Journées Équations aux dérivées partielles

Johannes Sjöstrand

Réflexion des singularités analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A13_0>

REFLEXION DES SINGULARITES ANALYTIQUES

par J. SJÖSTRAND

Il s'agit essentiellement du problème de Dirichlet dans un cylindre $\Omega \times \mathbf{R}$ où $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ est un ouvert à frontière analytique :

$$(1) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x\right)u \in \mathcal{A}(\bar{\Omega} \times \mathbf{R}) \\ u|_{\partial\Omega \times \mathbf{R}} \in \mathcal{A}(\partial\Omega \times \mathbf{R}) \end{cases}$$

où $u \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega} \times \mathbf{R})$ est une distribution prolongeable. Les résultats concernant la propagation des singularités C^∞ sont maintenant à peu près complets (voir [4,5] et la bibliographie qui s'y trouve).

Dans le cas des singularités analytiques on sait d'après Anderson [1], SKK [7] que les singularités se propagent à l'intérieur le long des bicaractéristiques ("rayons"). D'autre part, d'après Schapira [8] on sait qu'une singularité, suivant un rayon qui rencontre le bord transversalement, sera réfléchi dans le bord comme les singularités C^∞ (Lax-Nirenberg, Chazarain).

Pour les rayons tangents au bord il apparaît une différence essentielle entre les singularités C^∞ et les singularités analytiques. Friedlander-Melrose [2] ont étudié l'opérateur

$$\sum_2^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - (1 + x_n) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \qquad \text{dans } x_n \geq 0 \quad ,$$

et ils ont trouvé que les singularités analytiques peuvent "glisser le long du bord" bien que ceci soit impossible dans ce cas pour les singularités C^∞. Géométriquement cet exemple correspond pour $\Box$ au cas où $\complement\Omega$ est strictement convexe.

Rauch [6] a montré par un argument très simple que pour le problème (1), si par exemple $u(0,x) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \delta(x - x_0)$, $x_0 \in \Omega$, alors les singularités analytiques pénètrent dans l'ombre C^∞ par rapport à x_0.

Pour formuler notre résultat on remplace $\bar{\Omega} \times \mathbf{R}$ par une variété analytique M à bord analytique et $\square$ par un opérateur différentiel d'ordre 2 à symbole principal réel ; on suppose que P est de type principal jusqu'au bord dans le sens de [4]. Alors localement on peut se ramener au cas :

$$P = D_{x_n}^2 + R(x,D_{x'}) \ , \ M : x_n \geq 0,$$

où $R(x,D_{x'})$ est de type principal réel. Soit $r(x,\xi')$ le symbole principal de R, $r_o = r(x',0,\xi')$. On décompose : $T^*\partial M\backslash 0 = \mathcal{E} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{H}$ où

$$\mathcal{E} : r_o > 0 \quad , \qquad \mathcal{G} : r_o = 0 \ , \qquad \mathcal{H} : r_o < 0 \ .$$

Ici $\mathcal{H}$ correspond aux points de réflexion transversale et $\mathcal{G}$ aux points où les bicaractéristiques sont tangents au bord. Dans $\mathcal{G}$, la convexité de $\complement M$ par rapport aux bicaractéristiques se lit sur $\frac{\partial r}{\partial x_n}(x',0,\xi')$, et en particulier on introduit $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$ par $\frac{\partial r}{\partial x_n} < 0$. Pour le problème (1) on a $\mathcal{G}_+ = \mathcal{G}$ si et seulement si $\complement\Omega$ est strictement convexe. C'est uniquement dans $\mathcal{G}_+$ qu'il y a une différence entre les propagations C^∞ et analytique. Soit $\Sigma_b = \mathcal{H} \cup \mathcal{G} \cup (p^{-1}(0)|_{x_n > 0})$ avec la topologie naturelle, obtenue en identifiant les points de $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ avec les points de $p^{-1}(0)|_{x_n = 0}$ qui se projettent sur ρ. La définition locale suivante, se globalise facilement :

<u>Définition</u> : Un <u>rayon analytique</u> est une courbe continue $\gamma : I \to \Sigma_b$ (où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle) telle que

1) Si $\gamma(t_o) \in p^{-1}(0)|_{x_n > 0}$ alors γ est dérivable en $t = t_o$ et $\gamma'(t_o) = H_p(\gamma(t_o))$. (Ici $p = \xi_n^2 + r(x,\xi')$).

