biologiquement une interprétation sur l'affaiblissement progressif de l'individu avec l'âge, ne s'applique pas seulement aux têtes fictives des tables de mortalité ordinaires, mais aussi aux générations qui correspondent à des personnes réelles.

CONCLUSION

En résumé, voici les points principaux que nous avons obtenus : la mortalité française subit depuis plus d'un siècle une évolution continue dont les tendances générales sont très nettement et très régulièrement marquées : l'amélioration de la mortalité est générale, très forte dans les premières années de la vie, elle décroît avec l'âge et s'annule vers 90 ans pour les femmes, dès 30 ans pour les hommes pour lesquels le phénomène se complique entre 30 et 50 ans d'une augmentation de la mortalité dont le maximum a été atteint vers 1880 et dont la baisse ultérieure a reçu de la guerre de 1914-18 une forte perturbation ; au delà de 50 ans, il n'y a eu aucune variation des taux de mortalité masculine. L'amplitude de la décroissance des taux atteint son maximum à l'âge de 3 ans où les taux actuels ne sont que 16,8 % pour les garçons et 16 % pour les filles de ce qu'ils étaient pendant la période 1817-1831.

L'importance même de cette décroissance qui semble être encore presque linéaire pour les dernières tables, amène à considérer l'évolution ultérieure probable de la mortalité. Nous avons en effet dépassé la période de la plus forte diminution des taux de mortalité qui se situerait vers 1900, cependant leur décroissance annuelle reste tellement considérable que, si elle se prolongeait, la mortalité deviendrait nulle chez les enfants de 1 à 13 ans d'ici 20 à 40 ans, chose impossible, mais qui montre à quel point on réussit à vaincre les maladies de l'enfance.

Des études en cours sur des pays étrangers où les tables de mortalité reposent sur la totalité des décès, nous ont indiqué des surfaces de mortalité analogues à celles de la France, mais parfois nettement plus précises.

La construction de la surface de mortalité nous semble être la seule méthode qui permette de prévoir avec quelque vraisemblance la mortalité future et ses asymptotes. De cette surface, nous avons déduit nos tables de mortalité et de survie de générations, qui nous semblent être les résultats les plus rationnels que l'on puisse obtenir actuellement sur les probabilités de vie et de décès des individus. En effet, les tables de mortalité telles qu'on les établit actuellement portent sur des têtes fictives ayant tout au long de leur vie les probabilités de vie indiquées par 100 générations successives prises toutes à la même époque.

Nous avons montré que les tables de générations pouvaient être construites en coupant la surface de mortalité par des plans obliques et que les taux de mortalité ainsi obtenus différaient souvent beaucoup de ceux qui sont donnés dans les tables ordinaires, l'erreur pouvant atteindre 45 % des taux indiqués. Les résultats obtenus pour la survivance et la vie moyenne dépendant essentiellement des taux de mortalité n'en sont que les conséquences et correspondent à des têtes qui ont vécu, non à des têtes fictives.

Enfin, le principe des tables de générations semble être celui qui convient le mieux aux assurances sur la vie où les contrats sont conclus sur des têtes

réelles et pour l'avenir, nous avons vu qu'il était relativement facile d'extrapoler la surface de mortalité pour les obtenir (génération 1880).

Notons en dernier lieu qu'il est regrettable pour la formation de la surface de mortalité et des tables de générations que les tables de mortalité que l'on construit actuellement en France tous les dix ans ne portent que sur 5 années et que l'on perde ainsi la moitié des décès.

Eu terminant, nous tenons à exprimer notre bien vive gratitude à nos professeurs de l'Institut de Statistique et en particulier à M. A. Barriol, à notre maître M. G. Darmois, et à MM. M. Huber et H. Bunle, qui nous ont prodigué leurs conseils, pour mener à bien ce travail.

Pierre DELAPORTE.

BIBLIOGRAPHIE

Tables de mortalité.

