Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Zuily

Unicité du problème de Cauchy pour une classe d'opérateurs différentiels à caractéristiques de multiplicité constante

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A12_0>

Conférence n°12

UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS DIFFERENTIELS A CARACTERISTIQUES DE MULTIPLICITE CONSTANTE

par C. ZUILY

On se propose de donner ici des conditions suffisantes portant sur les symboles principal et sous-principal d'un opérateur différentiel P, pour avoir l'unicité du problème de Cauchy à partir d'une surface non caractéristique. Cela généralise les résultats obtenus par W. Matsumoto dans [3]. Les détails seront publiés ultérieurement.

Soit S une hypersurface de $\mathbb{R}^n$, x_o un point de S, φ une fonction C^∞ telle que

$$S = \{x : \varphi(x) = 0\} : \varphi(x) = 0\} \ , \ d\varphi \neq 0 \quad \text{sur } S.$$

On se donne un opérateur différentiel P d'ordre m, dans un voisinage V_{x_o} de x_o, tel que p_m et p'_{m-1} (symboles principal et sous-principal) soient à coefficients C^∞ dans V_{x_o} et les termes d'ordre $\leq m-2$ dans $L^\infty(V_{x_o})$. On considère les solutions classiques du problème

$$(*) \qquad \begin{cases} Pu = 0 & \text{dans } V_{x_o} \\ (\frac{\partial}{\partial \nu})^j u|_S = 0 & 0 \leq j \leq m-1 \end{cases}$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale à la surface S supposée non caractéristique pour P au voisinage de x_o.

Nous noterons H_φ le hamiltonien de la fonction φ, i.e.

$$H_\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

On a alors le :

<u>Théorème 1</u> : On suppose que l'opérateur P est elliptique dans V_{x_o} et que

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ non parallèle à $N = \operatorname{grad}\varphi(x)$, $x \in S$ on a

$$(H.1)\quad \begin{cases} p_m(x,\xi+\tau N) = \prod_{j=1}^{k} (\tau - \lambda_j(x,\xi;N))^{m_j}, \ m_j \geq 2\ ,\ \tau \in \mathbb{C}\ ,\ \text{avec} \\ |\lambda_j(x,\xi,N) - \lambda_{j'}(x,\xi,N)| \geq C_o > 0\ ,\ \forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1}, \forall j \neq j' \end{cases}$$

(H.2) Il existe des entiers k_1, k_2, $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k$ tels que

(i) $p'_{m-1}(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0 \quad \forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1} \quad 1 \leq j \leq k_1$

(ii) $p'_{m-1}(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$ et $H_\varphi(p'_{m-1})(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$

$\forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1}$, $k_1 + 1 \leq j \leq k_2$

(iii) $p'_{m-1}(x,\xi + \tau N)|_{\tau=\lambda_j} = H_\varphi(p'_{m-1})(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$,

$H^2_\varphi(p'_{m-1})(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$, $\forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1}, k_2+1 \leq j \leq k$.

Il existe alors un voisinage W_{x_o} de x_o tel que toute solution du problème (*) s'annule identiquement dans W_{x_o} .

<u>Théorème 2</u> : Supposons que la partie principale de P soit réelle et que

(H.1) identique à celle du théorème 1

(H.2)' Si une racine $\lambda_j(x,\xi,N)$ est réelle en un point, elle est réelle pour tout $(x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1}$.

(H.3)' Il existe un entier k_1, $0 \leq k_1 \leq k$ tel que

(i) $\operatorname{Im} p'_{m-1}(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0 \quad \forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1},\ 1 \leq j \leq k_1$

(ii) $p'_{m-1}(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \equiv 0$ et $\operatorname{Im} H_\varphi(p'_{m-1})(x,\xi+\tau N)|_{\tau=\lambda_j} \neq 0$,

$\forall (x,\xi) \in V_{x_o} \times S^{n-1}$, $k_1 + 1 \leq j \leq k$.

