

JEAN-ÉRIC PIN

Hiérarchies de concaténation

RAIRO. Informatique théorique, tome 18, n° 1 (1984), p. 23-46

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1984__18_1_23_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

HIÉRARCHIES DE CONCATÉNATION (*)

par Jean-Eric PIN ⁽¹⁾

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — On sait qu'il existe une correspondance bijective entre les variétés de langages reconnaissables et les variétés de semi-groupes finis. Dans cet article, je définis des hiérarchies de variétés de langages basées sur le produit de concaténation et je donne une description purement algébrique des hiérarchies de semi-groupes correspondantes. On retrouve ainsi comme cas particuliers diverses hiérarchies déjà connues. La construction proposée repose sur le résultat suivant : tout langage reconnu par le produit de Schützenberger des monoïdes M_0, \dots, M_n est dans l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_r L_{i_r}$ ($0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r \leq n$) où les a_k sont des lettres et les L_{i_k} des langages reconnus par M_{i_k} ($0 \leq k \leq r$). Enfin je montre un résultat général de décidabilité qui permet de retrouver un résultat de théorie des semi-groupes : étant donné un semi-groupe fini S et un entier n , on peut décider si S divise un produit en couronne de n demi-treillis.

Abstract. — As well-known, there exists a one-to-one correspondence between the varieties of recognizable languages and the varieties of finite semigroups. New hierarchies of varieties of languages (based on the concatenation product) are defined and an algebraic description of the corresponding hierarchies of varieties of semigroups is given. Various well-known hierarchies are obtained as particular cases. The construction is based on the following result: if a language is recognized by the Schützenberger product of the monoids M_0, \dots, M_n , then L belongs to the boolean closure of the set of languages of the form $L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_r L_{i_r}$ ($0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n$) where the a_k 's are letters and the L_{i_k} 's are recognized by M_{i_k} ($0 \leq k \leq r$). Decidability and inclusion problems are also discussed.

INTRODUCTION

Le produit de concaténation est, avec l'étoile, l'opération la plus importante pour l'étude des langages reconnaissables. En particulier, Brzozowski [1] a proposé une hiérarchie des langages apériodiques (« star-free » en anglais) basée sur le produit de concaténation : le niveau 0 est constitué par les langages finis de A^+ et le niveau $(n+1)$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_1 \dots L_k$ avec $k \geq 0$ où chaque L_i est un langage de A^+ de niveau n . Brzozowski et Knast [2] ont démontré que cette hiérarchie était infinie et Knast [5, 6] a récemment caractérisé les semi-groupes

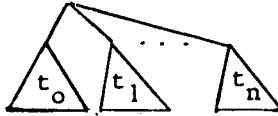
(*) Reçu mai 1982.

(1) Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation, Université Paris-VI et C.N.R.S., Tour 55-65, 4, place Jussieu 75230 Paris Cedex 05.

syntactiques des langages de hauteur 1. Brzozowski a donné par ailleurs une version plus fine de sa hiérarchie en imposant des bornes supérieures à l'entier k de la construction précédente.

Straubing [15] a défini pour les langages de A^* une hiérarchie de concaténation voisine de celle de Brzozowski. A^* et l'ensemble vide sont de niveau 0 et le niveau $(n+1)$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 a_1 L_1 a_2 \dots a_k L_k$, $k \geq 0$ où les a_i sont des lettres et les L_i des langages de niveau n . Là encore on sait caractériser les langages de niveau 1, appelés aussi langages testables par morceaux : ce sont les langages dont le monoïde syntactique est J -trivial [13] (cette classe de langages possède aussi sa hiérarchie, proposée par Simon [12]). En revanche on ne sait toujours pas décider si un langage est de niveau 2 dans la hiérarchie de Straubing, bien que l'on connaisse diverses caractérisations des monoïdes syntactiques correspondant à ces langages [10].


Le but de cet article est de montrer que ces diverses hiérarchies sont des cas particuliers d'une construction plus générale, obtenue en associant des variétés de langages non plus à des entiers, mais à des arbres, selon le procédé suivant. Comme pour les constructions précédentes, on se donne au départ une variété de langages qui est associée par définition à l'arbre réduit à un point. Ensuite,



on associe à l'arbre $t =$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_k L_{i_k}$ avec $0 \leq i_0 < \dots < i_k \leq n$ où les a_i sont des lettres et où, pour $0 \leq j \leq k$, L_{i_j} est élément de la variété de langages associée à l'arbre t_{i_j} .

