Journées Équations aux dérivées partielles

Sandrine Dozias

Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique

Journées Équations aux dérivées partielles (1994), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1994____A5_0>

Opérateurs h-pseudodifférentiels à flot périodique

Sandrine DOZIAS[1]

Résumé. On étudie la répartition des valeurs propres d'un opérateur h-pseudodifférentiel dans un petit voisinage d'une énergie pour laquelle le flot hamiltonien associé au symbole principal de l'opérateur est périodique.

1 Introduction.

On étudie les valeurs propres d'un opérateur h-pseudodifférentiel $P(h)$ dans un voisinage de taille $\mathcal{O}(h)$ autour d'un réel E, sachant que le flot hamiltonien associé au symbole principal de $P(h)$ est périodique sur la surface d'énergie E.
On montre qu'elles se répartissent dans des intervalles de taille $\mathcal{O}(h^2)$ centrés en une suite de points que l'on explicitera en fonction de h et des caractéristiques classiques des trajectoires périodiques sur la surface d'énergie E: leur période T, leur action S et leur indice de Maslov μ. On obtient aussi un développement asymptotique du nombre de valeurs propres dans chacun de ces petits intervalles.
On améliore les résultats de J.Chazarain [3] ou de B.Helffer et D.Robert [6] [7] qui supposaient le flot hamiltonien complètement périodique ou périodique dans une bande d'énergie. (Cf. aussi les travaux de V.Ivrii [8].) Par ailleurs R.Brummelhuis et A.Uribe dans [2] ne font plus l'hypothèse de périodicité du flot que sur une surface d'énergie, mais pour des raisons techniques ($1/h$ est vu comme valeur propre de $A = i^{-1}\partial_\theta$ sur S^1), ils quantifient h. (Cette addition de variable apparait dans le même contexte chez Y.Colin de Verdière dans [4] et [5].) On généralise ce dernier résultat à des opérateurs h-pseudodifférentiels plus généraux que l'opérateur de Schrödinger en revenant à des techniques semiclassiques i.e. sans passer par l'addition de variables et sans avoir à quantifier h.

[1]DMI Ecole Normale Supérieure (Paris) et institut Galilée université Paris XIII (Villetaneuse)

2 Enoncé des résultats.

Soit $P(h)$ un opérateur h-pseudodifférentiel associé à un symbole h-régulier de poids (m, ϕ, Φ). On note $\sum p_j h^j$ son symbole formel. Soit E un réel.

On fait les hypothèses suivantes.

(H1) $p(h)$ est réel pour tout $h \in]0, h_0]$.

(H2) $\min_{(x,\xi)\in \mathbb{R}^{2n}} p_0(x, \xi) = \gamma_0 > -\infty$.

(H3) Pour $\gamma_1 < \gamma_0$, $(p_0 - \gamma_1)$ est une échelle tempérée et

$$p_i \in \Sigma((p_0 - \gamma_1)(\phi\Phi)^{-i}, \phi, \Phi).$$

(H4) E est une valeur non critique de p_0.

(H5) Il existe $\rho > 0$ tel que $p_0^{-1}([E - \rho, E + \rho])$ soit compact.

(H6) Le flot hamiltonien associé à p_0, $\phi^t_{p_0}$, est périodique, de période T, sur la surface d'énergie

$$W_E = \{(x, \xi) | p_0(x, \xi) = E\}.$$

(H7) La surface d'énergie W_E est connexe.

(H8) Le symbole sous-principal p_1^w de $P(h)$ est nul.

(H9) Pour tout $t \in]0, T[$, $\phi^t_{p_0}$ n'a pas de point fixe sur W_E.

On peut remplacer **(H8)** par l'hypothèse plus faible

(H8') $\int_0^T p_1^w(\phi^u_{p_0}(y, \eta))du$ est indépendant de (y, η) dans W_E.

Si on note P_1 cette constante, il suffit de remplacer dans tout ce qui suit $\frac{\pi}{2}\mu$ par $\frac{\pi}{2}\mu - P_1$.