2) Si $\gamma(t_o) \in \mathcal{H}$ alors $\gamma(t) \in p^{-1}(0)|_{x_n > 0}$ pour $t \neq t_o$ dans un voisinage de t_o.

3) Si $\gamma(t_o) \in \mathcal{G}$, alors avec $\gamma(t) = (x(t),\xi(t))$ on a

$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = 0 \ , \ \frac{\partial(x',\xi')}{\partial t} = H_{r_o} \text{ (champs hamiltonien de } r_o) \text{ en } t = t_o \ .$$

(Rappelons de [5] que la définition des rayons C^∞ est la même sauf que l'on a $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_+$ dans 2) au lieu de $\mathcal{H}$).

Soit maintenant $u \in \mathcal{D}'(M)$, $Pu \in \mathcal{A}(M)$. On définit alors $WF_{ba}(u) \subset (T^*\mathring{M}\backslash 0) \cup (T^*\partial M\backslash 0)$ comme

$$WF_a(u|_{\overset{\circ}{M}}) \cup (WF_a(u|_{\partial M}) \cup WF_a(\partial x_n u|_{\partial M}))$$

où WF_a désigne le spectre singulier analytique. D'aprés le théorème de Sato on a $WF_a(u|_{\overset{\circ}{M}}) \subset p^{-1}(0)$ et d'aprés le théorème de Holmgren microlocal de Schapira [8] on sait que $WF_{ba}(u)$ est fermé dans $(T^*\partial M\backslash 0) \cup p^{-1}(0)$ avec la topologie convenable.

Si

$$(2) \qquad \begin{cases} Pu \in \mathcal{A}(M) \\ u|_{\partial M} \in \mathcal{A}(\partial M) \end{cases}$$

on sait aussi d'aprés [8] que $WF_{ba}(u) \subset \Sigma_b$. (La définition de WF_b pour les singularités C^∞ est en effet plus laborieuse).

Notre résultat est :

<u>Théorème</u> : Si u vérifie (2) et $\rho \in WF_{ba}(u)$, alors il existe un rayon analytique maximal passant par ρ et contenu dans $WF_{ba}(u)$.

Près de $\mathcal{G}_+$, où les rayons analytiques ne sont pas uniques, on peut se demander, quelles réunions de rayons qui peuvent être porteurs de singularités. Par exemple, si γ est un rayon qui touche $\mathcal{G}_+$ en un seul point, est-ce que l'on peut trouver une solution de (2) avec $WF_{ba}(u) = \mathcal{I}m(\gamma)$? J'ai bon espoir de pouvoir montrer la

<u>Conjecture</u> : Si $\rho = (x'_0, \xi'_0) \in \mathcal{G}_+$ et $\gamma : [-\delta, \delta] \to p^{-1}(0)$ est la bicaractéristique avec $\gamma(0) = (x'_0, 0, \xi'_0, 0)$, alors de $\gamma(\delta) \notin WF_a(u|_{\overset{\circ}{M}})$ et $\gamma(-\delta) \notin WF_a(u|_{\overset{\circ}{M}})$ on déduit que $\rho \notin WF_{ba}(u)$.

Pour le problème (1) avec $\complement\Omega$ convexe ceci dit : pour avoir une singularité analytique qui glisse le long $\partial\Omega$, il faut partout une "émission" où une "absorbtion" de singularités analytiques vers (de) l'intérieur de Ω.

