

JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

L.-L. VAUTHIER

Quelques considérations élémentaires sur les constructions graphiques et leur emploi en statistique

Journal de la société statistique de Paris, tome 31 (1890), p. 166-191

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1890__31__166_0

© Société de statistique de Paris, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

II.

QUELQUES CONSIDÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES SUR LES CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES ET LEUR EMPLOI EN STATISTIQUE.

I.

Preliminaires.

Le graphique, dont l'emploi devient si usuel en statistique, n'y joue pas un rôle différent de celui qu'il remplit dans toutes les autres sciences qui en font usage.

Ce rôle, qu'il faut distinguer nettement de celui des *diagrammes* directement obtenus au moyen d'*appareils enregistreurs*, et aussi des tableaux ou *abagues*, d'un ordre bien plus élevé, ayant pour objet de faciliter et d'abrégé certains calculs numériques, consiste essentiellement à peindre à l'œil, par une représentation figurée, des valeurs ou rapports numériques *déterminés par avance*; et ce qui explique et justifie, fondamentalement, dans ces cas, la substitution du dessin à l'algorithme, c'est que l'œil saisit spontanément, avec plus de facilité, sinon plus d'exactitude, le rapport approximatif de grandeur de deux droites et même, quoique beaucoup moins facilement, celui de deux surfaces semblables juxtaposées que l'esprit ne perçoit, d'ordinaire, celui de deux nombres à comparer. Ce à quoi il faut ajouter tout de suite que, lorsqu'il s'agit d'exprimer en même temps plusieurs valeurs numériques ou plusieurs rapports du même genre, le graphique a, par sa nature, l'avantage, en les groupant sous l'œil de l'observateur, de les résumer synthétiquement, tandis que les rapports numériques se succèdent en mode analytique, et ne se présentent à l'esprit que détachés les uns des autres.

Peinture approximative spontanée de valeurs et rapports numériques déterminés ; rapprochement synthétique de valeurs et rapports similaires, tels sont les caractères essentiels, les avantages fondamentaux des représentations graphiques.

Ces avantages sont grands et le parti à tirer du procédé est considérable, à condition d'en respecter scrupuleusement le caractère, et de ne pas le dénaturer, en essayant d'en surfaire la portée. Les représentations graphiques, — on l'a dit avec raison, — constituent une langue nouvelle qui donne aux chiffres qu'elle traduit la vie qui leur manque. Mais quelque heureuse influence que puisse avoir pour la génération des idées la langue qui sert à les exprimer, elle ne les remplace pas, et ce sont toujours les combinaisons intellectuelles qui prévalent.

1. Cette communication a été lue dans les séances de la *Société* d'octobre et de novembre 1889

D'après sa définition même, telle que nous la concevons, le rôle du graphique, quelque utile qu'il soit, est subordonné. Il peint approximativement les rapports numériques, mais n'y supplée pas ; et c'est toujours à ceux-ci qu'il faut en revenir quand la précision rigoureuse est nécessaire.

Si le graphique *traduit*, il ne *crée* rien ; s'il *montre*, il ne *démontre* pas. C'est là une limite absolue qu'il ne faut jamais essayer de franchir.

Ce n'est pas que le graphique ne puisse dans bien des cas, même sous ses formes les plus élémentaires, devenir un précieux instrument de recherche (1) et de contrôle. Il peut faciliter les interpolations rationnelles dans une série numérique, aussi bien que déceler, dans une telle série, des *lupsus* et des incohérences qui s'y seraient glissés. Mais ce sont là, ou des applications spéciales que rien ne réglemente, ou des cas particuliers accidentels. La fonction essentielle du graphique est celle que nous avons indiquée plus haut, et, lors même qu'on le maintient dans ces limites, il faut se défier des impulsions de la causalité que tend à inciter ce mode de représentation.

Les principes qui précèdent conduisent à quelques conséquences pratiques.

Si le graphique est utile, c'est qu'il produit un effet spontané. La *clarté* est sa condition maîtresse, en l'absence de laquelle on peut dire qu'il n'existe pas. Un graphique dont il faut chercher le sens c'est un trait d'esprit qui nécessite explication. Ce qui ne veut pas dire qu'il faille en écarter tout ce qui n'est pas compris de tout le monde à première vue. La compréhension des choses les plus simples exige une certaine préparation. La carte topographique la plus élémentaire ne dit absolument rien à quelqu'un qui n'en a jamais vu. Serait-ce une raison pour proscrire de semblables cartes ? Personne ne le pensera. Seulement il y a des cartes plus ou moins claires. C'est en ce sens qu'il faut entendre ce que nous disons de la clarté dans les représentations graphiques.

Il y a d'ailleurs une distinction essentielle à faire entre la *construction* d'un graphique et sa *lecture*. La construction peut être difficile et la lecture facile, et réciproquement. Combien de gens, pour nous servir de l'exemple que nous venons d'employer, aptes à lire couramment des cartes topographiques, seraient hors d'état de les construire, et ne se doutent même pas de la série des opérations nécessaires pour y arriver ! Les constructions graphiques sont tout à fait dans le même cas ; et il serait absolument irrationnel de proscrire tel système ou tel procédé, donnant des résultats faciles à saisir, parce qu'il exigerait, pour être mis en œuvre, quelques connaissances scientifiques spéciales.

C'est à tous que s'adresse le résultat ; c'est pour tous qu'il doit être préparé ; mais, s'il n'est pas indifférent que le procédé qui y conduit soit autant que possible à la portée de tous, on ne saurait élever contre lui une objection de ce que le maniement en échapperait au premier venu.

Tout ce qui précède a été dit et mieux dit que nous ne l'exprimons. Mais ce préambule nous a paru nécessaire en tête de ce petit travail, où nous nous proposons, indépendamment d'éclaircissements à donner sur une application déjà connue, mais peu ou mal employée, de rechercher quelques-unes des règles à suivre pour

(1) Nous en avons fait une épreuve personnelle. Dans des recherches sur la *dépense d'exploitation* des lignes ferrées en relation avec leur *produit brut*, c'est par la méthode graphique que nous avons pu déterminer la loi simple reliant ces éléments entre eux, et obtenir les valeurs approximatives de coefficients, finalement rectifiés ensuite par le calcul.

l'emploi du procédé graphique. Toute langue comporte une syntaxe. Il est bon que la spontanéité ait fait son œuvre ; beaucoup de créations, dont nous ne connaissons qu'une faible partie, sont pleines d'ingéniosité ; et il serait fâcheux de vouloir prématurément poser des règles strictes. Toutefois, il peut être utile d'en discuter quelques-unes. C'est cette discussion qui nous a tenté.

II.

Emploi additionnel de couleurs ou de teintes monochromes nuancées.

La clarté, avons-nous dit, est la qualité maîtresse d'une représentation graphique, celle sans laquelle elle n'a pas de raison d'être et que rien ne peut suppléer. Mais il est pour elle une autre propriété bien nécessaire : c'est l'*expressivité*. S'il est indispensable qu'un graphique soit facilement compris, il est éminemment désirable qu'il soit frappant d'aspect.

Le plus souvent c'est à l'intervention d'éléments étrangers au graphique proprement dit, notamment à la couleur, à des teintes monochromes nuancées, ou à une combinaison de ces deux éléments, qu'on fait appel pour réaliser la seconde condition indiquée. Et les deux idées marchent si souvent ensemble que la plupart du temps on les confond, quoiqu'elles appartiennent à des domaines bien différents.

Si la ligne est moins précise que le nombre, de leur côté la couleur et les teintes nuancées, — que pour la simplicité du discours nous comprendrons sous le même vocable, — sont moins précises que la ligne.

D'après cela, la couleur ne devrait jouer dans une représentation figurée qu'un rôle accessoire. Là où son rôle devient le principal, on sort, logiquement, aussi bien qu'étymologiquement, de la notion graphique, et il faudrait un autre mot pour caractériser cet emprunt fait à des idées d'un autre ordre.

Ce mot, nous ne le chercherons pas, mais nous aurons soin de distinguer les deux notions, si différentes dans leur portée et leurs aptitudes.

Notons d'ailleurs, qu'il s'agisse de ligne ou de couleur, que, dans les représentations figurées qui nous occupent, tout tend moins à charmer l'œil qu'à lui suggérer des idées. Dès lors, dans l'une et l'autre sphère, on peut admettre, sans s'écarter en rien de la logique des choses, une suite de moyens de différenciation qui ne découlent pas directement de la notion graphique pure. C'est dans cette catégorie de moyens que rentrent les divers ordres de pointillés employés comme succédanés de couleurs différentes, pour distinguer l'une de l'autre des lignes d'ordre divers appartenant à la même figuration.

Toutefois, là encore, il y a souvent certaines règles logiques à observer, et nous en indiquerons quelques-unes dans les observations qui vont suivre.

III.

Essai de classification des représentations graphiques.

Il y a, pour les représentations graphiques, une classification fort simple qui semble ressortir de la nature même des choses. Est-elle bonne et utile ? C'est ce que nous livrons à la discussion.

On peut, par les procédés graphiques, représenter des nombres isolés, sans lien de dépendance entre eux, ce qui constitue une variable *unique* ;

On peut, et c'est là le cas le plus fréquent, représenter graphiquement les rapports mutuels de *deux* éléments variables, dont l'un reçoit des valeurs successives déterminées ;

Enfin la représentation graphique peut s'étendre au cas de *trois* éléments variables dont deux déterminés successivement.

De là, trois degrés ou plutôt trois classes, afin d'éviter toute confusion avec l'expression algébrique *degré*, qui a un sens différent.

La première classe comprendra toutes les représentations ayant pour objet de mettre en présence des figures : lignes ou surfaces, proportionnelles en longueur ou superficie à des nombres détachés correspondant à *la même quantité concrète* ou à *des quantités concrètes* de même espèce. On y pourrait, légitimement, à ce titre, faire rentrer les *stéréogrammes*, ayant pour objet de figurer par leurs volumes relatifs l'importance du stock ou de la production de telles ou telles substances dans un même pays ou dans divers pays donnés. Peut-être même conviendrait-il — mais ce point est plus contestable — de ranger dans cette classe ce que notre collègue, M. Cheysson, dans son rapport sur les méthodes de statistique graphique à l'Exposition de 1878, appelle les « *cartogrammes à foyers diagraphiques* ». Ces dernières reproductions, peut-on dire, ne se bornent pas à figurer les rapports de grandeur d'éléments détachés, mais elles fixent en outre la situation géographique qu'ils occupent. Par ce côté, ne rentrent-ils pas plutôt dans la troisième classe ? Tel ne serait point notre avis, et cet avis est basé surtout sur la différence du procédé graphique qui, contrairement à ce qui a lieu pour la troisième classe, porte exclusivement, dans le cas présent, sur la bonne figuration des éléments numériques détachés.