On note S l'action d'une trajectoire périodique

$$S = \int_0^T L(\phi^u_{p_0}(y, \eta))du = \int_\gamma \xi dx - TE. \tag{1}$$

$(L(x,\xi) = (\xi.\partial_\xi p_0 - p_0)(x,\xi)$, $(y,\eta) \in W_E$ et γ représente la trajectoire de période T qui passe par (y,η).) S est indépendante de la trajectoire.
On note μ l'indice de Maslov commun aux trajectoires de période T de W_E.

L'hypothèse (H5) assure que le spectre de $P(h)$ est discret au voisinage de E.

$$\Sigma(P) \cap [E - \frac{\rho}{2}, E + \frac{\rho}{2}] \subset \Sigma_{dis}(P).$$

On a alors les théorèmes suivants.

Théorème 1
Sous les hypothèses (H1) à (H8), pour tout a dans $\mathbb{R}^{*+}$ il existe $h_1 \leq h_0$ et C dans $\mathbb{R}^{*+}$ tels que

$$\Sigma(P(h)) \cap [E - ah, E + ah] \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k(h) \qquad \forall h \in]0, h_1] \tag{2}$$

où on a noté

$$I_k(h) = [-\frac{S}{T} - \frac{\pi}{2T}\mu h + \frac{2\pi k}{T}h - Ch^2, -\frac{S}{T} - \frac{\pi}{2T}\mu h + \frac{2\pi k}{T}h + Ch^2]. \tag{3}$$

Une étude détaillée de la dépendance de C en fonction de a permet de généraliser ce théorème. On prend dans le théorème suivant $a = bh^{-\epsilon}$ avec $\epsilon < 1/2$.

Théorème 2
Sous les hypothèses (H1) à (H8), pour tout b dans $\mathbb{R}^{*+}$, pour tout ϵ tel que $0 \leq \epsilon < 1/2$, il existe $h_1 \leq h_0$ et C dans $\mathbb{R}^{*+}$ vérifiant

$$\Sigma(P) \cap [E - bh^{1-\epsilon}, E + bh^{1-\epsilon}] \subset \bigcup_k I_k^\epsilon(h) \tag{4}$$

avec

$$I_k^\epsilon(h) = [-\frac{S}{T} - \frac{\pi}{2T}\mu h + \frac{2\pi k}{T}h - Ch^{2-2\epsilon}, -\frac{S}{T} - \frac{\pi}{2T}\mu h + \frac{2\pi k}{T}h + Ch^{2-2\epsilon}]. \tag{5}$$

Soit $a \in I\!R^{*+}$. On reprend les notations du théorème 1. On s'intéresse maintenant au nombre de valeurs propres dans chacun des intervalles $I_k(h)$. On note

$$T_k(h) = \sharp(I_k(h) \cap [E - ah, E + ah]).$$

Pour k dans $Z\!\!Z$ et h dans $]0, h_1]$ on définit $\beta(k,h)$ par :

$$-\frac{S}{T} - \frac{\pi}{2T}\mu h + \frac{2\pi k}{T}h = E + \beta(k,h)h. \tag{6}$$

On note

$$M_a = \{(k,h) \in Z\!\!Z \times]0,h_1] | I_k(h) \subset [E - ah, E + ah]\}. \tag{7}$$

Théorème 3
Supposons les hypothèses (H1) à (H9) vérifiées. Soit a dans $I\!R^{*+}$. Alors il existe $h_2 \leq h_1 \leq h_0$ tel que pour tout (k,h) de M_a, $h \leq h_2$, on ait le développement suivant

$$T_k(h) = \frac{h^{1-n}}{(2\pi)^{n-1}T}\int_{W_E}\frac{dxd\xi}{|\nabla p_0|} + \sum_{j=1}^{N_0-1}\alpha_j(\beta(k,h))h^{1-n+j} + R_{N_0,k}(h) \quad \forall N_0 \in I\!N^*, \tag{8}$$

où $\alpha_j(X)$ est un polynôme de degré au plus j et
$|R_{N_0,k}(h)| \leq C_{N_0}h^{1-n+N_0}$, C_{N_0} étant indépendante de h et de k.

Le résultat de R.Brummelhuis et A.Uribe de [2] correspond simplement à la famille $h = (S + TE)/(2\pi k)$.