<u>Quelques idées sur la démonstration</u>

Utilisant le résultat géométrique de [5] et les résultats connus pour la réflexion transversale et la propagation à l'intérieur, on voit qu'il suffit de démontrer le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : Soit $(x'_o,\xi'_o) \in T^*\mathbb{R}^{n-1}\backslash 0$ un point où $r_o = 0$, soit $u \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}_+ ; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}))$ tel que $u|_{x_n=0}$ et Pu sont analytiques. Si pour $\varepsilon \subset [0,\varepsilon_o]$, $WF_{ba}(u) \cap \{(x,\xi) \in \Sigma_b ; |(x',\xi') - (x'_o,\xi'_o)| \leq \varepsilon^2,\ 0 \leq x_n \leq \varepsilon^2\} = \emptyset$, alors $\exp t H_{r_o}(x'_o,\xi'_o) \notin WF_{ba}(u)$ pour $|t| \leq \delta_o \varepsilon$. Ici $\varepsilon_o > 0$, $\delta_o > 0$ sont indépendants de u et même de (x'_o,ξ'_o) si (x'_o,ξ'_o) reste dans un compact.

<u>Quelques idées sur la démonstration</u>

Rappelons d'abord une démonstration de Hörmander pour la propagation des singularités C^∞ à l'intérieur. Si P est un opérateur de type principal réel (autoadjoint pour simplifier), on cherche des opérateurs pseudo-différentiels autoadjoints Q convenables tels que le commutateur $\frac{1}{i}[P,Q]$ soit positif dans la région où on veut déduire que u est C^∞. On contrôle en effet $-\frac{1}{i}([P,Q]u,u)$ grâce à la relation

$$\frac{1}{i}([P,Q]u,u) = 2\ \mathfrak{Im}(Qu,Pu)\ .$$

En utilisant des opérateurs d'ordre variable on peut légèrement simplifier la démonstration au prix de perdre l'information précise sur la régularité H^s.

Dans le cas analytique, il semble insuffisant de prendre des opérateurs pseudo-différentiels, il faut des "symboles" avec un comportement exponentiel, c'est-à-dire on remplace un symbole $q(x,\xi)$ par une expression $e^{q(x,\xi)}$, où q essentiellement est d'ordre 1. L'opérateur Q devient alors un O. I. F. à phase complexe : $\langle x-y,\xi\rangle + \frac{1}{i}q(x,\xi)$.

Jusqu'à présent on a cependant évité de développer une machinerie systématique des O. I. F. de phase complexe dans le cadre analytique (dont les phases en plus sont de mauvais signe), mais on passe plutôt par des <u>résolutions d'identité</u> (voir [3] pour le cas C^∞):

Soit $x_o \in \mathbb{R}^n$, on écrit $\alpha = (\alpha_x,\alpha_\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ et on considère une fonction holomorphe $\varphi(x,y,\alpha)$ définie dans un voisinage complexe conique de $\{(x_o,x_o,x_o)\} \times \dot{\mathbb{R}}^n_{\alpha_\xi}$ avec les propriétés suivantes :

1) Pour $x = y = \alpha_x$ on a $\varphi'_x = -\varphi'_y = \alpha_\xi$, $\varphi = 0$,
2) φ est homogène de d^o 1 en α_ξ ,
3) localement pour x, y, α réels on a

$$\mathfrak{Im}\ \varphi(x,y,\alpha) \geq C(|x-\alpha_x|^2 + |y-\alpha_x|^2).$$

<u>Exemple</u> : $\varphi(x,y,\alpha) = \langle x-y,\alpha_\xi\rangle + i(\alpha_\xi^2)^{1/2}((x-\alpha_x)^2 + (y-\alpha_x)^2 + a(x-\alpha_x)(y-\alpha_x))$ où $a\in\mathbb{C}$, $|a|<2$.