Il reste à donner l'interprétation algébrique de cette construction, ce qui peut être fait en utilisant le produit de Schützenberger de $(n+1)$ monoïdes M_0, \dots, M_n . Cette opération, introduite par Schützenberger dans le cas $n=1$ (cf. [4]) puis généralisée par Straubing [14], peut paraître à première vue assez artificielle. C'est en fait un cas particulier d'une construction très naturelle [9]. Je démontre (section 2) que le produit de Schützenberger est, en un certain sens, parfaitement adapté à l'opération (sur les langages) $(L_0, \dots, L_n) \rightarrow L_0 a_1 L_1 \dots a_n L_n$ où les a_i sont des lettres. Ce résultat permet de construire, sans référence aux langages, des hiérarchies de variétés de semi-groupes (monoïdes) correspondant, *via* le théorème d'Eilenberg, aux hiérarchies de langages précédemment construites. Autrement dit, partant d'une variété de semi-groupes (ou de monoïdes) \underline{V} , on associe à chaque arbre t — resp. à chaque ensemble d'arbres L — une variété de semi-groupes $\diamond_t(\underline{V})$ ($\diamond_L(\underline{V})$).

Je montre que les variétés de semi-groupes ou de monoïdes correspondant aux hiérarchies de Brzozowski, Straubing et Simon s'obtiennent toutes par ce procédé. On retrouve également ainsi d'autres variétés connues telles que la variété \underline{R} des monoïdes \mathcal{R} -triviaux. Je démontre également que l'opération qui

à un arbre t associe l'arbre  est liée au produit semi-direct des semi-groupes (théorème 3.7).

Parmi les nombreux problèmes que posent ces hiérarchies, on peut en dégager trois principaux :

1° *Comparaison des variétés à l'intérieur d'une hiérarchie*

C'est la généralisation du problème « la hiérarchie de Brzozowski est-elle infinie », résolu positivement par Brzozowski et Knast. De façon précise le problème consiste à comparer entre elles les différentes variétés $\diamond_i(V)$ (ou même $\diamond_L(V)$). La fin de la section 3 regroupe quelques résultats partiels et une conjecture sur ce problème.

2° *Problème de décidabilité*

On dit qu'une variété de semi-groupes \underline{V} est décidable s'il existe un algorithme qui permet de tester si un semi-groupe fini est ou n'est pas dans \underline{V} . Le problème est de savoir si les variétés étudiées dans cet article sont décidables. La question est abordée dans la section 4 où il est montré en particulier que toutes les variétés de la hiérarchie construite à partir de la variété triviale sont décidables. Ce résultat a une conséquence en théorie des semi-groupes : étant donné un entier n , on peut décider si un semi-groupe fini divise un produit en couronne de n demi-treillis.

3° *Équations des variétés*

Cette question, qui est liée à la précédente, n'est pas abordée dans cet article et fera l'objet de publications ultérieures.

1. RAPPELS ET NOTATIONS

Les références de base sont Eilenberg [4] et Lallement [7] dont j'adopterai la plupart des notations. Si S est un semi-groupe, on note $E(S)$ l'ensemble des idempotents de S .

Une variété de semi-groupes (monoïdes) est une classe de semi-groupes (monoïdes) finis \underline{V} telle que :

- (1) Si $S \in \underline{V}$ et si T est un sous-semi-groupe de S , alors $T \in \underline{V}$.
- (2) Si $S \in \underline{V}$ et si T est un quotient de S , alors $T \in \underline{V}$.

(3) Si $(S_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de \underline{V} , le produit direct $\prod_{i \in I} S_i$ est dans \underline{V} .

Eilenberg a montré l'existence d'une bijection entre les variétés de semi-groupes (monoïdes) et certaines classes de langages, les $+$ -variétés (\star -variétés) de langages. De façon formelle une $+$ -variété de langages \mathcal{V} associe à chaque alphabet fini A un ensemble $A^+ \mathcal{V}$ de langages reconnaissables de A^+ tels que :

(1) Pour tout alphabet A , $A^+ \mathcal{V}$ est fermée pour les opérations booléennes finies.

(2) Pour tout alphabet A , si $a \in A$ et $L \in A^+ \mathcal{V}$ alors $a^{-1}L, La^{-1} \in A^+ \mathcal{V}$.

(3) Pour tout morphisme de semi-groupes $\varphi : A^+ \rightarrow B^+$, $L \in A^+ \mathcal{V}$ entraîne $L\varphi^{-1} \in A^+ \mathcal{V}$.

La définition des \star -variétés s'obtient en remplaçant $+$ par \star et semi-groupe par monoïde.

Les hiérarchies de concaténation fournissent des exemples particulièrement intéressants de variétés de langages. La hiérarchie de Brzozowski [1] \mathcal{B}_n est définie comme suit : pour tout alphabet A , $A^+ \mathcal{B}_0$ est l'ensemble des langages finis ou cofinis de A^+ et $A^+ \mathcal{B}_{n+1}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 \dots L_k$ avec $k \geq 0$ et $L_0, \dots, L_k \in A^+ \mathcal{B}_n$.