3 Schémas des démonstrations.

3.1 Répartition du spectre.

L'idée est de localiser près de E. Mais comme on l'imagine et comme on peut le voir sur des exemples, la periodicité du flot sur la surface d'énergie E n'aura une influence que sur un intervalle dont la taille tend vers 0 avec h. Ainsi la localisation en énergie par composition par $\theta(P)$ où θ est à support compact ne suffit plus, contrairement au cas où le flot est périodique dans une bande d'énergie. On introduit donc un opérateur de la forme $\chi((P-E)/h)$ pour localiser sur un intervalle de taille $\mathcal{O}(h)$ autour de E. Cet opérateur est défini par

$$\chi(\frac{P-E}{h})\theta(P) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-i\frac{tP}{h}}\theta(P)e^{i\frac{tE}{h}}\hat{\chi}(-t)dt. \tag{9}$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme 4

Soit $\chi \in \mathcal{S}(I\!R)$, $\hat{\chi} \in C_0^\infty(I\!R)$. *Soit* $\theta \in C_0^\infty(I\!R)$, $\mathrm{Supp}(\theta) \subset [E-\frac{\rho}{2}, E+\frac{\rho}{2}]$, $\theta \equiv 1$ *sur un voisinage de* E. *Alors*

$$||\chi(\frac{P-E}{h})\theta(P) - \chi(\frac{P-E}{h})e^{-\frac{i}{h}(TP+S+\frac{\pi}{2}\mu h)}\theta(P)||_{\mathcal{L}(L^2)} \leq Mh. \tag{10}$$

Admettons pour un moment ce lemme. Soit a dans $I\!R^{*+}$ fixé. On prend un χ particulier ($\chi \geq \delta > 0$ sur $[-a,a]$) et on applique l'opérateur du membre de gauche de l'inégalité (10) à un vecteur propre de norme 1 de $P(h)$ associé à une valeur propre $\lambda(h)$ dans $[E-ah, E+ah]$. On en déduit alors facilement qu'il existe k tel que $\lambda(h)$ soit dans $I_k(h)$, pour h suffisamment petit, ce qui prouve le théorème 1.

Il reste donc à prouver le lemme 4. On commence par approcher les deux opérateurs du membre de gauche de l'inégalité (10) par des opérateurs Fourier intégraux (OFI) qui leur sont proches à $\mathcal{O}(h^\infty)$ près en norme $\mathcal{L}(L^2)$ (on utilise pour cela l'approximation de l'opérateur d'évolution construite par la méthode BKW). On montre alors, en utilisant les propriétés de composition des lagrangiennes et des symboles principaux (cf [9]), que ces deux OFI ont la même lagrangienne et le même symbole principal (en effet, l'intégration en t dans (9) localise sur W_E où le flot est périodique). D'après le lemme d'Hörmander-Morse (cf [9]), on peut les écrire localement avec la même phase. L'égalité des symboles principaux assure que le coefficient d'ordre 0 du développement en h de l'amplitude de leur différence s'annule au point critique, on peut donc l'écrire comme une combinaison linéaire des dérivées de la phase. Une intégration par partie permet alors de gagner h. On écrit ensuite cette différence comme une intégration en t d'OFI dépendant du paramètre t (on rappelle que t varie dans un compact). On peut alors appliquer le théorème de continuité de Asada-Fujiwara (cf [1]) à cette famille d'OFI à un paramètre. Ceci achève la preuve du lemme 4.

Pour le théorème 2, on reprend le résultat précédent pour $[E - bh, E + bh]$ en contrôlant la constante C (intervenant dans la définition des $I_k(h)$) par rapport à b et en étudiant le domaine $\mathcal{D} = \{(b,h)\}$ sur lequel la répartition est connue, de manière à pouvoir remplacer b par $\tilde{b}h^{-\epsilon}$. La dépendance en b se fait par l'intermédiaire du choix du χ que l'on utilise dans le lemme 4. On utilise le lemme suivant.

Lemme 5
Soit δ dans $\mathbb{R}^{*+}$. Pour tout b dans $\mathbb{R}^{*+}$, il existe χ_b vérifiant les assertions suivantes.
1. $\chi_b \geq \delta$ *sur* $[-b, b]$.
2. $\hat{\chi}_b \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *et* $\mathrm{Supp}\hat{\chi}_b \subset [-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}]$.