Il existe un voisinage W_{x_o} de x_o tel que toute solution du problème (*) s'annule identiquement dans W_{x_o} .

<u>Exemples et remarques</u>

1) Lorsque la partie principale p_m contient des facteurs réels (th.2) on

ne peut pas se permettre de faire l'hypothèse (iii) du théorème 1. En effet d'après L. Hörmander [1] il existe $a \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $u \in C^\infty$, $\operatorname{supp} u = \{(x,t) : t \geq 0\}$ et

$$Pu = (\partial_t^3 + \alpha \partial_t^2 + a(x,t)\partial_x)u = 0 \quad ; \; (\alpha \in \mathbb{C})$$

2) Par contre le théorème 2 fournit l'unicité pour

$$p = \partial_t^3 + a\partial_x\partial_t + b\partial_t + c\partial_x + d$$

$$\operatorname{Im} a \neq 0, \quad a \in C^\infty, \; b,\; c,\; d \in L^\infty .$$

3) Soit dans $\mathbb{R}^2$ l'opérateur

$$P_o = (\partial_t - i\partial_x)^6 + a\partial_t^j(\partial_t - i\partial_x)^k$$

$j+k = 5$, $k \leq 2$. Si $a(x,t) \neq 0$ il y a unicité pour l'opérateur

$$P = P_o + \sum_{j+k\leq 4} a_{jk}(x,t)\,\partial_t^j\,\partial_x^k$$

et $S = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$.

Nous allons donner les principales étapes de la preuve . Nous nous bornerons pour simplifier aux cas (i). Par changement de coordonnées on peut se ramener au cas où

$$\operatorname{supp} u \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ : t \geq A|x|^2\}$$

en gardant les hypothèses. On commence par prouver le

<u>Lemme 3</u> : ([2], [3]) Sous les conditions des théorèmes 1 et 2, il existe $R > 0$ tel que

$$(p_m + p'_{m-1})(x,t;\xi,\tau) = \prod_{p=1}^{k}\prod_{j=1}^{m_p}(\tau - \lambda_p^{(j)}) \quad , \quad |\xi| \geq R$$

où pour $p = 1,\ldots,k$

$$\lambda_p^{(j)} = \lambda_p + \sum_{q=1}^{\infty} \nu_{p,q}^{(j)}(x,t;\xi)|\xi|^{1-k/m_p}, \quad |\xi| \geq R \; , \quad 1 \leq j \leq m_p \; ,$$

où les $\nu_{p,q}^{(j)}$ sont des symboles d'ordre zéro et

$$\nu^{(j)}_{p,1}(x,t;\xi) = \left(\frac{-\tilde{p}'_{m-1}|\tau=\lambda_p}{\prod_{j\neq p}(\tilde{\lambda}_p-\tilde{\lambda}_j)^{m_j}}\right)^{1/m_p}_{(j)}$$

où $\tilde{a}(x,\xi) = a(x,\frac{\xi}{|\xi|})$.

Introduisons quelques notations

$$\partial^{(j)}_p = D_t - \Lambda^{(j)}_p(x,t;D_x) \text{ où } \sigma(\Lambda^{(j)}_p) = \lambda^{(j)}_p \ .$$

On notera OPT^s les op.d en x à symboles $a(x,t;\xi)$ dépendant de manière C^∞ de t et ayant un développement asymptotique $a \sim \Sigma a_j$, a_j homogène de degré $s-r_j$, $r_j \in \mathbb{R}^+$. Si $I=(i_1,\dots,i_q)$ on notera $q=|I|$ et

$$\partial^I_p = \partial^{(i_1)}_p \dots \partial^{(i_q)}_p$$

P^I_p désignera l'opd de symbole $(\tau-\lambda^{(i_1)}_p)\dots(\tau-\lambda^{(i_q)}_p)$ et si A et B sont deux opd on notera $A\otimes B$ l'opd de symbole a.b.

