JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

L.-L. VAUTHIER

La prévision en statistique

Journal de la société statistique de Paris, tome 42 (1901), p. 310-319
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1901__42__310_0>

II.

LA PRÉVISION EN STATISTIQUE

(A PROPOS D'UN TRAVAIL DE M. CORTHELL, INGÉNIEUR AMÉRICAIN.)

I.

UTILITÉ DES RECHERCHES PRÉVISIONNELLES.

En août 1898, à l'Association américaine pour l'avancement des sciences, qui célébrait à Boston le cinquantième anniversaire de sa fondation, un ingénieur, M Elmer L Corthell, sous le titre : *Le commerce maritime : son passé, son présent, son avenir,* présentait une étude, dont la substance, sous la nouvelle appellation : *Les ports du monde,* a été reproduite devant le VIII Congrès international de navigation, tenu à Paris, en 1900, à l'occasion de l'Exposition universelle

Cette étude, fruit de longues recherches, offre de l'intérêt non pas seulement par les chiffres statistiques qui y ont été réunis pour la période de cinquante années allant de 1848 a 1898, mais plus encore par la tentative qu'a faite son auteur de déduire des faits observés des prévisions pour l'avenir.

C'est surtout cette dernière circonstance qui a appelé mon attention et qui me conduit à entretenir de ce travail la Société de statistique

Si la science dont notre compagnie s'occupe a, effectivement, pour objet principal de recueillir des données numériques exactes sur les faits d'ordre naturel ou social, à cela ne se borne pas la mission qu'elle s'assigne En réunissant les chiffres qu'elle groupe, elle poursuit le but plus élevé de fournir des bases aussi solides que possible à la détermination des lois qui régissent les phénomènes auxquels les chiffres recueillis s'appliquent Or, c'est là un travail, en général, d'une extrême difficulté, eu égard au nombre, le plus souvent considérable, de forces élémentaires ou de causes, variables elles-mêmes, dans le cours du temps, tant en intensité qu'en direction, du concours ou du conflit desquelles dépendent les phénomènes observés.

Dans sa séance d'avril dernier, notre Société recevait, sur cette matière délicate, une importante communication de M. Fahlbeck qui, sous la dénomination, contestable à mon avis, de *types statistiques*, parce qu'elle s'applique à des choses variables, montrait le vaste champ d'études ouvert à ce propos devant les statisticiens. Les déterminations de cette nature sont, en effet, d'autant plus nécessaires que les résultats statistiques se prêtant, à l'état brut, à des interprétations très différentes suivant celui qui les manie, discréditent, fâcheusement, aux yeux de beaucoup de gens, une science fondamentalement essentielle aux progrès des arts sociologiques.

Je ne voudrais pas trop m'étendre ici sur ce point Il me revient toutefois en mémoire, à cet égard, un fait que je demande la permission de citer.

C'était à la séance de la Chambre des députés du 19 janvier 1900. Une passe d'armes s'était engagée entre le rapporteur général du budget et le ministre des finances, sur la question de savoir si, à partir de 1882 ou 1883, notre situation financière, en progrès jusque-là, n'avait pas alors subi un ralentissement marqué, lorsque, à propos d'une articulation statistique de l'un des orateurs contestée par l'autre, un interrupteur s'écria : « Cela prouve que les statistiques ne prouvent rien ! » — Ce à quoi un collègue plus conciliant ajouta bientôt : « Elles prouvent tout ce qu'on veut leur faire prouver. »

Sans doute, malgré la hauteur constitutionnelle d'où elles tombent, de telles boutades parlementaires n'ont pas une autorité décisive ; et, près des hommes éclairés, la statistique sérieuse ne s'en porte pas plus mal. Ces saillies humoristiques n'en témoignent pas moins d'une situation d'esprit que, par la clarté des formules résumant leurs chiffres, il appartient aux statisticiens de dissiper, sans sortir pour cela de leur rôle essentiel. C'est en étudiant et enseignant l'art de coordonner logiquement les données numériques dont ils disposent qu'ils atteindront ce résultat et empêcheront ceux qui consultent ces données de s'égarer dans des notions fausses, pratiquement plus fâcheuses par la confiance qu'elles inspirent que l'absence de toute notion.