Avec une telle phase on peut ensuite construire un symbole analytique a d'ordre $\frac{n}{2}$ tel que dans un voisinage de (x_o,x_o) :

$$\int a(x,y,\alpha)e^{i\varphi(x,y,\alpha)}d\alpha = \delta(x-y) + w(x,y)$$

où w est analytique. On dit alors que $\pi_\alpha = \pi_\alpha(\alpha,y) = a\,e^{i\varphi}$ est une résolution de l'identité et on écrira

$$\int \pi_\alpha\, d\alpha \equiv I\ .$$

Si u est une distribution définie près de x_o, alors $\pi_\alpha u$ est bien définie modulo $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon|\alpha_\xi|})$ pour un $\varepsilon > 0$ et on peut montrer (cf. la définition de Bros-Iagolnitzer) :

$$(x_o,\xi_o) \notin WF_a(u)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\|\pi_2 u(x)\|_{L^2} = \mathcal{O}(e^{-\varepsilon|\alpha_\xi|}) \text{ pour } \alpha \text{ dans un voisinage conique}$$
de (x_o,ξ_o).

<u>Remarque</u> : Si $p(x,\xi)$ est un symbole C^∞ et homogène alors (localement) il existe un opérateur pseudo-différentiel classique de symbole principal $p(x,\xi)$ tel que $WF_a(Pu) \subset WF_a(u)$. En effet on prend $P = \int p(\alpha)\pi_\alpha d\alpha$, et on utilise des estimations assez faciles sur $\pi_\alpha \circ \pi_\beta$.

Une autre propriété intéressante est que si P est un opérateur différentiel alors

$$\frac{1}{i}[P,\pi_\alpha]d\alpha = -d_\alpha\tilde{\pi}_\alpha \quad (+\mathcal{O}(e^{-|\alpha_\xi|}))$$

où $\tilde{\pi}_\alpha = \tilde{a}(x,y,\alpha)e^{i\varphi}$ et $\tilde{a}$ est un symbole analytique à valeurs dans les $(2n-1)$-formes en α.

Soit maintenant P un opérateur de type principal réel, soit $\psi(\alpha)$ une fonction analytique réel définie près de $\bar{V}$ où V est un voisinage d'un point α_o. On suppose que $H_p\psi < 0$, et on pose pour $\lambda \geq 1$:

$$Q_\lambda = \frac{1}{\mu} \int_V e^{\mu\lambda\psi(\alpha)} \pi_{\alpha,\lambda}\, d\alpha \ , \quad \text{où } \pi_{\alpha,\lambda} = \pi_{(\alpha_x, \lambda\alpha_\xi)}$$

Ici μ est un petit paramètre qui dépend entre autre de la distribution u, vérifiant $Pu \in \mathcal{A}$.

Alors $\frac{1}{i}[P, \pi_{\alpha,\lambda}]d\alpha = -d_\alpha \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}$ pour une famille convenable ; $\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda} = \tilde{a}(x,y,\lambda,\alpha)e^{i\varphi(x,y,\alpha_x,\lambda\alpha_\xi)}$, et on trouve :

$$(3) \quad \frac{1}{i}[P,Q_\lambda]u = \frac{1}{\mu}\int_{\partial V} e^{\mu\lambda\psi(\alpha)}\tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}u + \int_V e^{\mu\lambda\psi(\alpha)}\lambda d_\alpha\psi(\alpha) \wedge \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}\, u$$

Maintenant on choisit V et ψ de telle manière que la région $\partial V \cap \{\psi \geq 0\}$ ne rencontre pas $WF_a(u)$. Alors avec μ assez petit (mais indépendant de λ) on trouve que le premier terme à droite dans (3) est $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon\lambda})$. D'autre part on trouve que $\pi^{(1)}_{\alpha,\lambda}$ définie par

$$\pi^{(1)}_{\alpha,\lambda}\, d\alpha = \lambda d_\alpha\, \psi(\alpha) \wedge \tilde{\pi}_{\alpha,\lambda}$$

est une famille elliptique dont le symbole principale se comporte comme $-H_p(\psi)$. Après un choix convenable de φ on construit ensuite une autre famille $\pi^{(2)}_{\alpha,\lambda}$ (avec une autre phase) telle que :

$$\pi^{(2)}_{\alpha,\lambda} = \pi^{(2)*}_{\alpha,\lambda}\ \pi^{(2)}_{\alpha,\lambda} + \mathcal{O}(e^{-\varepsilon\lambda})$$

Alors modulo des termes à décroissance exponentielle on trouve

$$2\, \mathfrak{Im}(Q_\lambda u, Pu) = \int_V e^{\lambda\mu\psi(\alpha)} \|\pi^{(2)}_{\alpha,\lambda} u\|^2 d\alpha$$

Puisque Pu est analytique on déduit que

$$\int_V e^{\lambda\mu\,\psi(\alpha)} \|\pi^{(2)}_{\alpha,\lambda}\, u\|^2\, d\alpha \leq C$$

où C est indépendante de λ. On pourra ensuite déduire que $WF_a(u) \cap V \cap \{\psi > 0\} = \emptyset$.