Nous maintiendrons, en conséquence, provisoirement, sous réserve de meilleur avis ultérieur, les cartogrammes à cartouches ou foyers diagraphiques dans la première classe.

En ce qui touche la seconde classe, il serait superflu d'insister sur ce qu'elle comprend. C'est elle qui constitue presque seule, jusqu'à ce jour, la totalité des représentations de statistique graphique proprement dite. Les constructions qu'elle comporte sont les plus faciles, celles qui sont le mieux à la portée de tout le monde et donnent en même temps, moyennant quelques précautions, les résultats les plus clairs et les plus saisissants.

Quant à la troisième classe, elle ne comprend pas seulement les cartes à relief qui feront l'objet principal des observations qui vont suivre, mais encore toutes les figurations analogues à celles indiquées par M. Léon Lalanne dans son résumé historique de 1878 sur les méthodes graphiques qui lui sont dues, figurations qu'il ne faut pas confondre avec les constructions anamorphiques, d'un ordre bien plus élevé, qu'a créées le même savant.

IV.

Représentations graphiques de la 1^{re} classe.

Par le secours de l'œil, avons-nous dit, l'esprit saisit plus facilement le rapport de grandeur de deux ou plusieurs lignes juxtaposées qu'il ne saisit, en général, le

rapport des nombres correspondants. Cela peut être encore vrai, moyennant une suffisante préparation, lorsqu'il s'agit de surfaces semblables. Mais cela deviendrait faux pour des surfaces dissemblables ; et, même dans le cas de similitude, l'approximation avec laquelle le rapport est perçu est toujours plus faible pour des surfaces semblables que lorsqu'il s'agit de lignes. Quant à ces dernières, quoiqu'il ne faille pas exclure les arcs de circonférences de même rayon, c'est sur les droites particulièrement que s'exerce facilement et exactement l'action comparative.

D'après cela, ce qu'il y aurait de mieux, toujours pour figurer des nombres détachés, ce serait d'employer des lignes ou des colonnes de même largeur, de façon à faire porter exclusivement la comparaison sur une seule dimension. Dans ce cas, le procédé figuratif est aussi simple d'emploi que facile de compréhension ; et, si cela suffisait, nous n'aurions pas davantage à nous en occuper.

Mais on ne peut en rester là. A tout ce que fait l'homme se mêle forcément et très légitimement un impératif esthétique, auquel il faut savoir faire sa place. Or l'emploi de simples lignes ou colonnes est, en général, peu satisfaisant pour l'œil et donne des résultats peu expressifs. De là, la tendance spontanée de presque tous les auteurs à préférer, dans ce cas, des surfaces qui condensent mieux les figurations et leur donnent plus d'expression et de caractère.

C'est ainsi que M. Levasseur, dans sa *Statistique graphique* de 1885, a employé des rectangles et des carrés pour représenter par des aires proportionnelles : d'une part, les superficies ; de l'autre, les populations des principaux États du globe (1). C'est encore ainsi que M. Cheysson, dans ses albums si remarquables de statistique graphique, fait appel à des éventails disposés en demi-cercles, pour figurer, à diverses époques, le mouvement maritime des ports français et la répartition de ce mouvement entre les divers pays de provenance et de destination (2).

Il est à remarquer que dans cette dernière figuration la mesure visuelle des rapports n'est pas seulement provoquée par des éléments superficiels, mais aussi par des éléments linéaires. Chacun des éventails est, en effet, partagé en secteurs dont les rapports mutuels de grandeur résultent simplement de l'arc qu'ils embrassent. C'est ce qui arrive dans une foule de cas de ce genre, et loin de nous en plaindre nous nous en félicitons.

L'Exposition statistique de l'Amérique du Nord, en 1878, contenait des spécimens de figurations de cette sorte extrêmement réussis. A la population de chaque État de l'Union était affecté un carré de surface proportionnelle, partagé, par deux verticales, en trois rectangles de largeur inégale, dont deux, à droite, divisés eux-mêmes par des horizontales, et tous les cinq portant des teintes différentes, reproduites dans le même ordre d'un carré à l'autre. Des trois premiers rectangles énumérés, celui de gauche représentait la population de l'État née *hors* de l'Amé-

(1) L'auteur, dans cette figure, qui n'en reste pas moins très expressive, a mêlé abusivement des carrés et des rectangles dissemblables, ce qui fait que, sans les nombres inscrits dans chaque quadrilatère, on en saisirait difficilement le rapport de grandeur. Mais on voit que, pour ainsi procéder, il a obéi à une nécessité de groupement dont on ne peut méconnaître, dans une certaine mesure, la légitimité et l'heureux effet.

(2) Cette figuration comporte une observation, mais étrangère au procédé graphique. Deduite du tonnage de jauge des navires, elle exprime le *mouvement de la navigation*, mais non, comme le titre semblerait l'indiquer, le *trafic commercial*, dont le mouvement de la navigation ne donne qu'une idée inexacte, variable aussi bien d'un port à l'autre que d'une époque à l'autre.

rique du Nord ; les deux autres, la population de couleur et la population blanche *originaires* des États-Unis, les portions inférieures de chacun de ces derniers rectangles consacrées respectivement aux gens de couleur et aux blancs nés *dans l'État*, les portions supérieures à ceux nés hors de l'État. A chaque carré se trouvait annexé, sur le même plan, un rectangle de même hauteur, divisé en deux par une horizontale, et donnant les blancs et gens de couleur nés dans l'État mais vivant au dehors.

Cela nous a paru, à l'époque, des *mots statistiques* extrêmement bien faits.

D'autres carrés encore, représentant, pour chaque État, la population totale au-dessus de 10 ans, portaient, centralement, un carré plus petit, figurant la fraction de la population occupée lucrativement ou fréquentant les écoles, ce dernier divisé en cinq rectangles affectés : à l'agriculture ; à l'industrie manufacturière ; au commerce et aux transports ; aux services personnels et professions libérales ; enfin, à la population scolaire. La zone formant cadre, comprise entre les deux carrés concentriques, se trouvait représenter ainsi la population au-dessus de 10 ans, non occupée d'une façon lucrative.

Ces figurations placées sur une carte de l'Union Américaine, à l'emplacement de chaque État, auraient constitué un cartogramme à foyers diagraphiques. Il ne nous paraît pas, cela eût-il été réalisé, que cette opération eût modifié le caractère de la représentation graphique, portant presque exclusivement sur la bonne constitution des carrés, et qu'elle fût suffisante pour faire passer cette représentation de la première à la troisième classe.

Il faut convenir d'ailleurs que les cartogrammes à foyers diagraphiques ne sont vraiment intéressants que lorsque les foyers ou cartouches qui en constituent le principal intérêt sont heureusement construits et qu'on ne veut pas charger la carte d'un trop grand nombre de renseignements. Il y a telle de ces cartes figurant à l'Exposition actuelle (1), dont on a voulu faire une sorte d'encyclopédie complète et qui, par la multiplicité des cercles, des carrés et des triangles multicolores dont elle est illustrée, perd absolument l'avantage essentiel de clarté et de facile lecture qui est l'apanage et doit rester la caractéristique des figurations graphiques.

En revanche, nous nous plaisons à citer un exemple de ce genre qui nous a particulièrement frappé par sa simplicité expressive. C'est, à l'Exposition du Ministère de l'Instruction publique, un couple de cartes destinées à indiquer les progrès de l'instruction par département, de 1837 à 1887. Sur toutes deux, des cercles de même diamètre contenus dans le périmètre de chaque département figurent la population totale, dont la fraction illettrée est représentée par un cercle noir concentrique, la population lettrée formant ainsi, autour de ce dernier, un anneau teinté en jaune d'ocre. Sur la carte de 1837, les cercles noirs sont beaucoup plus grands que sur la carte plus récente, ce qui constitue déjà un effet général très saisissant ; mais, lorsqu'on y regarde avec plus d'attention et qu'on compare l'un à l'autre les divers départements, il semble que l'on voit, en passant de la première à la seconde, des yeux qui s'ouvrent en se dilatant à la lumière. L'effet est magique et peut-être le serait-il plus encore si les teintes avaient été interverties, et si la teinte jaune avait été placée au centre, le noir réservé pour l'anneau (2).

(1) Ceci était écrit avant la fermeture de l'Exposition de 1889.

(2) Au cours de la lecture de ce travail à la Société de Statistique, nous avons appris que l'idée de ces cartes si bien réussies était due à M. Cheysson.

En définitive aucune règle stricte n'est à tracer pour les figurations graphiques de la première classe, en dehors de celles qui relèvent de la précision, de la clarté, et de la logique ; mais, dans le nombre, il faut placer celle-ci qu'il est toujours préférable de faire porter la comparaison sur des lignes que sur des surfaces. Quant au reste, il convient de s'appliquer à le réaliser par surcroît ; c'est loin d'être à négliger, et cela est surtout nécessaire lorsqu'il s'agit de répartir ces cartouches sur des cartes. Certaines de celles-ci sont presque ridicules par la disgracieuse disposition des foyers diagraphiques qui y sont semés.

V.

Représentations graphiques de la seconde classe ; courbes compensatrices.

Dans cette classe, nous sommes logiquement portés à comprendre, avec les graphiques à coordonnées orthogonales ou polaires, ce que M. Cheysson désigne sous le nom de « cartogrammes à bandes », d'un emploi si fréquent aujourd'hui pour exprimer le mouvement des voies de transport, et qui ont pour objet de mettre en relation deux variables : le tracé de la voie et sa fréquentation en chaque point. Rien ne distingue, en effet, ces cartes des graphiques ordinaires à coordonnées orthogonales en dehors de ces circonstances que la ligne des abscisses, base du graphique, au lieu d'être rectiligne, est une ligne courbe ou brisée, et que la bande de largeur variable est, en général, rapportée symétriquement de part et d'autre de la ligne des abscisses, au lieu d'avoir ses ordonnées situées d'un seul côté, ainsi qu'il arrive le plus souvent, mais pas toujours, pour les graphiques ordinaires.