Beaucoup de nos collègues se sont, à des points de vue divers, appliqués à cette tâche. J'ai essayé moi-même, en 1899, dans une étude sur le mouvement de la natalité dans plusieurs pays d'Europe et États de l'Amérique du Nord (1), de proposer l'adoption de droites compensatrices, diversement inclinées suivant les cas, pour déterminer d'une manière plus précise que ne le permettent de simples moyennes, souvent causes de tant d'erreurs, non seulement le taux réel des natalités comparées, mais aussi la tendance de celles-ci à croître ou à décroître plus ou moins rapidement, durant la période considérée.

Il y a peut-être là la base d'un procédé logique susceptible d'être appliqué dans les cas nombreux où ne se manifestent pas des oscillations périodiques, se renouvelant à intervalles plus ou moins réguliers, lesquelles doivent, dès lors, faire, chacune à part, l'objet d'une étude spéciale. Mais, quelle que soit la capitale utilité de ce problème, ce n'est pas ici le lieu, pour moi, de l'approfondir davantage, et j'en reviens aux prévisions de M. Corthell et aux réflexions que son travail m'a suggérées.

---

(1) *Journal de la Société de statistique de Paris*, numéros de janvier et février 1899.

II.

OBJET DES RECHERCHES DE M. CORTHELL.

Dans le rapport que M Corthell a produit en dernier lieu, l'auteur, à la suite d'une étude sur les conditions de navigabilité et les installations fonctionnelles des principaux ports maritimes de commerce du globe, et après avoir recueilli, pour certaines années comprises dans le cinquantenaire de 1848 à 1898, des données de fait sur les dimensions et vitesses des plus grands navires connus, sur le nombre et le tonnage des navires à voiles et à vapeur, sur la capacité de transport de la flotte commerciale du monde, sur le poids et la valeur des marchandises transportées par mer, a essayé d'en déduire ce que seront, au bout de 25 et de 50 ans, les éléments sur lesquels son attention s'est portée

Nous condensons, dans le tableau (A) ci-après (voir p 313), les chiffres recueillis sur les 17 points spéciaux examinés, en y joignant les résultats que M Corthell donne comme déduits de l'étude qu'il en a faite, pour les années à venir : 1923 et 1948.

Tout en nous réservant de les discuter, s'il y avait lieu, nous admettons l'exactitude des chiffres recueillis par l'auteur. Cette exactitude est, sans doute, loin d'être, statistiquement, un fait sans intérêt. Mais elle n'importe pas essentiellement à notre objet qui est moins de fixer l'attention sur la valeur même de chiffres prévisionnels définis que de rechercher, d'une façon générale, les procédés logiques auxquels on peut recourir, avec le moins d'appréhension d'erreur, dans une investigation de cette nature.

III.

EXAMEN PRÉALABLE DE LA QUESTION. — PEUT-ON RECOURIR AUX FORMULES D'INTERPOLATION ?

L'opération définie à la fin du paragraphe précédent, surtout lorsqu'il s'agit d'une prévision à long terme, est forcément soumise à des aléas considérables *Savoir,* dit un adage, c'est *prévoir*. Cela est vrai, mais à la condition que le mot savoir implique la connaissance des lois qui régissent le phénomène observé. Or, dans les phénomènes physiques eux-mêmes, l'astronomie presque seule a le privilège de fournir d'infaillibles indications pour l'avenir Hors de là, tout est plus ou moins conjectural, notamment, et c'est ici le cas, quand la volonté humaine, soumise à tant d'influences contingentes, joue, dans la question, un rôle considérable. Le problème posé n'est donc pas un champ largement ouvert à des considérations abstraites. Il est beaucoup plus humble. Ce qui en fait la difficulté, mais aussi l'intérêt, c'est que sa solution, forcément liée aux faits observés, ne peut s'y assujettir étroitement. A côté de l'emploi de procédés précis, autant que possible, il reste donc une marche inévitable à des appréciations échappant à des règles fixes.