On peut définir une sous-hiérarchie à l'intérieur de \mathcal{B}_{n+1} en considérant pour chaque entier $r \geq 0$ l'algèbre de Boole $A^+ \mathcal{B}_{n+1,r}$ engendrée par les langages de la forme $L_0 \dots L_k$ avec $L_0, \dots, L_k \in A^+ \mathcal{B}_n$ et $0 \leq k \leq r$. On définit ainsi une suite de variétés $\mathcal{B}_{n,r}$. On notera que $\mathcal{B}_{n+1,0} = \mathcal{B}_n$ pour tout $n \geq 0$. On montre également que $\mathcal{B}_{1,2k} = \mathcal{B}_{1,2k+1}$ pour tout $k > 0$.

La hiérarchie de Straubing [15] \mathcal{V}_n est la suite des \star -variétés ainsi définie : pour tout alphabet A , $A^* \mathcal{V}_0$ est constitué de \emptyset et de A^* et $A^* \mathcal{V}_{n+1}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 a_1 L_1 \dots a_k L_k$ avec $k > 0$, $L_0, \dots, L_k \in A^* \mathcal{V}_n$ et $a_1, \dots, a_k \in A$.

On démontre que les \mathcal{V}_n (resp. $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_{n,k}$) sont effectivement des \star -variétés ($+$ -variétés). Les variétés de monoïdes (resp. semi-groupes) correspondantes sont notées \underline{V}_n (resp. $\underline{B}_n, \underline{B}_{n,k}$). Le problème majeur concernant ces variétés demeure leur caractérisation algébrique. Rappelons les résultats connus à ce jour.

THÉORÈME 1.1 (Simon [13]) : *On a $\underline{V}_1 = \underline{J}$, la variété des monoïdes \mathcal{J} -triviaux. En particulier un monoïde M est dans \underline{J} ssi pour tout $x, y \in M$ $(xy)^n = (yx)^n$ et $x^n = x^{n+1}$ avec $n = \text{Card } M$.*

Si \underline{V} est une variété de monoïdes, on note \underline{LV} la variété de semi-groupes « locale » associée à \underline{V} :

$$\underline{LV} = \{ S \mid eSe \in \underline{V} \text{ pour tout } e \in E(S) \}.$$

On note \underline{J}_1 la variété des monoïdes idempotents et commutatifs (appelés aussi demi-treillis).

THÉORÈME 1.2 [3] : *On a $\underline{B}_{1,2} = \underline{LJ}_1$.*

Les langages de $\mathcal{B}_{1,2}$ sont appelés localement testables. Pour chaque alphabet A , $A^+ \mathcal{B}_{1,2}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme uA^* , A^*v et A^*wA^* où u, v et w sont des mots de A^+ .

Simon avait conjecturé l'égalité $\underline{B}_1 = \underline{LJ}$. En fait, on a bien $\underline{B}_1 \subset \underline{LJ}$ mais Knast a montré que l'inclusion était stricte :

THÉORÈME 1.3 [5, 6] : *Un semi-groupe S est dans \underline{B}_1 ssi il satisfait la condition suivante :*

(K) *il existe $m > 0$ tel que pour tout $e_1, e_2 \in E(S)$, pour tout $x, y, u, v \in (e_1 x e_2 y)^m e_1 x e_2 v e_1 (u e_2 v e_1)^m = (e_1 x e_2 y)^m e_1 (u e_2 v e_1)^m$.*

Si M est un monoïde, on note $\mathcal{P}(M)$ le monoïde des parties de M , muni du produit usuel des parties :

THÉORÈME 1.4 [10] : *On a $\underline{V}_2 = \underline{PJ}$, la variété engendrée par les monoïdes $\mathcal{P}(M)$ où $M \in \underline{J}$.*

Malheureusement ni cette description de \underline{V}_2 ni les autres caractérisations connues [10] ne permettent de résoudre le problème suivant : peut-on décider si un monoïde fini M est dans \underline{V}_2 .

On ne connaît à ce jour aucun résultat sur les variétés \underline{B}_n pour $n \geq 2$ et \underline{V} pour $n \geq 3$, hormis les résultats généraux suivants :

THÉORÈME 1.5 [2, 14] : *La hiérarchie \underline{B}_n est infinie.*

THÉORÈME 1.6 [15] : *On a $\underline{B}_n = \underline{V}_n * \underline{LI}$ pour tout $n > 0$. En particulier la hiérarchie \underline{V}_n est infinie.*

Dans ce dernier énoncé, la notation $\underline{V}_n * \underline{LI}$ désigne la variété engendrée par les produits semi-directs $M * S$ d'un monoïde $M \in \underline{V}_n$ et d'un semi-groupe $S \in \underline{LI}$. \underline{LI} est la variété des semi-groupes localement triviaux, i. e. $S \in \underline{LI}$ ssi $eSe = e$ pour tout $e \in E(S)$.