Ce point de classification vidé, — et après avoir pris note, en passant, de ce fait que les stéréogrammes mettant en relation deux variables, tels que ceux donnant, à l'Exposition, la population à ses divers âges et la production de la houille en France, depuis un certain nombre d'années, rentrent logiquement dans la seconde classe, — il n'y a rien à ajouter ici quant aux cartogrammes à bandes, dont les effets sont si frappants et qui offrent de si puissants secours dans toutes les études se rattachant aux questions de transport. Un seul défaut serait à leur reprocher, c'est la confusion qui résulte, vers les nœuds de circulation où la fréquentation est beaucoup au-dessus de la moyenne, de la superposition des bandes et de l'enchevêtrement de leurs contours. Cette confusion et l'infirmité qu'elle accuse n'est pas spéciale aux bandes. Un défaut analogue peut se produire sous des formes diverses dans tous les graphiques de la seconde classe ; ce défaut tient, pour toute figuration qui comporte des éléments similaires de grandeurs très différentes, à la stricte proportionnalité inhérente au graphique. C'est une observation sur laquelle nous reviendrons. Dans l'espèce des cartes à bandes, on pourrait parer au défaut signalé, en réduisant beaucoup (selon l'échelle de la carte) celle qui sert à établir les bandes, seulement alors, si la même carte comprenait, ainsi qu'il arrive le plus souvent, des voies fortement chargées et d'autres qui le sont très peu, ces dernières se distingueraient à peine et disparaîtraient presque de la carte. Il est préférable dans ce cas, et c'est ainsi que la pratique résout la difficulté, de placer, à part, dans des cartouches détachés, à plus grande échelle topographique, ce qui se rapporte aux nœuds de circulation.

Après cette digression relative aux cartogrammes à bandes, arrivons aux gra-

phiques les plus répandus de la seconde classe, dont la construction comporte l'emploi soit de coordonnées orthogonales (1), soit de coordonnées polaires; et commençons par les coordonnées orthogonales.

Graphiques à coordonnées orthogonales. — Considérons une des figurations graphiques les plus simples. Il s'agit d'un phénomène observé, statistique ou autre, qui se déroule dans le temps. La période de l'observation est indifférente : supposons que ce soit le jour.

L'idée la plus courante est de porter le temps sur la ligne des abscisses, en attribuant à chaque jour des segments de longueur égale, et de représenter ensuite à une échelle quelconque, dont le choix est d'ailleurs loin d'être indifférent (2), l'intensité variable du phénomène par des longueurs portées sur les ordonnées.

Ceci est le dernier degré du rudimentaire. Toutefois, ce problème, tout simple qu'il est, soulève plusieurs questions dont la solution logique, presque toujours la meilleure, comme clarté et expression, varie suivant les divers cas. Par quels points de la ligne des abscisses doivent être élevées les ordonnées? Ces ordonnées doivent-elles rester isolées? Doivent-elles, au contraire, former comme une série de colonnes juxtaposées? Et, ces questions résolues, comment le tableau doit-il se terminer dans le haut? Par des points isolés? Par des horizontales à la hauteur des sommets des ordonnées? Par une ligne brisée réunissant ces sommets entre eux? Enfin par une courbe continue? Essayons de répondre à ces diverses questions.

Supposons quatre phénomènes différents que nous empruntons à l'ordre physi-

(1) Dans ce système de coordonnées, où les valeurs des deux variables sont représentées par des longueurs portées, à partir du point de croisement, sur deux axes rectilignes formant entre eux un certain angle, la perpendicularité de ces axes n'est pas absolument nécessaire, et la géométrie emploie souvent des coordonnées obliques. Peut-être cette disposition pourrait-elle être utilisée dans certains cas en statistique graphique. Nous n'en connaissons pas d'exemples.

(2) Ce choix importe, non pas seulement pour l'espace dont on dispose, mais encore pour l'expressivité du graphique lui-même. Si l'échelle des ordonnées est trop faible par rapport à celle des abscisses, les différences en hauteur sont peu accusées et le graphique est mou. Si cette échelle est trop forte, certaines différences s'accroissent trop énergiquement, et, pour avoir trop haussé le ton, le graphique devient criard.

Les observations qui précèdent tombent sous le sens. Une autre qui, au premier abord, frappe moins l'attention, est la suivante, déjà indiquée à propos des cartogrammes à bandes. Quand un phénomène présente, en même temps que des valeurs faibles et peu différentes, d'autres valeurs au contraire très considérables, il est bien difficile de le représenter dans son ensemble à la même échelle. Si, afin de n'avoir pas de hauteurs excessives pour ces dernières, on prend une petite échelle, on n'aura que des variations insignifiantes pour les premières; et, si pour accuser, au contraire, les variations faibles on grandit l'échelle, les valeurs considérables prennent des dimensions exagérées.

On a là quelque chose d'analogue à ce qui se passerait dans un profil en long de terrain qui comprendrait à la fois des régions de plaines et des contrées fortement accidentées, telles qu'un passage des Alpes, par exemple. Si pour la plaine, avec des hauteurs décuplées des longueurs, ainsi que les ingénieurs le font généralement, on établissait les ordonnées à l'échelle de 1 millimètre pour 1 mètre, celles-ci prendraient, quand le profil coupe les Alpes, des hauteurs de 2 mètres, 3 mètres et 4 mètres, c'est-à-dire des dimensions absolument disproportionnées. Or, certains phénomènes statistiques, la population à l'hectare, par exemple, varient dans des proportions aussi fortes que les altitudes topographiques.

Il y a donc là une sorte d'*infirmité*, spéciale aux représentations graphiques, qui est dans la nature des choses, et qu'il ne faut pas essayer d'esquiver. Les statisticiens ne sont pas les seuls à en souffrir. Le meilleur remède est d'avoir un champ pour les valeurs faibles, un autre pour les fortes, avec échelles différentes d'un cas à l'autre.

que, sans bien nous inquiéter de savoir si nos données hypothétiques sont usuellement employées ou non, ce qui importe peu pour notre investigation graphique. Imaginons que l'on donne, pour un lieu déterminé, et une série de jours :

1. La température maximum diurne observée ;
2. La hauteur des eaux d'une rivière à midi ;
3. La moyenne température diurne ;
4. La moyenne hauteur diurne des eaux de la rivière susvisée.

Il s'agit de construire les quatre graphiques.

Les données 1 et 2 ne concernant qu'un instant indivisible de chaque jour, les ordonnées qui s'y rapportent, élevées, dans chaque segment diurne, par les points correspondants à l'heure de l'observation, doivent, logiquement, être considérées comme des éléments isolés. Les données 3 et 4, au contraire, embrassent, chacune, toute la période diurne ; elles doivent, par ce motif, constituer des colonnes juxtaposées ayant pour base les segments. Et cette solution ne résulte pas de ce que les données 3 et 4 représentent des moyennes, mais bien de la raison que nous indiquons.

Ces bases établies, et les longueurs voulues, pour les ordonnées isolées ; les hauteurs voulues, pour les colonnes, ayant été portées à leurs places respectives, comment terminer le tableau par le haut ?

Pour les graphiques 3 et 4 (voir page suivante), il n'y a pas à hésiter ; c'est de limiter chaque colonne par une horizontale. Les profils supérieurs seront des escaliers ascendants et descendants formés d'échelons plus ou moins élevés. Ce n'est ni joli ni élégant, mais c'est clair ; et, au fond, cela rend, graphiquement, tout ce que fournit, numériquement, la série des données. Toutefois nous y reviendrons tout à l'heure et montrerons qu'on peut, dans certains cas, faire mieux et plus expressif.

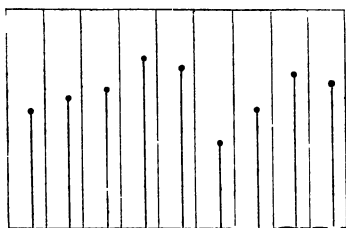


Fig. 1.

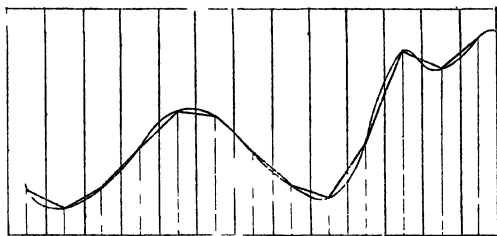


Fig. 2.

Cela dit, que faire pour le graphique 1 ? Tracera-t-on des horizontales, dans l'étendue de chaque segment, par les sommets des ordonnées ? Cela n'aurait pas de sens, et exprimerait même une idée fausse. L'élément donné est la température, à un moment de la journée où elle atteint en général son maximum, c'est-à-dire vers 2 heures et demie. Cette température ne se maintient pas tout le jour pour changer brusquement à minuit : c'est cependant ce que semblerait dire le graphique. Réunira-t-on par une ligne brisée les sommets des ordonnées ? Cela ne vaudrait pas mieux et serait tout aussi faux. De chaque maximum à ceux qui le précèdent et le suivent, la température s'abaisse pour se relever. Il n'y a qu'une solution logique, c'est de laisser les ordonnées isolées par le haut, en les terminant par un point, pour en bien marquer le sommet, ainsi que le représente la figure 1. L'œil a ainsi tout ce qu'il peut avoir, sans que l'esprit soit induit en erreur : une

série de points, les uns plus haut, les autres plus bas, lui disant comment varient en intensité les maximums successifs de la chaleur diurne, en même temps que la rapidité plus ou moins grande de ces variations ascendantes ou descendantes.

Passons au graphique 2. Ici, le cas n'est plus le même. Sauf circonstances particulières, que nous signalerons, d'un midi à l'autre la rivière croît ou décroît. Cette marche peut ne pas être régulière; toutefois, en joignant par des droites les sommets des ordonnées, la ligne brisée obtenue figurera logiquement la marche du phénomène et la croissance ou décroissance continue des eaux. Cependant, deux cas particuliers se présentent. Entre deux midis successifs, après avoir crû, la rivière peut décroître, ou réciproquement; le graphique ne le dira pas. Au lieu d'une portion de profil se relevant ou s'abaissant entre les deux midis successifs, il donnera une droite. La représentation du phénomène est faussée.