(En fait on peut construire de tels χ_b sous la forme $\chi_b(x) = (1/b)\chi(x/b)$ où χ est fixé et vérifie le lemme 5 avec $b = 1$. On remarque alors que $\hat{\chi}_b(\xi) = \hat{\chi}(b\xi)$.)

On reprend donc la démonstration du lemme 4, en suivant la dépendance en b dans les normes de continuité obtenues. La première étape, où on approche les opérateurs par des OFI, reste inchangée. Il en est de même pour la seconde, où on compare les lagrangiennes et les symboles principaux des opérateurs. Par contre, la dépendance en b intervient dans la troisième étape, où on écrit localement les deux opérateurs avec la même phase. Une fois choisie la phase du premier opérateur, on écrit le second avec la même phase par une réduction du nombre de variables d'intégration puis par un difféomorphisme. Ce dernier est indépendant de b, par contre la réduction du nombre de variables se fait par l'utilisation du théorème de la phase stationnaire qui fait apparaitre un b^2 pour chaque h dans les majorations des coefficients du développement en puissances de h de l'amplitude. (On a en effet $|\hat{\chi}_b^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_\alpha b^\alpha$.) De même, l'annulation de l'amplitude de la différence aux points critiques et l'intégration par parties permettent de gagner hb^2. Pour ce qui concerne la dernière étape, l'utilisation du théorème de Asada-Fujiwara n'est pas optimale, car la norme de continuité qui intervient dans ce théorème dépend d'un nombre fini de semi-normes dans l'espace des fonctions à dérivées toutes bornées $\mathcal{B}$ de l'amplitude, ce qui peut faire sortir trop de nouvelles puissances de b. On utilise donc un autre théorème de continuité, en s'appuyant sur la phase particulière de l'opérateur Fourier intégral. En effet, pour b suffisamment grand, le support en t est inclus dans $[-T_1, T_1]$, intervalle sur lequel on connait la phase de l'approximation de l'opérateur d'évolution : $S(t, x, \theta) - y.\theta$ où S est la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Si on note R l'opérateur dont on veut calculer la norme $\mathcal{L}(L^2)$ et dont la phase est la précédente, on calcule en fait la norme de continuité de RR^*. En effet, on peut montrer que RR^* s'écrit comme un opérateur h-pseudodifférentiel plus un reste que l'on contrôle bien, s'il existe $\gamma > 0$ tel que $hb^2 \leq h^\gamma$ (cette relation intervient dans la définition de $\mathcal{D}$ et c'est de là que vient la restriction $\epsilon < 1/2$). On applique alors le théorème de continuité de Caldéron-Vaillancourt à la partie pseudodifférentielle, ce qui donne à nouveau un développement en h avec une majoration des coefficients par b^2 à la même puissance que h. Ceci achève l'esquisse de la preuve du théorème 2.

3.2 Multiplicité.

Pour obtenir un développement en puissances de h du nombre de valeurs propres dans un petit intervalle $I_k(h)$ tel que $I_k(h) \subset [E - ah, E + ah]$, la première idée est de construire un projecteur sur $I_k(h)$ sous la forme $\varphi((P-E)/h)$ avec φ à support compact et de calculer sa trace. Mais le calcul fonctionnel demande que $\hat{\varphi}$ soit à support compact. On préfère donc chercher un projecteur approché. On prend φ à décroissance rapide ($\hat{\varphi}$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$) et s'annulant à un ordre suffisamment grand en $\beta(l,h) = \beta(k,h) + (2\pi(l-k))/T$ ($l \neq k$) pour rendre négligeable la contribution des autres intervalles où il y a du spectre. Pour cela on utilise le lemme suivant.