2. LE PRODUIT DE SCHÜTZENBERGER

Si S est un semi-groupe, on note $\mathcal{P}(S)$ le semi-anneau des parties de S , muni de l'union comme addition et du produit des parties comme multiplication. On note S^1 le monoïde ainsi défini :

$S^1 = S$ si S est un monoïde.

$S^1 = S \cup \{1\}$ si S n'est pas un monoïde (1 est évidemment alors l'élément neutre de S^1).

Soient S_1, \dots, S_n des semi-groupes. Le produit de Schützenberger de S_1, \dots, S_n , noté $\diamond_n(S_1, \dots, S_n)$ est le semi-groupe des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathcal{P}(S_1^1 \times \dots \times S_n^1)$ de la forme $p = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et vérifiant les trois conditions suivantes :

(1) $p_{ij} = \emptyset$ si $i > j$.

(2) $p_{ii} = \{(1, \dots, 1, s_i, 1, \dots, 1)\}$ pour un certain $s_i \in S_i$.

(3) $p_{ij} \subset \{(s_1, \dots, s_n) \in S_1^1 \times \dots \times S_n^1 \mid s_1 = \dots = s_{i-1} = 1 = s_{j+1} = \dots = s_n\}$.

Il est à noter que le produit de Schützenberger n'est pas « associatif » c'est-à-dire qu'en général les semi-groupes $\diamond_2(\diamond_2(S_1, S_2), S_3)$, $\diamond_3(S_1, S_2, S_3)$ et $\diamond_2(S_1, \diamond_2(S_2, S_3))$ sont distincts.

Straubing [14] a montré que si les langages L_i ($0 \leq i \leq n$) de A^* (resp. de A^+) sont reconnus par des monoïdes M_i (resp. des semi-groupes S_i), alors le langage $L_0 a_1 L_1 \dots a_n L_n$, où les a_i sont des lettres, est reconnu par $\diamond_{n+1}(M_0, \dots, M_n)$. Il est facile de vérifier que si $0 \leq i_0 < \dots < i_r \leq n$, alors $\diamond_{r+1}(M_{i_0}, \dots, M_{i_r})$ est un sous-monoïde de $\diamond_{n+1}(M_0, \dots, M_n)$. Il en résulte que le monoïde $\diamond_{n+1}(M_0, \dots, M_n)$ reconnaît tous les langages de la forme $L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_r L_{i_r}$, où L_{i_k} est reconnu par M_{i_k} .

Le but de cette section est d'établir la réciproque de ce résultat. Le cas $n = 1$ a été traité par Reutenaeur [11] et la preuve qui suit s'inspire en partie de ses arguments.

THÉORÈME 2.1 : *Si un langage $L \subset A^*$ est reconnu par $\diamond_{n+1}(M_0, \dots, M_n)$ alors L est dans l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{i_0} a_1 \dots a_r L_{i_r}$, $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r \leq n$ où les a_k sont des lettres et où L_{i_0}, \dots, L_{i_r} sont des langages reconnus respectivement par M_{i_0}, \dots, M_{i_r} .*

Démonstration : Soit $\mu : A^* \rightarrow \diamond_{n+1}(M_0, \dots, M_n)$ le morphisme reconnaissant L et soient $(\mu_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ les composantes de μ considérées comme applications de A^* dans $\mathcal{P}(M_0 \times \dots \times M_n)$.

LEMME 2.2 : *Soit $P \subset \diamond_{n+1}(M_0, M_1, \dots, M_n)$. On a la formule :*

$$P \mu^{-1} = \bigcup_{m \in P} \bigcap_{0 \leq i, j \leq n} m_{ij} \mu_{ij}^{-1}.$$

C'est immédiat. \square

LEMME 2.3 : On a pour tout $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$:

$$(a_1 \dots a_r) \mu_{ij} = \sum_{i=i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{r-1} \leq i_r=j} a_1 \mu_{i_0 i_1} a_2 \mu_{i_1 i_2} \dots a_r \mu_{i_{r-1} i_r}.$$