Comment peut-on parer à cet inconvénient, et peindre plus exactement la marche réelle du phénomène? En faisant passer par la série des points fournis par l'observation, non plus une ligne brisée, mais une courbe *continue*, dont les segments du contour polygonal ne seront plus que des cordes. Cette courbe, à laquelle on ne peut imposer d'autre condition absolue que la continuité, c'est-à-dire l'absence de jarrets, mais qui, pour être logiquement tracée, doit avoir le moins d'inflexions et les variations de courbure le mieux graduées possible, s'adapte au phénomène d'une façon plus exacte, surtout plus expressive, que la ligne brisée; et, dans l'exemple que nous donnons (fig. 2), on voit que dans plusieurs des points où le mouvement ascendant ou descendant change de sens, la courbe s'élève au-dessus ou s'abaisse au-dessous du segment de contour polygonal qu'elle remplace.

Cela veut-il dire, toutefois, d'une façon absolue, que l'on obtienne ainsi une courbe complètement identique à ce que serait le diagramme que tracerait directement l'eau elle-même au moyen d'un appareil enregistreur? Non sans doute. Le diagramme contiendrait probablement dans ses segments diurnes des dentelures de détail plus ou moins accusées que la courbe ne donne pas; mais, si celle-ci est logiquement tracée, elle a toute chance de se confondre sans différence appréciable avec le diagramme dont il s'agit.

Revenons après ces explications aux graphiques 3 et 4.

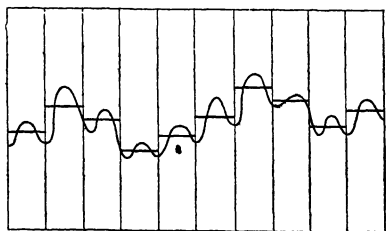


Fig. 3.

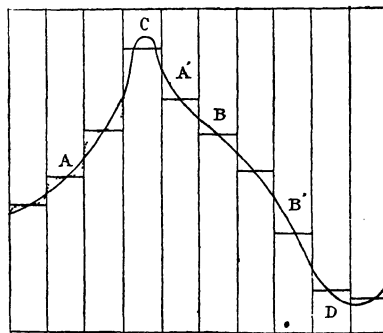


Fig. 4.

En quelque nombre que soient et de quelque façon qu'aient été combinées les observations faites pour constater les moyennes, nous savons, en ce qui concerne le graphique 3, que, dans chaque période diurne, il y a ascension de la tempéra-

ture de la nuit au jour, et abaissement, au contraire, du jour à la nuit. Un appareil enregistreur qui tracerait directement le diagramme des hauteurs thermométriques présenterait, non plus une courbe avec des dentelures adventices, comme nous venons de le dire à propos du cas précédent, mais une courbe sinusoïdale du genre de celle que contient la figure 3, avec doubles dentelures diurnes se reproduisant périodiquement. Ce pourrait être un problème intéressant que de chercher le caractère de ces dentelures thermo-diurnales, soit aux diverses saisons de l'année, soit dans le cours d'une année entière, soit pour une période plus longue ; et cette recherche faite d'abord numériquement pourrait donner lieu à la construction d'un graphique digne d'attention, surtout avec la disposition polaire. Mais le caractère et les variations de la dentelure dont il s'agit ne sont pas censés avoir laissé de trace dans le nombre unique qui donne la température moyenne de chaque jour. Ce nombre ne dit pas quels sont les maxima et minima successifs. Pour substituer aux horizontales de la figure 3 la dentelure sinusoïdale représentée, il faudrait des données en dehors de la moyenne, ce que nous ne supposons pas. Une telle substitution impliquerait d'ailleurs que l'échelle du graphique fut considérable, sans quoi la dentelure perdrait tout caractère. Enfin cette sinusoïde elle-même parlerait moins clairement à l'œil, et n'en dirait pas plus à l'esprit que les horizontales remplacées. Il est de beaucoup plus logique et plus simple, dans l'espèce, de rester dans le champ strict des moyennes et de conserver tout simplement les horizontales qui les expriment.

Il n'en est pas de même pour le graphique 4. Ici nous n'avons plus d'ascensions et d'abaissements diurnes périodiques ; et, quoique la succession des hauteurs moyennes représentée par la série des horizontales ne présente rien de choquant, quoique ce soit même là ce qui exprime, graphiquement, avec plus de précision que toute autre chose, les hauteurs moyennes diurnes de l'eau, seules données qu'on possède, on se sent toutefois en présence d'un phénomène à marche continue ; les moyennes ne disent rien des hauteurs d'eau aux diverses heures du jour, et il serait plus expressif, tout en respectant ces moyennes, de peindre par leur secours le phénomène dans toute sa réalité continue.

Cela n'est pas impossible ainsi que nous allons le montrer.

Supposons le problème résolu. Imaginons qu'à l'aide d'un nombre d'observations suffisamment multipliées, ou même d'un enregistreur automatique, on ait construit un dessin ou obtenu un diagramme donnant la courbe hydrométrique (fig. 4), et qu'il s'agisse d'en déduire les moyennes hauteurs diurnes de l'eau.

Il suffira pour cela de substituer à chacun des arcs de courbe compris dans les divers segments diurnes une horizontale qui laisse entre elle et la courbe, tant en dessus qu'en dessous, des surfaces parfaitement égales. Cette égalité absolue, qui serait la perfection, ne peut, au vis-à-vis d'arcs de courbe non définis géométriquement, s'obtenir par aucun procédé rigoureux ; mais, avec quelque attention, de l'habitude et un petit nombre de notions géométriques, on peut en approcher de très près.

Quelques indications très élémentaires peuvent y aider.

A la montée aussi bien qu'à la baissée de l'eau, tant dans les segments tels que A et A' où les arcs sont concaves vers le haut, que dans ceux tels que B et B' où ces arcs tournent vers le haut leur convexité, l'horizontale donnant la moyenne coupe toujours l'arc plus près de celle des deux verticales au voisinage de laquelle

le mouvement d'ascension ou de descente est le plus rapide. Le triangle mixtiligne contigu à cette verticale a plus de hauteur, et, quoique le sens de la courbure réduise sa surface tandis qu'elle augmente celle de l'autre, c'est, en général, le triangle le plus pointu qui doit avoir une base moindre ; d'où suit, par voie de conséquence, que, dans le cas des segments concaves, l'horizontale domine le point de la courbe à midi, tandis qu'elle est au dessous de ce point dans le cas des segments convexes.

Quant aux segments spéciaux, tels que C et D, où le mouvement change de sens, le principe de la compensation par égalité des surfaces interceptées subsiste toujours. Seulement le mesurage s'applique alors à des surfaces de formes plus différentes. Ce sont, en général, deux triangles mixtilignes à comparer avec un segment

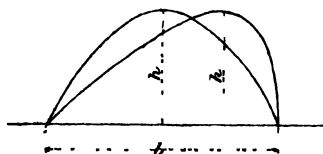


Fig 5

superficiel (fig. 5) enveloppé par la courbe et ayant l'horizontale pour base. Or, deux indications très simples peuvent faciliter le mesurage comparatif : la première c'est que des segments enveloppés par deux courbes de même hauteur, l'une symétrique, l'autre non symétrique, ne diffèrent pas pour cela de superficie ; la seconde que l'un ou l'autre de ces segments a pour surface très approchée le produit de sa base b par les $2/3$ de sa hauteur h , ce qui n'est rigoureusement vrai que lorsque la courbe est une parabole du second degré, mais se vérifie, en général, à une très minime différence près.

Le résultat qui précède obtenu, et étant démontré qu'on peut, au moyen de la courbe réelle peignant le phénomène, tracer les moyennes diurnes correspondantes, rien n'est plus simple, en renversant les termes, que de concevoir que l'on déduise des horizontales de la figure 4 la courbe qui a servi à les obtenir.

Pour le tracé de cette courbe, les règles à suivre sont les mêmes que celles indiquées à propos du graphique 2 ; mais, quoique dans ce dernier cas on possède des points de la courbe, tandis que, dans le graphique 4, ce secours fasse défaut, le mouvement de la courbe est ici plus étroitement conditionné que dans le cas de la figure 2. — et cela par la nécessité de la compensation des surfaces au-dessus et au-dessous de l'horizontale, dans chacun des segments diurnes. Sans doute cette compensation peut s'établir de bien des façons, et nous en donnons un exemple du côté gauche de la figure 4. Mais la courbe sinusoidale tracée en pointillée et toutes celles du même genre que l'on pourrait intercaler entre elle et la courbe pleine ne satisfont pas à la condition essentielle d'une marche *continue* du phénomène ; toutes sembleraient dire que le mouvement de montée ou de baisse s'accélère la nuit et se ralentit le jour, ce qui ne correspond en quoi que ce soit aux réalités naturelles. Ces réalités naturelles c'est la courbe ACA'BB'D qui les représente seule avec les caractères assignés ci-dessus d'avoir le moins d'inflexions et les variations de courbure le mieux graduées possible ; et, si le diagramme que tracerait un enregistreur présentait quelques ondulations de détail non exprimées par elle, comme ces

ondulations ont dû influencer sur la détermination de la moyenne diurne, on peut être assuré, dans l'espèce, mieux que dans le cas du graphique 2, que la courbe théorique laisse autant de ces ondulations en dessus d'elle qu'en dessous, autant à sa droite qu'à sa gauche.

Courbes compensatrices. — Nous donnons aux courbes théoriques telles que ACA'BB'D le nom de *courbes compensatrices*. Ces courbes correspondent à une notion essentielle pour la représentation graphique, à la fois logique et expressive, de phénomènes naturels ou statistiques à marche *continue*, numériquement donnés par des moyennes.

Les courbes compensatrices ont, jusqu'à présent, été peu employées en statistique. Nous pensons qu'elles peuvent rendre quelques services. Mais il importe de ne pas en abuser ; surtout de ne pas les employer à faux. Elles ne s'appliquent strictement qu'au cas où le phénomène est donné par des moyennes ; nullement à ceux analogues au cas de la figure 2, où l'on ne connaît du phénomène que des valeurs isolées. La courbe substituée au tracé polygonal dans cette dernière figure a pour objet de remplacer l'expression discontinue et par cela même nécessairement fautive d'un mouvement naturel, par une courbe dont les ondulations continues le peignent, selon toute probabilité, avec plus d'exactitude. Mais cette courbe n'est pas pour cela compensatrice. Elle serpente autour du contour polygonal, mais il n'y a nulle raison pour chercher entre les segments qu'elle laisse tantôt d'un côté, tantôt de l'autre, aucune équivalence, tandis que ce point est essentiel et fondamental dans le cas de la figure 4.

Quoique portant, en apparence, sur des minimités, la question à laquelle ceci touche est importante. Nous croyons devoir y insister un peu.