Le schéma ci-après (fig. 1) va compléter ces indications (voir p. 314).

Ce schéma reproduit le mouvement d'ascension des *faits constatés,* à partir de l'année 1848, pour les cinq premiers cas du tableau (A) relatifs aux dimensions, au tirant d'eau et à la vitesse des plus grands navires en usage, depuis le point de départ

TABLEAU (A).

ANNÉES correspondant à des faits enregistrés ou prévus.	CONDITIONS COMMERCIALES des vingt navires les plus grands. Longueur moyenne, en mètres (m).	Largeur moyenne, en mètres (m).	Creux moyen, en mètres (m).	Tirant d'eau moyen en charge, en mètres (m).	Vitesse moyenne, en nœuds (n).	Tonnage moyen, en Tonneaux de jauge (T).	VITESSE DES NAVIRES LES PLUS RAPIDES, en nœuds (n).	NOMBRE DE BASSINS DE RADOUB de 152m,4 de long et au-dessus.	NAVIRES A VOILES. NOMBRE TOTAL.	TONNAGE TOTAL, en millions de Tonneaux (MT).	TONNAGE MOYEN, en tonneaux de jauge (T).	NAVIRES A VAPEUR. NOMBRE TOTAL.	TONNAGE TOTAL, en millions de Tonneaux (MT).	TONNAGE MOYEN, en tonneaux de jauge (T).	CAPACITÉ DE TRANSPORT EFFECTIVE TOTALE, A VAPEUR ET A VOILES, en millions de tonneaux (MT).	POIDS DES MARCHANDISES TRANSPORTÉES PAR MER, en millions de tonnes (Mt).	VALEUR DES exportations combinées des dix principales puissances du monde, en billions de francs (BF).	OBSERVATIONS.
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
1848	70^{m},1	11^{m},0	7^{m},0	5^{m},8	9^{n},2	1 430^{T}	10^{n},0	»	»	»	»	242	0^{MT},074	310^{T}	16^{MT},5	26^{Mt},5	8^{BF},672	Nous avons reproduit, à l'avant-dernière ligne du tableau, les prévisions de M. Corthell pour 1923. Mais ces prévisions, qui ne sont presque toutes que de simples moyennes entre les chiffres *constatés* en 1898 et ceux *prévus* pour 1948, ne présentent pas un réel intérêt et n'ont pas été discutées dans le présent travail.
1860	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	44 ,5	13 ,003	
1869	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	18 ,970	
1873	118 ,9	13 ,7	9 ,6	7 ,3	13 ,0	4 413	17 ,5	»	56 281	14^{MT},186	252^{T}	5 148	4 ,328	841	27 ,0	»	»	
1880	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	113 ,0	27 ,100	
1881	140 ,2	13 ,7	9 ,1	7 ,3	15 ,0	4 900	19 ,0	23	48 584	13 ,878	285	6 399	5 ,745	1 055	34 ,0	»	»	
1890	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	33 ,604	
1891	154 ,5	16 ,6	9 ,4	8 ,2	17 ,2	6 997	20 ,0	58	33 879	10 ,540	311	9 638	12 ,826	1 331	49 ,0	»	»	
1893	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	176 ,5	»	
1896	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	35 ,230	
1898	164 ,9	18 ,6	11 ,9	8 ,3	18 ,0	10 717	22 ,0	75	29 315	8 ,895	303	11 271	17 ,889	1 587	62 ,5	201 ,0	35 ,230	
1923	232 ,2	24 ,4	12 ,5	9 ,4	21 ,0	24 000	26 ,0	125	17 770	4 ,700	265	14 925	32 ,450	2 173	102 ,0	318 ,0	45 ,528	
1948	304 ,8	30 ,5	13 ,1	10 ,1	24 ,0	30 000	30 ,0	176	10 800	3 ,240	300	16 685	45 ,000	2 700	138 ,0	435 ,0	54 ,200	