La formule est évidente par $r=1$. Supposons-là acquise jusqu'au rang $(r-1)$. Il vient :

$$\begin{aligned} (a_1 \dots a_r) \mu_{ij} &= \sum_{k=0}^n (a_1 \dots a_{r-1}) \mu_{ik} a_r \mu_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{r-1}=k} a_1 \mu_{i_0 i_1} \dots a_{r-1} \mu_{i_{r-2} i_{r-1}} a_r \mu_{kj} \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_{r-1}=k} a_1 \mu_{i_0 i_1} \dots a_{r-1} \mu_{i_{r-2} i_{r-1}} a_r \mu_{i_{r-1} j} \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Désormais on fixe i et j . D'après le lemme 2.2, il suffit d'établir que le langage $m_{ij} \mu_{ij}^{-1}$ s'écrit comme combinaison booléenne de langages de la forme $L_r a_{r+1} \dots a_s L_s$ avec $a_k \in A$ et L_k reconnu par M_k pour $r \leq k \leq s$. Si $i > j$, on a $m_{ij} = \emptyset$ d'où $m_{ij} \mu_{ij}^{-1} = \emptyset$ et le résultat est évident. Si $i = j$, m_{ij} s'identifie à un élément de M_i et $m_{ij} \mu_{ij}^{-1}$ est un langage reconnu par M_i . On peut donc supposer désormais que $i < j$.

Soit, pour $1 \leq k \leq j-i+1$, R_k l'ensemble des suites de lettres (a_1, \dots, a_k) et S_k l'ensemble des suites (i_0, i_1, \dots, i_k) telles que $i = i_0 < i_1 < \dots < i_k = j$. Pour $r_k = (a_1, \dots, a_k) \in R_k$, on définit une application : $\sigma_{r_k} : A^* \rightarrow \mathcal{P}(A^* \times \dots \times A^*)$ par :

$$u \sigma_{r_k} = \{ (u_0, u_1, \dots, u_k) \in A^* \times \dots \times A^* \mid u_0 a_1 u_1 \dots a_k u_k = u \}.$$

Pour $s_k = (i_0, i_1, \dots, i_k) \in S_k$ et $r_k = (a_1, \dots, a_k) \in R_k$, on définit une application :

$$\tau_{r_k, s_k} : (A^* \times \dots \times A^*) \rightarrow \mathcal{P}(M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n)$$

par :

$$(u_0, \dots, u_k) \tau_{r_k, s_k} = u_0 \mu_{i_0 i_0} a_1 \mu_{i_0 i_1} u_1 \mu_{i_1 i_1} \dots u_k \mu_{i_k i_k}.$$

LEMME 2.4 : On a la formule :

$$u \mu_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq j-i+1} \sum_{r_k \in R_k} \sum_{(u_0, \dots, u_k) \in u \sigma_{r_k}} \sum_{s_k \in S_k} (u_0, \dots, u_k) \tau_{r_k, s_k}.$$

Preuve : La formule s'obtient immédiatement à partir du lemme 2.3 en regroupant les produits de la forme $a_s \mu_{i,j} a_{s+1} \mu_{i,j} \dots a_{s+t} \mu_{i,j}$ en $(a_s a_{s+1} \dots a_{s+t}) \mu_{i,j}$.

Posons, pour $1 \leq k \leq j-i+1$, $r_k \in R_k$, $s_k \in S_k$ et $F \in \mathcal{P}\mathcal{P}(M_0 \times \dots \times M_n)$:

$$L_{F, r_k, s_k} = \{ u \in A^* \mid \{ (u_0, \dots, u_k) \tau_{r_k, s_k} \mid (u_0, \dots, u_k) \in u \sigma_{r_k} \} = F \}.$$

LEMME 2.5 : Pour tout $m \in \mathcal{P}(M_0 \times \dots \times M_n)$, $m \mu_{ij}^{-1}$ est dans l'algèbre de Boole des langages de la forme L_{F, r_k, s_k} .

Preuve : Posons $u \gamma_{r_k, s_k} = \sum_{(u_0, \dots, u_k) \in u \sigma_{r_k}} (u_0, \dots, u_k) \tau_{r_k, s_k}$.

En intervertissant l'ordre des deux dernières sommations dans le lemme 2.4, on obtient :

$$u \mu_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq j-i+1} \sum_{r_k \in R_k} \sum_{s_k \in S_k} u \gamma_{r_k, s_k}.$$

On en déduit la formule :

$$(1) \quad m \mu_{ij}^{-1} = \bigcup_{\Sigma m_{r_k, s_k} = m} \bigcap m_{r_k, s_k} \gamma_{r_k, s_k}^{-1}.$$

La sommation et l'intersection étant étendues à $1 \leq k \leq j-i+1$, $r_k \in R_k$ et $s_k \in S_k$.