Prenons un exemple connu. Empruntons à un opuscule de M. le docteur Janssens sur la mortalité de la ville de Bruxelles en 1877, une portion (fig. 6) de l'un des tracés graphiques par lesquels il exprime le nombre des décès mensuels dus à l'une des classes de maladies (l'entérite et la diarrhée).

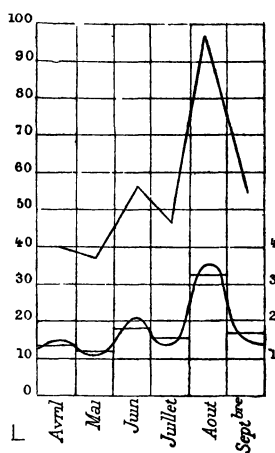


Fig. 6.

L'auteur a placé, à l'échelle, au milieu de chaque segment mensuel, un point correspondant au nombre total de décès constatés ; puis il a réuni ces points par des

droites. On saisit parfaitement ainsi les changements mortuaires en plus et en moins d'un mois à l'autre. Si la figure ne comprenait qu'une maladie unique, des points seuls en diraient autant. Mais, comme cette figure en réunit plusieurs, les droites de jonction, utiles dans tous les cas pour guider l'œil, sont ici indispensables ; et, grâce à l'emploi de traits pleins ou pointillés (pouvant, suivant les cas, être remplacés par des couleurs), le tableau est très clair et exprime bien ce qu'il veut dire, pourvu qu'on n'attribue pas aux droites de jonction d'autre caractère que celui indiqué.

Ne pourrait-on pas, toutefois, chercher à remplacer par des courbes ces contours polygonaux un peu dégingandés, présentant des pointes aiguës, et de brusques montées et descentes qui ne correspondent guère à la marche des faits naturels ? Dans l'espèce, avec les données constitutives du tableau, ce serait une complète erreur. Dans la figure 2, où nous avons substitué une courbe au polygone, les sommets de ce dernier étaient déterminés par une seule valeur numérique du phénomène, correspondant exactement à la place occupée par l'ordonnée sur l'abscisse. Dans le cas de la figure 6, rien de semblable. Les ordonnées sont obtenues par totalisation, et c'est conventionnellement qu'elles sont placées au milieu du segment mensuel. Une courbe sinueuse qui rattacherait leurs sommets serait un contresens. Ces ordonnées pourraient, sans doute, être considérées, si les mois étaient tous d'égale longueur, comme représentant à peu près des moyennes ; il n'y aurait là qu'une différence d'échelle, mais alors le tracé des courbes à substituer au polygone ne consisterait pas à réunir ces sommets ; il relèverait du cas de la figure 4 ci-dessus, non de celui de la figure 2, et, pour montrer la différence, il nous a semblé utile d'en donner l'application sur la figure 6 elle-même.

Dans le bas de cette figure, à une échelle décuple du tracé original, sont représentées les moyennes mensuelles par des horizontales, et la sinusoïde mortuaire est tracée, d'après celles-ci, au moyen de courbes compensatrices. Les ordonnées de cette sinusoïde ne représentent plus que des décès journaliers dont la somme, pour un même mois, rétablirait les totaux de la figure originale ; et l'on aurait ainsi une image approchée des mouvements mortuaires diurnes dus à la maladie considérée. Dans les cas où ce dernier objet présenterait une importance marquée, le tracé courbe vaudrait mieux que l'autre. Mais, pour le but poursuivi par le docteur Janssens, c'eût été tomber dans des complications inutiles. Avec plusieurs maladies réunies dans le même cadre, les courbes se seraient enchevêtrées ; le tracé polygonal par totaux mensuels, parfaitement clair et très simple, valait mieux. Un procédé n'est bon qu'à sa place. C'est le cas des tracés courbes, et il faut surtout se garder de les employer illogiquement et à faux.

Nous appliquerons cette conclusion aux diagrammes symétriques ou quasi-symétriques, si élégants en général, analogues à ceux que consacre à certains phénomènes de population et de mortalité l'Album de statistique graphique du ministère du Commerce. Dans cet album, la séparation par sexes suffit pour donner à ces diagrammes des formes esthétiquement très satisfaisantes ; et, lorsqu'intervient la distinction par état civil, les figures inscrites l'une dans l'autre conservent encore un galbe attrayant, en même temps que l'œil saisit facilement les rapports numériques que les figures mettent en évidence. Seulement, ces diagrammes sont dressés d'après des moyennes quinquennales. De là, des redans que des courbes compensatrices, faciles à tracer et parfaitement à leur place ici, feraient disparaître. L'auteur

de l'album a songé à cette substitution ; nous l'avons constaté à l'Exposition, et l'avons nous-même essayé. Avec du soin, dans les cas simples, on obtient des formes très gracieuses ; dans les cas complexes, là où trois courbes devraient marcher parallèlement, ce serait notablement plus difficile et moins satisfaisant ; dans tous, nous croyons que la substitution doit être écartée. L'avantage ne compenserait pas les inconvénients. L'œil suit sans fatigue les gradins échelonnés, en saillie ou en retraite, de deux tranches successives qui décroissent ou s'allongent ; et, dans les cas complexes, il saisirait beaucoup moins bien, avec des contours courbes, les rapports de grandeur des catégories distinctes composant chaque tranche. Pour un effet d'ensemble, il faut conserver les gradins. Il en serait autrement si l'on tenait à représenter, non plus par périodes, mais continuellement, la marche du phénomène. Les courbes alors seraient à leur place ; seulement, elles diraient autre chose que ce que l'auteur a voulu exprimer.

En résumé, pour la seconde classe, dans le système orthogonal, la spontanéité nous paraît avoir heureusement fait son œuvre. Elle a été guidée par le besoin de simplicité et de clarté. C'étaient là les meilleurs guides. La notion des courbes compensatrices peut lui rendre quelques services à condition de recevoir un emploi judicieux. Au total, la statistique graphique est en bonne voie, pour les figurations de la seconde classe. A peine aurions-nous quelques mots à ajouter sur les ordonnées négatives. Mais nous retrouverons tout à l'heure, à propos de la troisième classe, cette question qui y prend plus d'importance.

Graphiques à coordonnées polaires. — Ce système, avec ses angles et ses rayons vecteurs, est aussi connu et presque aussi appliqué que le système orthogonal avec ses abscisses et ses ordonnées. Nous ne le décrirons pas. Rien ne paraît logiquement s'opposer à ce qu'il supplée l'autre en toutes fonctions. Les praticiens n'en ont pas jugé ainsi, et ils ont assigné aux coordonnées polaires des emplois à part. Nous aurons nous-même quelques réserves à faire. Commençons par justifier les praticiens.

Chacun reconnaît que les constructions en coordonnées polaires sont douées d'une certaine élégance décorative. Elles sont expressives, se replient sur elles-mêmes et tiennent peu de place. Cependant leur véritable domaine n'est guère que celui des représentations qui, dans l'espace, embrassent ce que les marins appellent le tour du compas, et, dans le temps, comprennent seulement un cycle entier : heure, jour, mois, ou année. Pour une période de temps indéterminée, ou le graphique polaire ne comprendrait qu'une partie de la circonférence, ce qui serait gauche, ou il s'étendrait, au contraire, à plusieurs révolutions circulaires, et alors les spires successives, ramenées sur elles-mêmes, risqueraient, sauf cas particuliers, de s'enchevêtrer et de se confondre, ce qui n'arrive pas avec le système orthogonal qui les déroule à la suite les unes des autres.

Ces points posés, nous pourrions, pour le système polaire, examiner, quant aux dispositions à suivre pour terminer ou circonscrire le graphique, les mêmes questions que nous avons étudiées ci-dessus à propos des coordonnées orthogonales. Nous préférons raisonner sur un exemple.

Prenons, à cet effet, l'un des diagrammes polaires si frappants exposés en 1878 par le docteur Janssens déjà cité, pour figurer les mortalités mensuelles résultant à Bruxelles de diverses causes dans la période décennale 1864-1873. Il est diffi-

cile de frapper plus fort, et de montrer avec plus d'éloquence la variété des influences morbides des diverses saisons de l'année. Voici la construction : sur les bissectrices de 12 secteurs circulaires égaux comprenant un cercle entier sont, pour chaque cause de mort, portées, à partir du centre, des longueurs proportionnelles aux moyennes mensuelles de la période. Les extrémités ainsi déterminées des rayons vecteurs sont unies par des droites, faisant de l'ensemble un polygone irrégulier; la moyenne générale annuelle a donné le rayon d'une circonférence également décrite sur la figure; et les surfaces tant intérieures qu'extérieures au cercle comprises entre le polygone et la circonférence sont teintées de couleurs différentes.

Rien n'est plus frappant que le résultat; est-il parfaitement juste? Examinons.

Avec le même mode de construction, dans le système orthogonal, des bandes verticales de même largeur figurant les divers mois, et la moyenne annuelle, calculée de la même façon, établie horizontalement à la hauteur voulue, les portions de la figure situées au-dessus de l'horizontale et celles situées au-dessous présenteraient une étendue superficielle parfaitement égale, ainsi que cela doit être. Il n'en est pas de même dans le système polaire. En s'éloignant du centre les secteurs s'élargissent, et, si, quant aux rayons vecteurs, la somme des segments en dedans de la circonférence est égale à celle des segments en dehors, les surfaces intérieures sont forcément moindres que les surfaces extérieures. En rendant la figure expressive et frappante, on l'a faussée. Les circonstances défavorables sont exagérées au détriment des favorables.

Cela tient-il au mode de formation du contour polygonal? Non. Ferait-on passer dans chaque secteur, des arcs de cercle par les extrémités des rayons vecteurs, qui représentent des moyennes, ce serait un peu plus logique, mais la nouvelle figure à périmètre discontinu, ainsi constituée, serait plus disgracieuse, et, au point de vue de la compensation des surfaces, on aurait plutôt forcé qu'atténué le manque d'équilibre, qui est un vice constitutif.

Il serait encore possible, facile même, de substituer à ce dernier contour une courbe compensatrice. On n'y gagnerait rien; le défaut subsisterait. Le seul moyen serait d'attirer l'attention exclusivement sur les bissectrices seules, et, pour cela, de les laisser isolées, en les terminant par des points. Mais la figure perdrait alors toute expression. Le remède serait pire que le mal. Le mieux est de s'en fier à l'intelligence de l'observateur.