visé jusqu'à 1898. L'irrégularité de marche qu'accusent les quatre premiers cas surtout met en pleine évidence qu'à aucun d'eux n'a présidé une loi de croissance un tant soit peu régulière, dont on puisse attendre la production d'effets analogues dans l'avenir. Les impulsions volontaires qui ont déterminé l'évolution ont donc obéi, suivant l'époque, à des considérations d'ordre différent, produisant des effets dont on ne peut se dispenser de tenir compte, mais sur lesquels on ne peut s'appuyer qu'avec réserve.

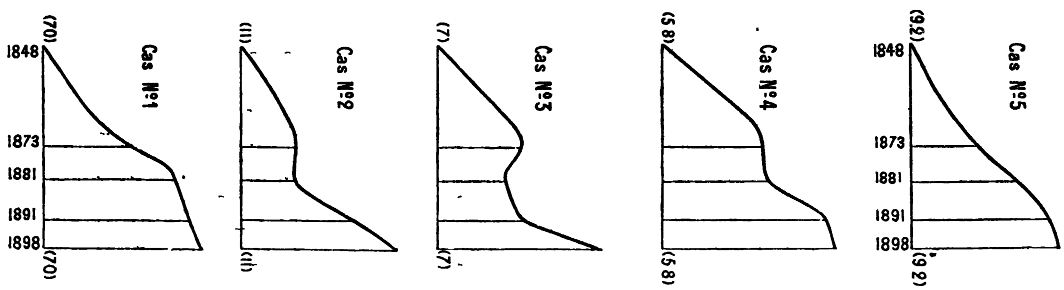

Fig. 1.

L'échelle des abcisses est de 0 m/m,6 pour une année.
Quant aux ordonnées, leurs échelles, variables d'un cas à l'autre, sont les suivantes, par unité :

N° 1, 0 m/m,25 ; n° 2, 3 m/m ; n° 3, 5 m/m ; n° 4, 10 m/m ; n° 5, 2 m/m,5.

Nota. — Le nombre correspondant à l'année 1848 a été pris, dans chaque cas, pour point de depart; les ordonnées suivantes ne sont, en conséquence, que ce qui s'y ajoute dans les années postérieures.

Serait-il possible, cependant, que l'analyse mathématique, cet admirable instrument de déduction, intervînt directement, et, de la marche des faits constatés, si irrégulière qu'elle soit, dégageât le mouvement qu'ils ont suivi dans le passé et celui qu'ils doivent suivre dans l'avenir? Nous avons fait à ce sujet une tentative qui ne nous a pas réussi.

Il existe une formule d'interpolation due à l'illustre Lagrange permettant de faire passer, par des points donnés, en nombre aussi grand qu'on veut et de situation quelconque, une courbe, toujours calculable, dont un polynôme algébrique constitue l'équation. Nous avons essayé d'appliquer cette formule aux deux premiers cas du schéma précédent. Elle nous a donné des résultats absolument inadmissibles.

Les courbes obtenues, en effet, du 4^e degré dans notre espèce, outre des sinuosités bizarres auxquelles elles sont forcées de se plier, dans l'étendue du champ jalonné, pour passer par la suite des points connus, présentent, tant pour la période antérieure que pour le cinquantenaire postérieur, les conséquences que nous allons indiquer.

Pour le cas n° 1, la courbe remonte des deux côtés, et, d'après elle, en 1838, il aurait existé des navires de 169 mètres, longueur, plus que supérieure au double de celle constatée en 1848, et dépassant même celle des plus longs spécimens de 1898; et, d'autre part, à la fin du cinquantenaire se terminant en 1948, il faudrait prévoir, pour les navires, une longueur excédant 2 200 mètres.