Pour les problèmes aux limites on peut encore travailler avec des résolutions de l'identité dans les variables x'. Avec des familles convenables du type :

$$\pi^{(j)}_{\alpha,\lambda,\alpha_n}(x',y') = a^{(j)}(x',y',x_n,\alpha,\lambda)e^{i\lambda\varphi(x',y',\alpha)}$$

où φ correspond à une résolution de l'identité dans $\mathbb{R}^{n-1}$. On pose :

$$Q_\lambda = \frac{1}{\mu}\int_V e^{\lambda\mu\,\psi(\alpha,x_n)}(\pi^{(1)}_{\alpha,\lambda,x_n} + \pi^{(2)}_{\alpha,\lambda,x_n} D_{x_n})d\alpha$$

Avec $A = A_{\alpha,\mu,x_n,\lambda}$, $B = \ldots$ etc.. On trouve (supposant pour simplifier que $P^* = P$) :

$$\frac{1}{i}[P,Q] = \int e^{\lambda\mu\psi}(A + B\,D_{x_n} + \frac{1}{\mu}\,CP)d\alpha + \text{erreur exponentielle.}$$

Pour extraire les racines carrés on travaille modulo P : posant $\tilde{A} = e^{\lambda\mu\psi}A$, $\tilde{B} = e^{\lambda\mu\psi}B$, on trouve des familles :

$$\tilde{F} = e^{\frac{1}{2}\lambda\mu\psi}F \ , \ \tilde{G} = e^{\frac{1}{2}\lambda\,\mu\,\psi}G \ , \ \tilde{H} = e^{\lambda\mu\psi} \quad \text{tel que :}$$

$$(\tilde{F}^* + D_{x_n}\tilde{G}^*)(\tilde{F} + \tilde{G}D_{x_n}) =$$

$$= \tilde{A} + \tilde{B}D_{x_n} + (\tilde{A} + \tilde{B}\,D_{x_n})^* + \tilde{H}P + P\tilde{H}^* + \text{erreur exponentielle}$$

Tenant compte de la condition de Dirichlet et construisant encore une racine carré sur le bord, on finit par contrôler une expression

$$\int_V e^{\lambda\mu\psi(\alpha,0)}\|\pi^{(3)}_{\alpha,\lambda}\,D_{x_n}u(x',0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n-1})}d\alpha \ +$$

$$+ \int_V \|(\tilde{F} + \tilde{G}\,D_{x_n})u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,d\alpha$$

En vertu du théorème de Holmgren-Schapira on peut ignorer le deuxième terme car le premier suffit pour contrôler $WF_a(D_{x_n}u\,(x',0))$.

---

[1] Andersson , Trans. Amer. Math. Soc. 176 (1973), 5-22.

[2] Friedlander-Melrose, Math. Proc. Camb. Phil. Soc (1977), 81, 97-120.

[3] Melin-Sjöstrand, Comm. P. D. E. 1 (1976), 313-400)

[4] Melrose-Sjöstrand, C. P. A. M., 31 (1978), 593-617.

[5] Melrose-Sjöstrand, A paraître, voir aussi Séminaire Goulaouic-Schwartz 1977-78, n° 15.

[6] Rauch, Bull. Sci. de Liège, 46, n°5-8 (1977), 156-161.

[7] Sato-Kawai-Kashiwara, Springer Lecture Notes, n° 287.

[8] Schapira , Publ. R. I. M. S. Kyoto Univ., 12 suppl. (1977), 441-453.

*
* *
*