Il n'était pas mauvais peut-être de signaler, pour cette circonstance et d'autres analogues, un défaut qui peut s'attacher aux figurations polaires, et qui dépend de leur expressivité même. Il serait extrêmement fâcheux que cela conduisit à y renoncer. Seulement, il est clair qu'on ne peut absolument pas s'en servir, comme on le fait des figures orthogonales dans certains cas, pour obtenir par des mesures de superficie la valeur numérique des degrés d'un phénomène.

La troisième classe, à laquelle nous allons passer, offre à notre étude un champ plus vaste.

VI.

*Représentations graphiques de la troisième classe. Cartes à courbes isoplèthes.
Surfaces compensatrices.*

Les cartes statistiques par courbes de niveau, dont l'intérêt nous a surtout provoqué à écrire ces notes, ne sont qu'un des groupes des représentations graphiques qui forment la troisième classe.

C'est en 1843 qu'à l'occasion de ses beaux travaux de géométrie anamorphique, dont l'utilité a été si grande, M. Léon Lalanne appliqua, pour la première fois, à une question météorologique le principe général de l'expression graphique d'une table à double entrée (1); et c'est plus tard, en 1845, qu'il fit connaître à l'Académie, sans l'appuyer d'un exemple, l'application possible de ce principe à des cartes statistiques de la population, application que nous crûmes imaginer nous-même près de trente ans plus tard.

Toutes les représentations possibles auxquelles conduit l'idée dont nous venons de parler rentrent dans le présent chapitre. Elles ne constituent en réalité que deux groupes principaux distincts. Pour l'un de ceux-ci, les deux coordonnées horizontales, empruntées à l'espace ou au temps, qui peuvent se segmenter en parties égales, constituent, pour la surface que détermine la troisième coordonnée, une base à contour régulier, régulièrement découpée elle-même. Pour l'autre groupe principal, les coordonnées sont empruntées à des circoncriptions géographiques.

Les constructions issues du premier groupe sont peu nombreuses. On pourrait, pour certains usages, constituer par leur moyen des abaques utiles, mais cela est en dehors de notre examen. Elles n'ont, à notre connaissance, joué jusqu'à présent aucun rôle en statistique (2). Nous les laissons de côté, pour ne traiter que du second groupe : celui des cartes statistiques proprement dites.

A ce propos, avant d'entrer dans le sujet, un point essentiel est à vider.

Dans la statistique graphique, on fait le plus fréquent usage de cartes simplement teintées dont quelques-unes rendent les plus grands services. Rentrent-elles dans la troisième classe? Par le procédé, nous ne le croyons pas; par le résultat, il nous semble que si. Nous allons nous expliquer.

Nous avons, dès le début, distingué le dessin de la couleur, et marqué à celle-ci un rôle utile mais essentiellement subordonné. Dans les cartes teintées cet élément accessoire joue un rôle principal. Nous sommes néanmoins d'avis d'admettre cet élément, à condition qu'il soit bien employé.

On a fait autrefois des cartes statistiques où, pour exprimer l'intensité variable du phénomène à représenter, on recourait soit à des couleurs différentes, auxquelles

(1) *Méthodes graphiques*, par M. Léon Lalanne, 1878.

(2) Nous avons toutefois mis sous les yeux de la réunion une carte par courbes de niveau du mouvement des marées au Havre, pendant le mois de septembre 1877, extraite de l'opuscule déjà cité de M. Léon Lalanne sur les *Méthodes graphiques*. Cette carte, avec l'aide de teintes plates graduées par zones de hauteurs successives, produit l'effet le plus frappant.

Nous avons également montré à la réunion comment on obtient la figuration d'un paraboloid hyperbolique ($z = xy$), à l'aide de courbes de niveau tracées sur une table de Pythagore, en supposant que les nombres inscrits au centre des carreaux représentent les hauteurs de verticales élevées en ces points.

on attribuait conventionnellement certaines valeurs déterminées, soit à des grisés, d'intensité identique ou analogue, obtenus par des combinaisons de hachures, parallèles ou croisées, et de points. C'était là une période d'initiation rudimentaire, dont il est à peine besoin de faire la critique. Aucune raison pour faire exprimer au rouge une valeur numérique supérieure au bleu, plutôt que de faire l'inverse, ou pour mettre le jaune au-dessus du vermillon, au lieu de le placer en dessous. C'étaient là des conventions incompréhensibles sans le secours incessant de la légende. Or, qu'est-ce qu'une langue qu'on ne peut lire sans avoir à chaque mot recours au glossaire ?

Si les cartes teintées en étaient restées à cette phase, elles n'auraient véritablement pas place ici. Elles ont beaucoup progressé depuis.

Aux teintes purement conventionnelles on a substitué des teintes nuancées d'intensité croissante, ou, quand on ne pouvait faire mieux, des grisés s'élevant graduellement du blanc au noir ; et la question a dès lors changé de face. D'après les images de la langue d'emploi le plus courant, dans les nuances croissantes ou décroissantes d'une même couleur l'esprit voit, comme d'intuition, quelque chose qui s'élève ou s'abaisse : une échelle de couleurs c'est comme une série d'éléments linéaires superposés ; la couleur employée d'une certaine manière devient une dimension. Par ce côté, les figurations à teintes graduées rentrent légitimement dans le graphique. Le tout est de faire de la couleur un bon usage.

Malheureusement, le moyen n'offre que peu de ressources. Une droite se segmente à l'infini. La couleur ne comporte qu'un petit nombre de divisions. L'œil le plus exercé ne peut guère saisir, dans une même couleur graduée, que six nuances distinctes ; le coloriste le plus habile, muni des couleurs les plus fines, n'en peut produire davantage. De là une grande pauvreté de moyens. On a toutefois fait, dans ces derniers temps, par l'emploi des teintes graduées, des cartes extrêmement remarquables et du plus haut intérêt, au nombre desquelles nous citerons la plupart de celles de ce genre que contient l'Album de statistique graphique du ministère du Commerce.

Nous ne voudrions pas trop nous étendre ici sur la question des cartes à teintes graduées qui n'est pour nous que secondaire. Nous croyons toutefois devoir en dire quelques mots de plus.

Du moment que les colorations graduées entrent dans le domaine de la géométrie, elles doivent en accepter les lois sévères. A des teintes graduées par degrés égaux, — c'est là le but cherché par celui qui les emploie, — doivent correspondre des ascensions numériquement égales ; il faut construire en conséquence les échelles ou diapasons de teintes. Les auteurs ne s'assujettissent pas toujours à cette règle, qui est, pour ainsi dire, de probité scientifique et de bonne foi. Voici trois teintes graduées contiguës. Ma vue et mon esprit s'élèvent avec elles d'un pas égal. Or les ascensions réelles correspondantes du phénomène sont 2, 1 et 3. Je suis induit en erreur ; la représentation est fausse.

Il n'est pas toujours facile, il est quelquefois même impossible, sans tomber dans des fractionnements numériques inadmissibles, de bien régler une échelle de teintes. Ce n'est pas une raison pour ne pas faire effort pour y parvenir. L'indigence du moyen employé est un obstacle et une excuse. Ces deux circonstances ont conduit les auteurs des cartes à teintes graduées, pour se procurer des échelles plus étendues, à recourir à deux couleurs au lieu d'une seule, en appliquant cha-

cune a deux phases inverses du phénomène à représenter. Il vaut ici la peine d'en dire un mot.

Pour tous les phénomènes qui impliquent, soit d'après la nature des choses, soit d'après des conventions universellement admises, une inversion de sens bien caractérisée, rien n'est plus légitime que l'emploi de deux couleurs. La perte et le gain, la recette et la dépense, le chaud et le froid, la profondeur au-dessous et la hauteur au-dessus du niveau de la mer sont dans ce cas. C'est le positif et le négatif mis en opposition; le plus et le moins de l'algèbre. Mais on a été plus loin. Dans un même phénomène continu, tel, par exemple, que l'intensité spécifique de la population, qui ne comporte pas de sens négatif, on a pris pour situation déterminative de l'inversion de sens la moyenne générale du phénomène. Cela est purement conventionnel, mais n'est pas arbitraire; et l'indigence du moyen justifie pleinement qu'on ait recours à cet expédient.

Ceci nous amène à un point de la question qui a soulevé des controverses, et dont nous ne voulons dire qu'un mot. En acceptant l'emploi de deux couleurs, quelques auteurs ont cru devoir, dans chacune des régions, faire marcher les nuances dans le même sens, au lieu de leur imprimer, comme le veut la logique, une marche inverse. Du moment que l'inversion du froid au chaud, par exemple, est admise, on compte les degrés de froid et de chaleur en sens inverse à partir du zéro conventionnel. De même, quand on intervertit volontairement le sens d'un phénomène à partir de sa valeur moyenne, c'est de cette valeur moyenne qu'on doit compter aussi bien en dessus qu'en dessous. D'un côté, vers le haut, sont les excédents; de l'autre, vers le bas, les insuffisances. Celles-ci croissent, en leur qualité d'insuffisances, non pas à mesure qu'elles se rapprochent, mais à mesure qu'elles s'éloignent de la moyenne. Ceci est élémentaire.

Quoi qu'il en soit, des cartes constituées comme il vient d'être dit, dans lesquelles une confusion naissait de la mise en contact de la nuance la plus forte de l'une des teintes avec la plus faible nuance de la seconde, ont fait croire à la nécessité d'une zone moyenne bien distincte; et, pour cette zone, quelques auteurs ont adopté, soit une teinte spéciale, soit d'autres dispositions plus compliquées.

En rentrant dans la vérité, l'existence d'une telle zone n'est pas indispensable. Si on la juge nécessaire, elle se trouve naturellement formée, — à la rencontre des deux couleurs qui s'en rapprochent en se dégradant, — par la zone blanche, leur limite commune, comprenant les valeurs les plus rapprochées de la moyenne. L'album déjà visé du ministère du Commerce montre quel heureux parti on peut tirer de cette disposition.

Quels qu'en soient le mérite, la valeur et l'utilité, ces figurations colorisées ne peuvent s'appliquer strictement qu'à des circonscriptions territoriales. Chaque nuance est obligée de se renfermer étroitement dans l'une d'elles. Rien de mieux, quand c'est à ces circonscriptions, au département par exemple, que l'étude se rapporte. Mais elles n'expriment qu'imparfaitement la répartition continue et graduelle d'un phénomène donné pour tout un territoire, indépendamment des circonscriptions qui le divisent. C'est à cette fonction que sont spécialement propres, au contraire, les cartes par courbes de niveau.