On a d'autre part, si $m \in \mathcal{P}(M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n)$:

$$(2) \quad m \gamma_{r_k, s_k}^{-1} = \bigcup_{\sum f = m} L_{F, r_k, s_k}.$$

Démontrons (2) en omettant, pour alléger les notations, les indices r_k et s_k :

$$\sum_{(u_0, \dots, u_k) \in u \sigma} (u_0, \dots, u_k) \tau = m$$

et donc en posant :

$$F = \{ (u_0, \dots, u_k) \tau \mid (u_0, \dots, u_k) \in u \sigma \},$$

on a à la fois :

$$\sum_{f \in F} f = m \quad \text{et} \quad u \in L_F.$$

Réciproquement, si $u \in L_F$ avec $\sum_{f \in F} f = m$ on a :

$$u \gamma = \sum_{(u_0, \dots, u_k) \in u \sigma} (u_0, \dots, u_k) \tau = \sum_{f \in F} f = m,$$

ce qui établit la formule (2). Le lemme découle alors immédiatement de (1) et (2). \square

Les indices k, r_k, s_k et F étant maintenant fixés, il s'agit d'étudier le langage $L_F = \{u \in A^* \mid \{(u_0, \dots, u_k) \tau \mid (u_0, \dots, u_k) \in u \sigma\} = F\}$.

LEMME 2.6 : On a la formule $L_F = \bigcap_{f \in F} L_f \setminus \bigcup_{f \notin F} L_f$, où :

$$L_f = \{u \in A^* \mid \exists (u_0, \dots, u_k) \in u \sigma (u_0, \dots, u_k) \tau = f\}.$$

Si $u \in L_F$ et si $f \in F$, il existe $(u_0, u_1, \dots, u_k) \in u \sigma$ tel que $(u_0, \dots, u_k) \tau = f$ et donc $u \in L_f$. Si $f \notin F$, on a pour tout $(u_0, \dots, u_k) \in u \sigma$, $(u_0, \dots, u_k) \tau \neq f$ et donc $u \notin L_f$.

Réciproquement si $u \in \bigcap_{f \in F} L_f \setminus \bigcup_{f \notin F} L_f$ on a :

$$F \subset \{(u_0, \dots, u_k) \tau \mid (u_0, \dots, u_k) \in u \sigma\} \subset (F^c)^c = F,$$

où F^c désigne le complémentaire de F dans $\mathcal{P} \mathcal{P}(M_0 \times \dots \times M_n)$, ce qui établit le lemme. \square

Désormais, on fixe $f \in \mathcal{P}(M_0 \times M_1 \times \dots \times M_n)$. Rappelons la définition de L_f :

$$L_f =$$

$$\{u \in A^* \mid \exists u_0, \dots, u_k \in A^* u = u_0 a_1 u_1 \dots a_k u_k \text{ et } u_0 \mu_{i_0 i_0} a_1 \mu_{i_0 i_1} \dots u_k \mu_{i_k i_k} = f\}.$$

D'après la définition du produit de Schützenberger de n monoïdes, on peut toujours supposer que f est contenu dans l'ensemble des $(n+1)$ -uplets :

$$(m_0, \dots, m_n) \in M_0 \times \dots \times M_n \quad \text{tels que } m_0 = \dots = m_{i-1} = 1$$

$$\text{et } m_{j+1} = \dots = m_n = 1.$$

On pose donc :

$$f = \{(1, \dots, 1, m_{i,r}, m_{i+1,r}, \dots, m_{j,r}, 1, \dots, 1) \mid 1 \leq r \leq |f|\}$$

et, pour $1 \leq s \leq k$:

$$a_s \mu_{i_s-1 i_s} = \{ (1, \dots, 1, m_{i_s-1}(s), \dots, m_{i_s}(s), 1, \dots, 1) \mid 1 \leq r \leq r_s \},$$

où $r_s = |a_s \mu_{i_s-1 i_s}|$.

Si $u \in L_f$, il existe par définition des mots $u_0, \dots, u_k \in A^*$ tels que $u = u_0 a_1 u_1 \dots a_k u_k$ et :

$$f = \{ (u_0 \mu_{i_0 i_0} m_{i_0, t_0}(1), m_{i_0+1, t_0}(1), \dots, m_{i_1, t_0}(1) u_1 \mu_{i_1, i_1} m_{i_1, t_1}(2), \\ m_{i_1+1, t_1}(2), \dots, m_{i_k, t_k}(k) u_k \mu_{i_k, i_k} \mid 1 \leq t_j \leq r_j, 1 \leq j \leq k-1 \}.$$