Quant au cas n° 2, conséquences analytiques plus étranges encore, la courbe, après une double inflexion dans le champ jalonné, descend ensuite des deux côtés : 5 ans avant 1848, les navires, suivant elle, auraient eu une largeur nulle, et, après avoir atteint, vers l'époque où nous sommes, la largeur extrême de 19^m,36, aux environs de 1915, ils n'en auraient plus du tout.

Il existe, sans doute, des formules d'interpolation, basées sur d'autres types analytiques que les polynômes de Lagrange, qui pourraient conduire à des conséquences moins exorbitantes. Mais, il nous a semblé que, dans les conditions où la question est placée, il y avait lieu de ne pas plus longtemps poursuivre dans cette voie, et de rechercher, en dehors du prolongement de courbes rigoureusement déterminées par les faits constatés, des procédés prévisionnels qui, tout en tenant compte de ces faits, ne s'y assujettissent pas étroitement.

Avant de passer à cette recherche, peut-être nous sera-t-il permis d'ajouter ici que, sans avoir approfondi l'application de l'analyse mathématique aux questions d'ordre sociologique, notamment aux faits économiques, ce que nous venons d'exposer nous inspire quelque défiance sur le caractère rationnel de telles applications, et sur la justesse des conséquences qu'en déduisent ceux qui y font appel.

IV.

RECHERCHES DIRECTES DE PROCÉDÉS PRÉVISIONNELS.

Quoi qu'il en soit, précédé par M Corthell dans le travail que nous entreprenons, pouvions-nous trouver chez lui quelques indications propres à nous guider ? Avait-il opéré d'après une méthode fixe dont il se serait borné à corriger les indications ? L'étude originaire, présentée par lui, en 1898, à l'Association américaine pour l'avancement des sciences, nous renseigne à cet égard et nous montre qu'il n'en est rien. Les conclusions auxquelles il s'est arrêté ne résultent pas de courbes définies d'un ou plusieurs types connus, mais, si l'on veut bien nous passer cette expression d'atelier, de courbes décrites *de chic,* dont l'œil, pour la plupart, suit avec plaisir le mouvement, mais dont le tracé, parfois sinueux, que ne justifie aucune considération d'ordre logique, semble pouvoir, dès lors, s'écarter notablement de la direction qui lui a été assignée.

Ce n'est pas là, remarquons-le bien, une critique, M. Corthell ne s'étant pas proposé de faire le travail de caractère théorique que nous entreprenons.

Toutefois, avant de poursuivre, une observation générale nous paraît utile. La question des transports maritimes, auxquels elle se rapporte pour la plus grande part, est, indépendamment de considérations secondaires, dominée par deux circonstances d'ordre tout à fait inverse.

L'une, subordonnée à l'initiative humaine, est une impulsion d'ordre économique, incitant, lorsque la masse du trafic auquel il y a lieu de pourvoir est considérable, à augmenter le plus possible les dimensions des appareils de transport, et cela, par cette raison, que tant pour chaque tonne de poids transporté que par chaque mètre cube d'espace intérieur utilisable, les frais de construction d'abord, et de manutention de l'appareil ensuite, sont d'autant moins élevés, toutes choses égales par ailleurs, que cet appareil est de plus grande dimension.

L'autre circonstance, d'ordre principalement naturel, dépend non seulement des constructions de main d'homme destinées à abriter, desservir commercialement et réparer les navires, lesquelles doivent croître en même temps que les dimensions de ceux-ci, mais surtout des conditions dans lesquelles se trouvent les chenaux donnant accès aux ports, gares de la grande voie universelle qu'est la mer, sans limites — et, l'on peut ajouter, dépend aussi de l'obstacle qu'opposent à l'approfondissement de ces chenaux au delà d'un certain mouillage, indépendamment des dépenses que ces travaux entraînent, les difficultés qu'il y a, le plus souvent, à les maintenir à profondeur contre la tendance nivellatrice de la mer.

C'est entre les deux pôles qui viennent d'être indiqués que le mouvement oscille, les deux influences agissant alternativement, d'une façon prépondérante. C'est là ce qui explique les irrégularités de marche que manifestent les cas réunis dans le schéma, figure 1, et dont nous devrons nous souvenir, lorsque nous aurons à corriger les résultats des divers procédés rationnels que nous allons rechercher.