Cartes par courbes isoplèthes. — Chacun sait ce qu'est une courbe de niveau. Nous ne les définirons pas. M. Lalanne, envisageant d'un point de vue tout à fait

général les surfaces dont ces courbes servent à représenter les formes, les appelait courbes d'égal élément. Il a depuis emprunté à un écrivain allemand un mot qu'il a jugé bien fait, celui des courbes *isoplèthes* (1). Nous sommes du même avis, et nous en ferons usage comme synonyme de courbes de niveau.

Abordons la génération des cartes que nous voulons décrire.

Imaginons un phénomène quelconque observé sur divers points d'un territoire donné. Des nombres en représentent, pour chaque point, suivant les cas, l'intensité spécifique ou absolue. Prenons une carte du territoire où sont figurés les points d'observation, et, plaçant la carte horizontalement, élevons par chacun de ces points des verticales de hauteur proportionnelle aux nombres déduits de l'observation. Si ces verticales sont assez serrées, une enveloppe souple, suffisamment élastique et rétractile, s'appuyant sur leurs extrémités constituera une surface mamelonnée présentant des talus, des sommets et des creux, des vallées et des lignes de faite, analogues à ceux d'un relief topographique, et susceptibles, comme les mouvements de ce dernier, d'être représentés, sur la carte servant de base, au moyen de courbes de niveau. Plus les points d'observation seront multipliés, plus les ordonnées seront rapprochées et leurs sommets nombreux, mieux les accidents de détail, mieux les ondulations partielles se manifesteront sur la surface. Et l'analogie est ici complète avec ce que fait vis-à-vis du terrain le géographe qui, lui aussi, représente la plastique du sol dans sa continuité, quoiqu'il n'en ait relevé qu'un certain nombre de points, mais qui peut en exprimer d'autant mieux les détails et les reliefs minimes que les points relevés sont plus multipliés.

Imaginons que l'on connaisse, pour chaque commune de France, des faits naturels ou démographiques tels que les suivants : la moyenne température de l'année ; la moyenne hauteur pluviométrique annuelle ; la population spécifique ; le nombre spécifique annuel des naissances, des mariages, des morts entre tels et tels âges, les nombres correspondants permettront de construire, pour la France, des cartes thermométriques, pluviométriques, natalitaires, matrimonialitaires et mortalitaires de diverses catégories.

Pour qui connaît les procédés que le géographe emploie pour déduire, d'un certain nombre de points du sol d'altitude connue, les courbes de niveau dont la projection sur le plan de la carte en exprime les mouvements topographiques, rien n'est plus facile et plus simple que de concevoir la construction des cartes naturelles et démographiques que nous venons d'indiquer¹. Et quant aux dispositions complémentaires à prendre pour rendre chacune d'elles suffisamment expressive suivant son objet, cela constitue un autre problème important, quoique secondaire, que les géographes ont résolu et résolvent chaque jour à leur manière, et qui correspond, en statistique, à des exigences spéciales dont nous dirons quelques mots.

Il n'y a, pensons-nous, personne qui puisse repousser la conception que nous venons de présenter ; elle contient, en essence, la théorie des cartes statistiques par courbes de niveau tout entière.

Cependant des objections naissent ou subsistent. Nous allons chercher d'où elles viennent, et montrer comment la théorie y répond.

Le géographe, avons-nous dit, trace ses courbes de niveau d'après un certain

(1) *Ισος*, égal, et *πληθος*, valeur, quantité.

nombre de points connus du sol. Seulement, les points d'après lesquels il opère sont bien des points du sol lui-même, et, à moins d'une inintelligence absolue de son métier, ces points auront été choisis dans des situations caractéristiques déterminées. En outre, en cas de besoin, la vue du terrain lui permet de préciser certains détails que les points de passage des courbes ne suffisent pas à signaler.

Pour vos constructions idéales, objectera-t-on, vous n'êtes pas du tout dans les mêmes conditions. Lorsque les points connus sont très multipliés, comme dans l'hypothèse de données commune par commune, nous pouvons admettre la similitude. Mais, le plus souvent, les données fournies par la statistique sont des moyennes se rapportant à des circonscriptions territoriales plus étendues. Dans ce cas, d'après ce que vous avez dit vous-même, ce qui exprime exactement le fait naturel ou statistique enregistré ce n'est pas une portion de surface topographiquement mouvementée, mais un plan horizontal parallèle à la base de la carte ; de telle sorte que nous sommes conduits à concevoir, non la surface que vous nous dites, mais les sommets horizontaux, échelonnés à des hauteurs différentes, d'une série de prismes droits ayant pour bases les circonscriptions géographiques auxquelles les moyennes se rapportent. De plus, ces moyennes ne correspondent pas à des régions naturelles, mais bien à des circonscriptions administratives ; vous n'avez rien là qui ressemble aux points caractéristiques choisis par le géographe. Enfin la carte idéale à construire est un territoire inconnu qui ne peut vous servir à combler, *de visu*, les lacunes que peuvent présenter les points donnés. La construction de vos cartes est donc le plus souvent insuffisamment déterminée ; elle relève de la fantaisie ; peut nous conduire à l'erreur, et nous leur préférons nos cartes à teintes conventionnelles ou graduées par circonscriptions, suivant l'intensité que prend sur chacune le phénomène à représenter. A quoi quelques-uns de ceux qui ont pénétré plus avant dans le sujet, sans en admettre le caractère rationnel, ajoutent : on peut bien concevoir, nous le savons, qu'on transforme l'espèce de pavé des géants formé par la série des bases supérieures des prismes en une surface continue ; nous savons même qu'il suffira pour cela d'abattre les arêtes et les angles saillants de ce pavé raboteux, et d'en combler les angles rentrants. Mais qu'est-ce qui nous guidera dans cette opération ? En sommes-nous plus avancés ?

Ce sont bien là, pensons-nous, les objections faites dans toute leur force. C'est à la dernière que nous allons répondre. Sa solution donne la clef de tout le reste.

Sans doute, on ne connaît, numériquement, qu'une chose, la valeur des moyennes par circonscriptions, et, graphiquement, que la situation des bases supérieures horizontales des prismes droits qui y correspondent. Mais, le volume de ces prismes se trouve ainsi déterminé, et, d'après la façon dont les moyennes sont obtenues, on sait que le volume de chaque prisme est absolument égal à celui du faisceau d'éléments constitutifs correspondants. Or les éléments constitutifs dont nous venons de parler, inégaux au début et ramenés à l'égalité dans la moyenne, avaient auparavant leurs sommets sur la surface cherchée. Cette surface jouit donc de cette propriété essentielle et fondamentale qu'entre elle et la base supérieure de chaque prisme droit, il doit y avoir autant de volume en moins que de volume en plus. La surface cherchée, en un mot, est par rapport à chacun des prismes une *surface compensatrice*, pleinement analogue avec trois dimensions à ce que nous avons dit précédemment, pour deux dimensions, des courbes compensatrices.

Le problème graphique à résoudre pour substituer au pavé inégal formé par le sommet des prismes droits une surface continue, ne présentant ni jarrets ni brisures, n'ayant pas d'inflexions inutiles, dont les courbures se succèdent le moins brusquement possible, est donc, théoriquement, très déterminé. On peut le juger difficile à résoudre ; être impuissant à trouver la solution ; on ne peut déclarer que celle-ci n'est pas étroitement conditionnée. Sans doute, ainsi que nous l'avons dit pour les courbes, il n'y a pas qu'une surface qui donne la solution cherchée ; mais parmi la myriade de celles qu'on peut imaginer, il y en a une qui satisfait mieux que toutes les autres au problème, sous des conditions qui n'ont rien de vague et dont il est toujours possible de vérifier la bonne application.

Ce serait ici le lieu, si nous traitions à fond le sujet, d'expliquer en détail la marche à suivre pour déterminer par le dessin ces surfaces compensatrices qui jouent dans la question le rôle capital. Nous devons nous borner à quelques mots rapides (1).

Avec un peu d'habitude, lorsqu'on a, dans les diverses circoncriptions de la carte plane où elles sont dessinées, inscrit les nombres respectifs qui expriment les moyennes du phénomène représenté, on se fait assez facilement une idée approchée des mouvements principaux de la carte à reliefs. Alors, comme la gamme des courbes à employer est imposée par la nature du phénomène ; que ces courbes doivent être plus ou moins rapprochées suivant l'amplitude des écarts qui séparent les moyennes, on peut, presque toujours, immédiatement, tracer avec une certaine approximation quelques-unes d'entre elles, ce qui donne une première ébauche. C'est sur cette ébauche que le travail est repris, et qu'avec de nombreux profils longitudinaux et transversaux, suivant des directions entre-croisées bien choisies, on arrive, au moyen de courbes compensatrices substituées aux contours à redans produits par la rencontre des limites des circoncriptions et des sommets horizontaux des prismes, à déterminer, par rapport à ces limites, les points de passage de celles des courbes de niveau qui se projettent dans l'étendue de chacune.

Quelques observations élémentaires facilitent ce travail.

Talus concaves ou convexes, lignes de faite ou de thalweg, promontoires ou fonds de vallées, sommets ou ombilics, telles sont les diverses formes caractéristiques que peuvent affecter les reliefs à saisir. Pour les talus, de quelque côté que leur concavité soit tournée et qu'ils soient sur plan droit ou courbe, pourvu que la courbure ne soit pas excessive, un seul profil, normal à leur direction, suffit en général pour déterminer les affleurements ou points de passage cherchés. Il en est à peu près de même aux environs des lignes de faite ou de thalweg, lorsque les formes de ces deux espèces ont une certaine continuité et ne sont pas de simples accidents. Mais, pour les quatre autres formes, surtout pour les deux dernières, des profils dans deux directions orthogonales, avec recoupements, quelquefois, suivant des directions diagonales, deviennent indispensables ; et encore faut-il faire subir aux résultats obtenus dans chaque direction par les courbes compensatrices, des corrections dont aucune théorie géométrique ne peut rigoureusement préciser la mesure.

Il y a là l'intervention obligée d'une sorte d'art spécial, qui n'est pas cependant

(1) Dans une brochure : *Cartes statistiques à relief*, publiée en 1878, nous avons donné quelques indications pratiques propres à guider les personnes qui voudraient mettre en œuvre ce procédé.

assez personnel pour ne pas pouvoir s'enseigner, et qui trouve d'ailleurs des guides précieux dans les formules théoriques qui donnent les volumes tant des solides à faces planes et des trois corps ronds de la géométrie élémentaire, que des solides de révolution en général.