Il en résulte qu'il existe deux applications φ et ψ :

$$\varphi : \{1, \dots, |f|\} \rightarrow \prod_{0 \leq j \leq k} \{1, \dots, r_j\} = T,$$

$$\psi : T = \prod_{0 \leq j \leq k} \{1, \dots, r_j\} \rightarrow \{1, \dots, |f|\},$$

telles que pour tout $p \in \{1, \dots, |f|\}$, on ait, en posant :

$$(3) \quad p \varphi = (p \varphi_0, \dots, p \varphi_k) :$$

$$(m_{i, p}, \dots, m_{j, p}) = (u_0 \mu_{i_0 i_0} m_{i_0, p \varphi_0}(1), m_{i_0+1, p \varphi_0}(1), \dots, \\ m_{i_1, p \varphi_0}(1) u_1 \mu_{i_1, i_1} m_{i_1, p \varphi_1}(2), m_{i_1+1, p \varphi_1}(2) \dots m_{i_k, p \varphi_k}(k) u_k \mu_{i_k, i_k})$$

et pour tout $t = (t_1, \dots, t_k) \in T$:

$$(4) \quad (u_0 \mu_{i_0 i_0} m_{i_0, t_0}(1), \dots, m_{i_k, t_k}(k) u_k \mu_{i_k, i_k}) = (m_{i, t\psi}, m_{i+1, t\psi}, \dots, m_{j, t\psi}).$$

Posons, pour $0 \leq j \leq k, t \in \prod_{1 \leq j \leq k-1} \{1, \dots, r_j\}, p \in \{1, \dots, s\}$:

$$L(j, t, p) : ((m_{i_j, t_{j-1}}(j))^{-1} m_{i_j, p} (m_{i_j, t_j}(j+1))^{-1}) \mu_{i_j, i_j}^{-1}$$

avec la convention $(m_{i_j, t_{j-1}}(j))^{-1} = 1$ si $j=0$ et $(m_{i_j, t_j}(j+1))^{-1} = 0$ si $j=k$.

Comme $\mu_{i_j i_j}$ est un morphisme $A^* \rightarrow M_{i_j}$, le langage $L(j, t, P)$ est reconnu par M_{i_j} .

Il résulte d'autre part des formules (3) et (4) la relation suivante : pour $0 \leq j \leq k$:

$$(5) \quad u_j \in \left(\bigcap_{p \in \{1, \dots, |f|\}} L(j, p, \varphi, p) \right) \cap \left(\bigcap_{t \in T} L(j, t, t, \psi) \right).$$

Soit \mathcal{E} l'ensemble des applications de $\{1, \dots, |f|\}$ dans T et soit \mathcal{F} l'ensemble des applications de T dans $\{1, \dots, |f|\}$. On va établir la formule :

$$(6) \quad L_f = \bigcup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E} \\ \psi \in \mathcal{F}}} K_0(\varphi, \psi) a_1 \dots a_k K_k(\varphi, \psi),$$

avec, pour $0 \leq j \leq k$:

$$K_j(\varphi, \psi) = \left(\bigcap_{p \in \{1, \dots, |f|\}} L(j, p, \varphi, p) \right) \cap \left(\bigcap_{t \in T} L(j, t, t, \psi) \right).$$

L'inclusion de gauche à droite résulte de la relation (5) et de la définition de L_f . Réciproquement, soit u un élément du membre droit de (6). Il existe alors $\varphi \in \mathcal{E}$ et $\psi \in \mathcal{F}$ et $u_0, \dots, u_k \in A^*$ tels que $\forall j \in \{0, \dots, k\}, u_j \in K_j(\varphi, \psi)$. On en déduit que, pour tout $p \in \{1, \dots, |f|\}$ (resp. pour tout $t \in T$) la formule (3) [resp. (4)] est satisfaite. Il en découle, en remontant encore les calculs, que $u \in L_f$, et la formule (6) est établie.

Comme chaque $L(j, t, p)$ est reconnu par M_{i_p} , il en va de même pour $K_j(\varphi, \psi)$ et la formule (6) permet de conclure la preuve du théorème. \square

Dans le cas où les langages sont des parties d'un semi-groupe libre, on démontre de la même façon le résultat suivant :

THÉORÈME 2.7 : *Si un langage $L \subset A^+$ est reconnu par $\diamond_{n+1}(S_0, \dots, S_n)$ alors L est dans l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{i_0} a_1 \dots a_r L_{i_r}$, $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_r \leq n$, où les a_k sont des lettres et où L_{i_0}, \dots, L_{i_r} sont des langages reconnus respectivement par S_{i_0}, \dots, S_{i_r} .*

Les conséquences des théorèmes 2.1 et 2.7 seront examinées dans la section suivante.

3. HIÉRARCHIES DE CONCATÉNATION

Dans cette section, je construis des hiérarchies de variétés qui contiennent en particulier les hiérarchies proposées par Brzozowski [1], Simon [12] et Straubing [15].