Dans cette recherche, dont les résultats seront résumés plus loin dans le tableau (B), un principe nous a guidé : c'est, non pas seulement d'exclure absolument les courbes tracées à la main, qui peuvent pittoresquement montrer les mouvements qu'on veut signaler, sans démontrer jamais rien, mais de faire exclusivement appel à la ligne droite.

1er PROCÉDÉ : SOLUTIONS *a* ET *b*.

Interprétés sous forme graphique, les chiffres statistiques dont on dispose donnent, sur une base où le temps est porté, une série de points que l'on peut concevoir reliés entre eux par une suite de droites formant un contour polygonal brisé. C'est de ce contour qu'il s'agit de déduire la situation à laquelle parviendra le phénomène, un certain temps après la dernière année d'observation.

Si les observations étaient limitées à deux, si l'on ne possédait que deux points, en l'absence de toute donnée sur la direction et l'amplitude des forces extérieures qui peuvent faire dévier en tel ou tel sens le mouvement constaté, la seule solution rationnelle serait d'admettre que le phénomène poursuit sa route en ligne droite.

Cette solution, purement empirique, mais la seule logique, représenterait avec une grande probabilité le fait réel; si le prolongement s'étendait relativement peu au delà du dernier point jalonné. Mais, d'autre part, il est évident que cette probabilité diminue à mesure que le prolongement prend une plus grande extension relative.

Suivant quelle loi cette variation de la probabilité se produit-elle ? Dans l'hypothèse que nous avons adoptée, quant à l'ignorance où l'on est sur l'action exercée par les forces extérieures, il n'y a nulle raison pour admettre que l'expression de cette loi ne soit pas simplement linéaire, de telle sorte que, si l'on appelle d la longueur de la droite connue et d' celle du prolongement, la probabilité aura pour mesure la fraction : $\frac{d}{d+d'}$, dont la valeur s'éloigne d'autant plus de l'unité, c'est-à-dire de la certitude, que d' est plus grand par rapport à d et qui, d'autre part, a l'unité pour limite, lorsque $d' = 0$, ou que, le prolongement étant nul, on est ramené au dernier fait connu.

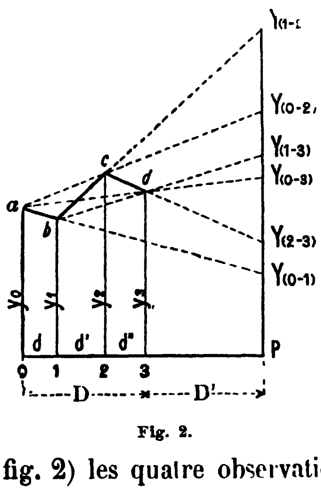

Fig. 2.

Ces points posés, supposons qu'on possède (croquis fig. 2) les quatre observations 0, 1, 2 et 3, formant le contour polygonal ***abcd***, séparées entre elles par un nombre quelconque d'années d, d', etc., composant ensemble la somme D et qu'il s'agisse de prévoir quelle sera la valeur, Y_1, du phénomène observé, au bout d'un nombre D′ d'années, en dehors de la période jalonnée.

D'après les considérations ci-dessus exposées, si l'on ne possédait successivement que les couples de points a et b, a et c, a et d, ou encore les couples b et c, b et d, ou enfin seulement le couple c et d, cette valeur de Y serait donnée par chacune des six rencontres : $Y_{(0-1)}$; $Y_{(0-2)}$; etc., ayant pour valeur, en fonction des éléments de la figure, les expressions suivantes (1) :

$$Y_{(0-1)} = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{d + d' + d'' + D'}{d};$$