- 1 DEMONFERRAND (J.-F.), Essai sur les lois de la population et de la mortalité en France, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 18 8, t. XVI, cahier 26.
- 2 BERTILLON (A.), Mesures diverses de la durée de la vie humaine, *Journal Soc. Stat. Paris*, mars 1866.
- 3 Mouvement de la population en 1851-1852-1853, Strasbourg, 1856.
- 4 QUÉTELET (A.), *Bulletin de la Commission Centrale de Statistique de Belgique*, t. XIII, 1878.
- 5 Mouvement de la population de 1861 à 1865, 2^e série, t. XVIII, Strasbourg, 1870.
- 6 Statistique annuelle en 1881.
- 7 Résultats statistiques du recensement général de la population en 1901, t. IV, Paris, 1906.
- 8 *Bull. de la S. G. F.*, juill. 1918.
- 9 HUBER (M.), Tables de mortalité pour la population de la France, 1920-1923, *Bull. S. G. F.*, juill. 1928.
- 10 HUBER (M.), Tables de mortalité pour la population de la France, 1928-1933, *Bull. S. G. F.*, juillet 1936.

Documents sur la mortalité.

- Les différentes publications de la Statistique Générale de la France.
- 11 Statistique de la France. Territoire et population, 2^e série, Paris, 1855.
 - 12 Recherches statistiques sur la ville de Paris et le département de la Seine, 6 vol., Paris, 1821-1860.
 - 13 Annuaire Statistique de la Ville de Paris. Depuis 1881.
 - 14 Statistique internationale du Mouvement de la Population, t. I, Paris, 1907.
 - 15 BENOISTON DE CHATEAUNEUF, Recherches statistiques sur la Ville de Paris et le département de la Seine. Paris, 1824.
 - 16 BENOISTON DE CHATEAUNEUF, Sur les changements qu'ont subis les lois de la mortalité en Europe depuis un demi-siècle, 1775-1825. *C. R. Acad. Sc.*, séance du 30 janv. 1826.
 - 17 MOREAU DE JONNÈS (A.), *Éléments de Statistique*. Paris, 2^e éd., 1856.
 - 18 BERTILLON (A.), Conclusions statistiques contre les détracteurs de la vaccine. Paris, 1857.
 - 19 CAUDERLIER (G.), Les lois de la population en France, Paris, 1902.
 - 20 BUNLE (H.), Mortalité comparée en France et à l'étranger avant et après la guerre. *Bull. S. G. F.*, janv. 1929.
 - 21 HUBER (M.), BUNLE et BOVERAT, La population de la France. Paris, 1937.
 - 22 *Mortalité militaire*.
Compte rendu sur le recrutement de l'armée. Depuis 1819.
Statistique médicale de l'armée. Depuis 1862.
BENOISTON DE CHATEAUNEUF, Essai sur la mortalité de l'infanterie française. *Annales d'Hygiène publique*, t. X, 2^e partie, Paris, 1833.
ELY (Dr), L'état sanitaire de l'armée française. *J. Soc. Stat.*, Paris, 1867.
LOWENTHAL (Dr), L'état sanitaire de l'armée française en 1900. *J. Soc. Stat.*, Paris, 1908.

Théories sur la population (Une bibliographie détaillée est donnée dans l'ouvrage de A. AFZALIPOUR (26).

- 23 LAPLACE (P.-S.), Essai philosophique sur les probabilités. Paris, 1814.
- 24 CAUDERLIER (G.), Note sur le calcul de la mortabilité. *J. Soc. Stat. Paris*, t. XLIV, 1903.
- 25 KNIBBS (G.-H.), Théorie mathématique de la population. Census of the Commonwealth of Australia of 1911, vol. 1.
- 26 AFZALIPOUR (A.), Contribution à l'étude de la théorie mathématique de la démographie. Thèse, Paris, 1936.

Divers.

- 27 Proceeding of the fourth international Congress of Actuaries. New-York, 1903.
 - 28 Septième Congrès international d'Actuaires. Amsterdam, 1912.
 - 29 DARMOIS (G.), Statistique mathématique. Paris, 1928.
 - 30 DARMOIS (G.), Statistique et applications. Paris, 1934.
 - 31 RISSER (R.), Application de la Statistique à la Démographie et à la Biologie. *Traité de Calc. des Prob. Borel*, t. III, fasc. 3, Paris, 1932.
 - 32 RISSER (R.), Étude sur l'établissement des tables de mortalité. Paris, 1909.
 - 33 HOUEL (J.), Recueil de formules et de tables numériques.
 - 34 DELAPORTE (P.), L'évolution de la mortalité en France, depuis un siècle. Congrès International de la Population, Paris, 1937.
-