Après ces courtes explications, faut-il conclure de ce que nous avons précédemment établi qu'il soit indifférent de dresser une carte statistique par courbes de niveau, d'après des moyennes correspondant à des circonscriptions plus ou moins étendues, comprenant un nombre plus ou moins grand d'éléments primaires ? Il n'est pas besoin d'avertir que ce serait là une grande erreur. Plus le champ d'une moyenne s'étend, plus s'absorbent en elle et disparaissent les inégalités des éléments constitutifs. Il en est de même des surfaces compensatrices. Une telle surface obtenue, par exemple avec des moyennes par commune, pourra présenter de nombreuses aspérités et cavités, des rides en saillie et en creux, des mamelonnements enfin qui, dans une surface déduite des moyennes par canton, disparaîtront pour ne laisser subsister que les ondulations de second ordre. Celles-ci s'effaceront elles-mêmes ou s'atténueront beaucoup dans une surface provenant de moyennes par arrondissement, et des moyennes par département, enfin, ne fourniront plus que des surfaces à larges ondulations reproduisant seulement les mouvements généraux du phénomène représenté.

De ces diverses cartes, quelle est la meilleure ? La réponse dépend à la fois de l'objet qu'on a en vue et de la nature du phénomène représenté. Les premières entrent plus intimement dans l'expression analytique du sujet ; les dernières en peignent mieux, synthétiquement, les masses principales, en manifestent plus clairement les lois générales. La multiplicité des détails des premières nuit-elle à l'effet d'ensemble, et est-ce celui-ci qu'on recherche ? Il faut les rejeter et adopter les dernières. La nature du phénomène, au contraire, laisse-t-elle, nonobstant l'abondance des détails, subsister l'effet d'ensemble, ou tient-on moins à celui-ci qu'à une figuration très circonstanciée ? Il faut, si la chose est possible, recourir aux premières. Le tout subordonné d'ailleurs aux données dont on dispose, puis au temps qu'on peut consacrer à l'élaboration, enfin à l'échelle même de la carte qui doit contenir les résultats.

Nous ne voudrions pas clore ces observations sans une remarque pratique importante. Il peut sembler à ceux qui n'ont pas mis en œuvre le procédé dont nous expliquons l'emploi que, nonobstant la condition impérative de compensation, des courbes de niveau tracées d'après un petit nombre de données doivent rester molles et indécises. C'est là, en effet, un inconvénient à redouter. Toutefois, les courbes successives se commandent étroitement l'une l'autre, et, lorsque les plans qui les contiennent sont convenablement rapprochés, le tracé de chacune est contrôlé, par suite rectifié, s'il est nécessaire, par celui des courbes les plus voisines. Cela est vrai en topographie comme dans le système dont nous parlons.

Les points qui précèdent établis, que reste-t-il des objections présentées ? Sans doute les données fournies par la statistique ne correspondent pas, en général, pour le phénomène représenté, à des régions naturelles, mais les cartes par courbes isoplèthes ont justement pour effet — c'est là même leur grand avantage, — de reconstituer ces régions naturelles, et d'en indiquer, pour chaque cas, les limites plus ou moins approximatives, suivant la plus ou moins grande multiplicité des données dont on dispose. Sans doute aussi ces données, dans leur relation avec

la surface à construire, ne correspondent pas à des points caractéristiques de cette surface, et l'ignorance où l'on est des formes de celle-ci, tant qu'elle n'est pas déterminée, prive des indications complémentaires que trouve le géographe dans la vue du terrain. Mais la condition rectrice des compensations, dont le géographe ne dispose pas, rétablit largement l'équilibre sous les deux aspects envisagés ; et ces points ou lignes caractéristiques que les données ne contiennent pas se dégagent très nettement de courbes de niveau logiquement tracées. C'est ainsi, par exemple, qu'une carte statistique de la population par arrondissements, dont les principaux sommets correspondent naturellement aux grandes villes du territoire, présentera dans le nord et le long des côtes maritimes, de grandes élévations, fera courir des lignes de faite le long des grandes artères fluviales, creusera au contraire des thalwegs profonds suivant les lignes de faite topographiques, et indiquera nettement, au dessinateur qui en ignorerait la position, l'emplacement des régions à peine peuplées de la Brenne et de la Sologne, choses qui la plupart ne sont pas contenues ou ne le sont que confusément dans les données numériques mises en usage.

Une objection subsiste toutefois. Elle semble puérile. Ne la négligeons pas cependant. Oui, nous dit-on, nous admettons bien que vos courbes situées à divers niveaux passent bien par les zones où, moyennement, le phénomène représenté atteint la proportion qu'elles indiquent. Cependant, s'il s'agit de population, par exemple, nous voyons une courbe correspondant à une population de 100 habitants au kilomètre carré passer justement sur l'emplacement d'une ville où la population s'élève au décuple. Vos courbes n'indiquent donc pas exactement la population spécifique de *tous les points* du sol où elles se projettent. Cette objection, remarquons-le, vient de personnes qui préconisent les indications statistiques par colorations différentes ou teintes graduées. Admettons qu'il s'agisse de population comme dans l'exemple choisi. Combien il est facile de leur répondre ! Vous teintez un département tout entier d'une nuance correspondant à une moyenne de 100 habitants à l'hectare. Or ce département contient des communes dont la population est notablement inférieure, et des villes dont la population spécifique atteint le centuple de votre chiffre. Vous confondez donc, dans votre moyenne superficielle, les choses les plus inégales. Pourquoi me refuseriez-vous une latitude analogue, dans des limites beaucoup plus restreintes, pour des moyennes linéaires qui ont, par ailleurs, sur vos teintes, d'énormes avantages de localisation et de précision ?

Nous supposons le procès vidé.

Restent les moyens de donner aux cartes à relief par courbes de niveau l'expressivité voulue.

Les géographes, dans ce but, se servent de hachures, normales à la fois aux deux courbes entre lesquelles elles sont comprises, et d'autant plus larges et plus serrées qu'elles sont plus courtes, ou, en d'autres termes, que la pente du terrain est plus forte. En ajoutant à ce point de départ conventionnel, l'hypothèse d'une lumière éclairant obliquement le terrain, la topographie atteint un degré d'expressivité dont les admirables cartes de la Suisse du général Dufour sont, à notre connaissance, le plus bel exemple. Toutefois, pour la précision, un renseignement complémentaire est indispensable, c'est l'altitude de certains points déterminés. Un trop grand nombre de ces indications encombrerait et déparerait la carte ; quelques-unes en revanche sont indispensables.

Ce que la topographie statistique aurait de mieux à faire, pour l'expressivité de ses cartes, ce serait de suivre pas à pas la topographie géométrique. Mais le plus souvent le travail nécessaire excéderait par son importance le résultat à obtenir. La précision même peut gagner à employer d'autres moyens.

Ces moyens, nous les trouvons dans l'emploi des teintes nuancées.

Tout ce que nous avons dit plus haut à ce sujet s'applique ici. Les règles à suivre pour les inversions de teintes du positif au négatif, les précautions à prendre, pour la constitution des échelles ou diapasons de celles-ci, restent les mêmes que dans le cas des cartes coloriées par circonscriptions ; avec la différence, pour ce dernier objet, que l'administration des nuances est à la fois, ici, plus facile et plus expressive. C'est à des bandes continues que chaque teinte se rapporte ; les courbes de niveau l'encadrent, et si l'on a soin de ne tracer ces courbes à l'encre qu'après coup, on peut obtenir l'effet voulu par grandes teintes se superposant successivement.

En un mot, sans insister davantage, nous pensons que, pour certains usages, la statistique graphique a, dans les cartes à relief, par courbes de niveau ou courbes isoplèthes, un instrument précieux pour qui sait le manier.

Applications du procédé. — Depuis 1872 que nous en avons fait la première application, depuis 1878, où nous en avons exposé quelques spécimens, les cartes par courbes de niveau n'ont pas, à notre connaissance, été souvent employées, et quelquefois, elles l'ont été assez mal (1). Nous savons un cas dans lequel, sans s'inquiéter aucunement de la loi de compensation des volumes, l'auteur de la carte a simplement réglé le tracé de ses courbes de niveau d'après la cote moyenne située au centre de chaque circonscription. Or cette circonstance ne se vérifie que pour les circonscriptions auxquelles correspond un talus plan, et donne lieu, dans tous les autres, à des écarts plus ou moins marqués, lesquels deviennent excessifs lorsqu'on approche d'un creux ou d'un sommet.

Les spécimens exposés en 1878 pourraient nous fournir le sujet de quelques indications utiles. Nous n'en relèverons qu'une seule.

Le système se prête excellemment à la construction d'une catégorie de cartes, dont M. Turquan a fait après nous une application, et que nous dénommons *cartes différentielles*. Ces cartes expriment, non plus l'intensité d'un phénomène par circonscriptions, mais les différences de cette intensité sur les divers points, dans une période donnée.

C'est le mouvement de la population sur le territoire qui nous a servi de premier argument de recherche. L'étude des mouvements des fonds de l'estuaire de la Seine, nous en a fourni un second. On en peut trouver bien d'autres. Il y a certainement là une ressource intéressante pour le statisticien.

(1) Mentionnons tout de suite une exception remarquable, celle de l'honorable M. Turquan, qui a, au contraire, tire du procédé le parti le plus heureux dans ses belles cartes de la répartition de la population française et dans beaucoup d'autres.

VII.

Résumé. — En résumé, nous pensons que la statistique graphique, qui, lorsque les bases de la statistique elle-même seront solidement assises, aura intérêt à perfectionner ses méthodes, et fera peut-être alors appel à ce que les constructions graphiques ont de plus savant, a atteint aujourd'hui un point assez élevé de la route pour qu'elle se préoccupe plus de bien produire que de beaucoup produire.

La clarté et l'expressivité nous paraissent toujours, pour elle, des conditions dominantes. Mais il faut de moins en moins céder sur l'exactitude et la rigueur logique. Cette dernière s'impose même dans l'emploi des couleurs et la disposition des pointillés.

Nous avons hasardé une classification. Elle nous a rendu quelques services, au moins pour le présent exposé. Elle est livrée à la discussion. Il n'y a dans ces matières rien qui relève de l'absolu scientifique.

Nous avons enfin appelé l'attention sur un procédé fort négligé qui, bien employé, peut avoir son utilité.

Notre tâche était modeste. Nous regrettons de ne pas l'avoir mieux remplie.

L.-L. VAUTHIER.