$$Y_{(0-2)} = y_0 + (y_2 - y_0)\frac{d + d' + d'' + D'}{d + d'};$$

$$Y_{(0-3)} = y_0 + (y_3 - y_0)\frac{d + d' + d'' + D'}{d + d' + d''};$$

$$Y_{(1-2)} + y_1 + (y_2 - y_1)\frac{d' + d'' + D'}{d'};$$

$$Y_{(1-3)} + y_1 + (y_3 - y_1)\frac{d' + d'' + D'}{d' + d''};$$

$$Y_{(2-3)} + y_2 + (y_3 - y_2)\frac{d'' + D'}{d''};$$

expressions spéciales qui, pour chaque couple d'observations, en désignant par Y_n la valeur cherchée, par y_{n-1} et y_n, distantes de d_n, les ordonnées fournies par l'observation, et par D_n l'étendue du prolongement, sont représentées par l'expression générale :

$$Y_n = y_{n-1} + (y_n - y_{n-1})\frac{d_n + D_n}{d_n}.$$

C'est des six valeurs de Y données ci-dessus qu'il faut déduire la valeur cherchée Y_1. Si la probabilité correspondant à chacune d'elles était la même, le résultat s'obtiendrait par une simple moyenne, mais il n'en est pas ainsi. D'après ce qui a été exposé ci-dessus, à chacun des points de rencontre correspond une probabilité différente exprimée d'une manière générale par la fraction $\frac{d_n}{d_n + D_n}$, et, finalement, c'est le centre de gravité de six forces parallèles inégales qu'il faut trouver, ce qui s'obtient en posant :

$$Y_1 = \frac{\Sigma Y_n \times \frac{d_n}{d_n + D_n}}{\Sigma \frac{d_n}{d_n + D_n}}.$$

Nous donnons ci-dessous le développement des calculs auxquels cette formule conduit, dans son application au cas n° 1 du tableau (A), page 313, en faisant remarquer que l'on a :

$$Y_n \times \frac{d_n}{d_n + D_n} = \left[y_n + (y_n - y_{n-1}) \times \frac{d_n + D_n}{d_n}\right]\frac{d_n}{d_n + D_n} = y_n - y_{n-1}\left(1 - \frac{d_n}{d_n + D_n}\right),$$

(1) Dans ces expressions, le second terme du 2e membre devient négatif quand la quantité entre parenthèses le devient elle-même par suite de la relation de grandeur des deux ordonnées qu'elle contient, c'est-à-dire lorsque le phénomène diminue de valeur au lieu d'augmenter.

et que c'est d'après cette dernière forme que les termes $Y_n \times \dfrac{d_n}{d_n + D_n}$ ont été calculés.

	$\Sigma\, Y_n \times \dfrac{d_n}{d_n + D_n}$	$\Sigma\, \dfrac{d_n}{d_n + D_n}$
$118{,}9 - 70{,}1 \times 0{,}75 =$	66 325	0,25
$140{,}2 - 70{,}1 \times 0{,}67 =$	92 233	0,33
$154{,}5 - 70{,}1 \times 0{,}57 =$	114 543	0,43
$164{,}9 - 70{,}1 \times 0{,}50 =$	129 850	0,50
$140{,}2 - 118{,}9 \times \dfrac{67}{75} =$	33 983	0,107
$154{,}5 - 118{,}9 \times \dfrac{57}{75} =$	64 136	0,240
$164{,}9 - 118{,}9 \times \dfrac{50}{75} =$	85 633	0,333
$154{,}5 - 140{,}2 \times \dfrac{57}{67} =$	35 225	0,149
$164{,}9 - 140{,}2 \times \dfrac{50}{67} =$	60 273	0,254
$164{,}9 - 154{,}5 \times \dfrac{50}{57} =$	29 374	0,123
	712 575	2,716

$$\frac{712{,}575}{2{,}716} = 262{,}36$$

Ce sont des calculs analogues à celui qui précède qui nous ont donné les résultats que l'on trouvera inscrits à la colonne 8 du tableau (B) [voir le prochain numéro] sous la désignation : 1er procédé, solution *a*.