On a alors la :

<u>Proposition 4</u> : Soient I_j des permutations de $\{1,2,\dots,m_j\}$, $1\le j\le k$. Alors

$$\partial^{I_1}_1 \circ \dots \circ \partial^{I_p}_p = P^{I_1}_1 \otimes \dots \otimes P^{I_p}_p + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial \xi_j} p_m\right)(x,D) + \Sigma_1\, a_{J_1\dots J_p}\, \partial^{J_1}_1 \circ \dots \circ \partial^{J_p}_p +$$
$$+ \sum_{s=o}^{m-2} b_s\, D^s_t$$

où la somme Σ_1 porte sur les J_q tels que $J_q \subset I_q$ avec $\sum_1^p |J_q| \le \sum_1^p m_q - 1$,

$a_{J_1\dots J_p} \in OPT^\sigma$, $\sigma = \sum_1^p m_q - \sum_1^p |J_q| - 1 - \max_{1\le q\le p}\left(\frac{(m_q-|J_q|-1)^+}{m_q}\right)$, $a^+ = \sup(a,0)$

et $b_s \in OPT^{m-2-s}$.

Corollaire 5 :

$$P_m(x,D) + P_{m-1}(x,D) = \partial_1^{I_1} \circ \cdots \circ \partial_k^{I_k} + \Sigma_1 a_{J_1 \cdots J_k} \partial_1^{J_1} \circ \cdots \circ \partial_k^{J_k} + \sum_{s=o}^{m-2} b_s \circ D_t^s .$$

Le corollaire montre que si on a une bonne inégalité de Carleman pour $\partial_1^{I_1} \circ \cdots \circ \partial_k^{I_k}$ on en déduira une pour $P_m + P_{m-1}$ et ensuite pour P. En effet l'étape suivante consiste à prouver le résultat suivant : posons

$$\|u\|^2_{(r,s)} = \int_o^T \sum_{j=o}^{r} e^{\ell(t-T)^2} \| D_t^j u\|_s^2 \, dt$$

on a alors la :

Proposition 6 : Soient $I_1,\ldots,I_k$ des permutations de $\{1,\ldots,m_1\},\ldots,\{1,\ldots m_k\}$. Il existe des constantes positives C, k_o, τ_o, r_o, R telles que pour $\ell \geq k_o$, $T \leq T_o$, pour tout $u \in C^\infty$ avec $\operatorname{supp} u \subset \{0 \leq t \leq T, |x| \leq r_o\}$, $\operatorname{supp} \hat{u}(\xi,t) \subset \{|\xi| \geq R\}$ on ait

$$\sum_{J_q} \sum_j \| \partial_1^{J_1} \circ \cdots \circ \partial_k^{J_k} u \|^2_{(\sigma-j,j)} \leq \frac{C}{\ell} \| \partial_1^{I_1} \circ \cdots \circ \partial_k^{I_k} u\|^2_{(0,0)}$$

où $J_q \subset I_q$, $\sum_1^k |J_q| \leq \sum_1^k m_q - 1$; $0 \leq j \leq \sum_1^k m_q - \sum_1^k |J_q| - 1$;

$$\sigma = m - \sum_1^k |J_q| - 1 - \operatorname*{Max}_{1 \leq q \leq k} \left(\frac{(m_q - |J_q| - 1)^+}{m_q} \right).$$

Corollaire 7 : Avec les mêmes notations que dans la proposition 6

$$\sum_{j=o}^{m-1} \| u \|^2_{\left(m-2+\frac{1}{\operatorname{Max} m_q} - j, j\right)} \leq \frac{C}{\ell} \|Pu\|^2_{(0,0)}$$

La preuve des théorèmes 1 et 2 à partir d'une telle inégalité est classique.

---

[1] L. Hörmander : Lecture Notes n° 459.

[2] S. Mizohata, Ohya : Japan Journ. Math. 40 (1971) p.63-104.

[3] W. Matsumoto : Journ. Math. Kyoto Univ. 15-3 (1975) p.479-525.

***