Lemme 6
Pour tout N dans $\mathbb{N}$ il existe φ_N dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{\varphi}_N$ soit dans C_0^∞ et vérifiant

$$\begin{aligned} \varphi_N(x) &= 1 + \mathcal{O}(|x|^N) \text{ quand } x \text{ tend vers } 0 \\ \varphi_N(x) &= \mathcal{O}(|x - \frac{2\pi l}{T}|^N) \text{ quand } x \text{ tend vers } \frac{2\pi l}{T} \text{ pour } l \neq 0. \end{aligned}$$

On pose $\beta = \beta(k,h)$ et on définit $\varphi_{N,\beta}(x) = \varphi_{N+2}(x - \beta)$. Le projecteur approché est alors $\varphi_{N,\beta}((P-E)/h)$. (On généralise une idée de R.Brummelhuis et A.Uribe qui utilisent, dans un cadre différent, φ_1 pour construire un projecteur approché à $\mathcal{O}(h)$ près sur l'intervalle qu'ils étudient. L'extension à l'ordre N permet de gagner en flexibilité.)
On calcule ensuite la trace de ce projecteur approché $\varphi_{N,\beta}((P-E)/h)$. Avec le théorème 1 et le lemme 6 on contrôle bien la contribution dans cette trace

des valeurs propres situées dans $[E-ah, E+ah]$: elle vaut $T_k(h)$ modulo $\mathcal{O}(h^{1-n+N})$. Pour ce qui concerne les valeurs propres en dehors de l'intervalle, la décroissance rapide de $\varphi_{N,\beta}$ assure que

$$|\varphi_{N,\beta}(\frac{\lambda - E}{h})| \leq c_m h^{\epsilon m}$$

pour les valeurs propres à une distance supérieure à $ah^{1-\epsilon}$ de E. Pour celles situées entre ah et $ah^{1-\epsilon}$, le théorème 2 montre qu'elles sont dans des intervalles du type

$$[E+\beta h+\frac{2\pi l}{T}h - Ch^{2-2\epsilon}, E+\beta h+\frac{2\pi l}{T}h + Ch^{2-2\epsilon}].$$

Donc

$$|\varphi_{N,\beta}(\frac{\lambda - E}{h})| \leq C_N h^{(N+2)(1-2\epsilon)} \qquad \forall N.$$

On ajuste alors ϵ puis m pour avoir les bonnes majorations en $\mathcal{O}(h^{1-n+N})$ de la contribution de ces valeurs propres dans la trace.
Par ailleurs, on obtient un développement de $\mathrm{Tr}(\theta(P)\varphi_{N,\beta}(\frac{P-E}{h}))$ en l'écrivant

$$\frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}\int \theta(P)e^{-i\frac{tP}{h}}e^{i\frac{tE}{h}}\hat{\varphi}_{N,\beta}(-t)dt \tag{11}$$

et en remplaçant $U_{\theta,h}(t) = \theta(P)e^{-i\frac{tP}{h}}$ par son approximation $\tilde{U}_{\theta,h}(t)$ construite par la méthode BKW. On applique alors le théorème de la phase stationnaire généralisé. On obtient ainsi le théorème 3.

Références

[1] K.Asada, D.Fujiwara. *On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$.*
Japan J. Math. 1978 (4) p299-361.

[2] R.Brummelhuis, A.Uribe. *A semi-classical trace formula for Schrödinger operators.*
Comm. Math. Phys. 1991 (136) p567-584.

[3] J.Chazarain. *Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique.*
Comm. in P.D.E. 1980 (5) p595-644.

[4] Y.Colin de Verdière. *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. I- Le cas non intégrable.*
Duke Math. J. 1979 (46) p169-182.

[5] Y.Colin de Verdière. *Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. II- Le cas intégrable.*
Math. Zeitschrift. 1980 (73) p51-73.

[6] B.Helffer, D.Robert. *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et applications.*
J. of functional analysis 1983 (53) p246-268.

[7] B.Helffer, D.Robert. *Puits de potentiel généralisés et asymptotique semi-classique.*
Ann. Inst. Henri Poincaré 1984 (41) p291-331.

[8] V.Ivrii. *Semiclassical microlocal analysis and precise spectral asymptotics.*
Centre de math. Ecole polytechnique. Preprint 2 p76-97.

[9] E.Meinrenken. *Semiclassical principal symbols and Gutzwiller's trace formula.*
Reports on Math. Phys. 1992 (31) p279-295.

[10] V.Petkov, G.Popov *On the Lebesgue measure of the periodic points of a contact manifold.*
To appear in Math.Zeitschrift.