Les calculs au moyen desquels sont obtenus ces résultats, que nous discuterons tout à l'heure, quoique ne présentant aucune difficulté, sont laborieux à cause de leur multiplicité, et le deviendraient bien davantage encore, si le nombre d'observations d'après lequel on opère dépassait celui de cinq, que nous fournit le tableau (A), pour le cas n° 1 et plusieurs autres Il est facile de se rendre compte, en effet, que m étant le nombre d'observations, ce qui donne, au contour polygonal de la figure 2, $m - 1$ côtés, le nombre de rencontres élémentaires à calculer, dans le procédé décrit ci-dessus, est représenté par la fraction : $\dfrac{m\,(m-1)}{2}$, ce qui conduit aux conséquences suivantes :

Nombre	d'observations	2	3	4	5	6	7	8	etc.
	de côtés du polygone	1	2	3	4	5	6	7	etc.
	de calculs pour la solution *a* .	1	3	6	10	15	21	28	etc.

D'après cela, au point de vue pratique, ne serait-il pas possible de suppléer à la solution *a,* en combinant entre elles, d'après les règles ci-dessus, les seules valeurs de Y_n obtenues par le prolongement des côtés du contour polygonal, ce qui réduit notablement le nombre de calculs à faire, surtout lorsque celui des observations dépasse 4 ? La question est de savoir si les résultats numériques obtenus par cette modification simplificatrice ne s'éloignent pas trop de ceux donnés par la solution précédente; et, dans l'espèce, toute réponse générale théorique étant impossible, le fait seul peut être invoqué.

Nous avons, en conséquence, repris les calculs dans ce nouveau système, et les résultats obtenus qui sont portés à la 9e colonne du tableau (B), sous la désignation : 1er procédé, solution *b*, montreront combien sont minimes, en fait, les écarts entre les deux solutions

Nous donnons ci-après le spécimen des calculs réduits appliqués au cas n° 1. On y retrouve quatre des dix calculs que comporte la solution *a*. Les sommes représentant les deux facteurs $\Sigma Y_n \times \frac{d_n}{d_n + D_n}$ et $\Sigma \frac{d_n}{d_n + D_n}$ sont bien différentes, mais le résultat final est le même, avec un si faible écart qu'il y a presque identité.

Ces différences sont, pour quelques-uns des cas compris au tableau, relativement plus fortes. On peut néanmoins, sans en faire une règle absolue, considérer, sauf vérification, les deux solutions comme pratiquement les mêmes, et pouvant se suppléer l'une l'autre

	$\Sigma Y_n \times \frac{d_n}{d_n + D_n}$	$\Sigma \frac{d_n}{d_n + D_n}$
$118{,}9 - 70{,}1 \times 0{,}75 =$	66 325	0,250
$140{,}2 - 118{,}9 \times \frac{67}{75} =$	33 983	0,107
$154{,}5 - 140{,}2 \times \frac{57}{67} =$	35 225	0,149
$164{,}9 - 154{,}5 \times \frac{50}{57} =$	29 374	0,123
	164 907	0,629

$$\frac{164{,}907}{0{,}629} = 262{,}17$$

2e PROCÉDÉ : SOLUTIONS *c* ET *d*.

Nous venons de voir que le 1er procédé peut être simplifié, ce qui nous conduit à nous demander si l'on ne pourrait pas, au point de vue pratique, simplifier plus encore la recherche d'un résultat toujours équivoque, quoi qu'on fasse, et qui n'est, ainsi que nous le verrons plus loin, jamais admissible qu'après discussion et correction.

Or, dans le nombre des faits connus, il y en a deux qui attirent, à première vue, principalement l'attention; ce sont les deux constatations extrêmes. Les faits intermédiaires ont leur importance et peuvent, logiquement, servir de base à des corrections rationnelles, mais ils ne peuvent qu'affaiblir, sans l'effacer, le caractère dominant qu'empruntent les deux constatations visées à la circonstance qu'elles expriment le plus *récent* et le plus *ancien* des faits connus.

(*A suivre*.) L.-L. VAUTHIER.