On note P l'ensemble des arbres (ou mots bien parenthésés) sur l'alphabet $\{a, \bar{a}\}$. De façon formelle, P est l'ensemble des mots de $\{a, \bar{a}\}^*$ congrus à 1 dans la congruence engendrée par la relation $a\bar{a}=1$. De façon intuitive les mots de P sont obtenus par le procédé suivant : on dessine un arbre (au sens naïf du terme) et on le parcourt en partant de la racine (suivant le sens trigonométrique) en codant a pour une descente et \bar{a} pour une montée. Par



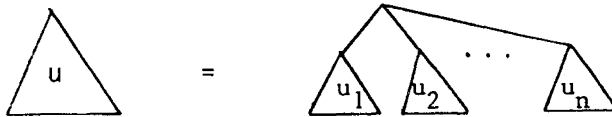
exemple est codé par $aa\bar{a}aa\bar{a}aa\bar{a}aa\bar{a}$.

Le nombre de feuilles d'un mot u de $\{a, \bar{a}\}^*$, noté $d(u)$ est par définition le nombre d'occurrences du facteur $a\bar{a}$ dans u . Dans le cas des arbres, cette définition est bien conforme à l'intuition.

Je rappelle ci-dessous quelques propriétés classiques des arbres que j'utiliserai par la suite :

(1) tout arbre u se factorise de façon unique en $u = au_1\bar{a}au_2\bar{a} \dots au_n\bar{a}$ où $n \geq 0$ et où les u_i sont des arbres. On a alors $d(u) = \sum_{1 \leq i \leq n} d(u_i)$.

L'interprétation intuitive de cette propriété est illustrée par le schéma suivant :

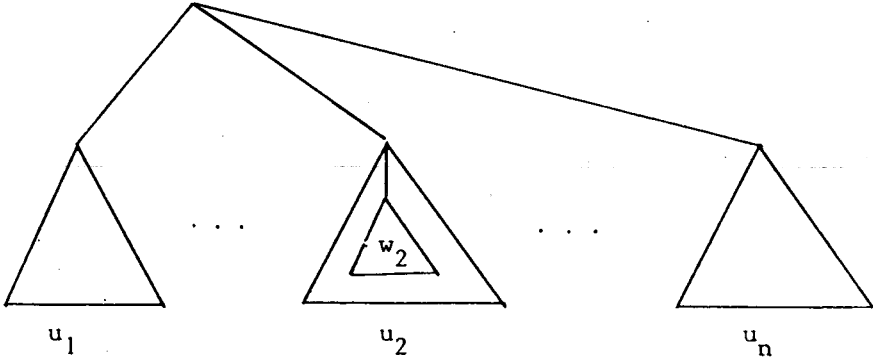


(2) Soit u un arbre et soit $u = u_1au_2\bar{a}u_3$ une factorisation de u . On dit que les occurrences de a et \bar{a} définies par cette factorisation sont liées si u_2 est un arbre. On démontre que toute occurrence de a dans u est liée à une unique occurrence de \bar{a} . L'interprétation intuitive de cette propriété est très simple : les occurrences de a et \bar{a} sont liées ssi elles codent respectivement la descente et la montée sur une même arête de l'arbre.



Exemple : est codé par $\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}$ où les occurrences liées sont indiquées par des crochets.

(3) Si $u = au_1\bar{a}au_2\bar{a} \dots au_n\bar{a}$ est la factorisation de l'arbre u décrite en (1) et si $u = w_1aw_2\bar{a}w_3$ avec $w_2 \in P$, alors l'arbre $aw_2\bar{a}$ est facteur de l'un des mots $au_i\bar{a}$ ($1 \leq i \leq n$). L'interprétation intuitive est illustrée par le schéma suivant :



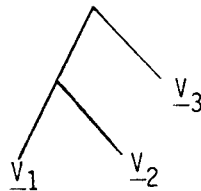
A chaque arbre u et à chaque suite $\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)}$ de variétés de semi-groupes (resp. de monoïdes), on associe une variété de semi-groupes (monoïdes) $\diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)})$ définie récursivement par :

(a) $\diamond_1(\underline{V}) = \underline{V}$ pour toute variété \underline{V} .

(b) Si $u = au_1\bar{a}au_2\bar{a} \dots au_n\bar{a}$ avec $n \geq 0$ et $u_1, \dots, u_n \in P$, $\diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)})$ est la variété engendrée par les semi-groupes de la forme $\diamond_n(S_1, \dots, S_n)$ avec :

$$S_1 \in \diamond_{u_1}(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u_1)}), \dots, S_n \in \diamond_{u_n}(\underline{V}_{d(u_1)+\dots+d(u_{n-1})+1}, \dots, \underline{V}_{d(u_1)+\dots+d(u_n)}).$$

Exemple : Soit $u = a\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a}$ et $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ trois variétés de semi-groupes. La variété $\diamond_n(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3)$ est la variété engendrée par les semi-groupes $\diamond_2(S, S_3)$ où $S_3 \in \underline{V}_3$ et où S est dans la variété engendrée par les semi-groupes $\diamond_2(S_1, S_2)$ tels que $S_1 \in \underline{V}_1$ et $S_2 \in \underline{V}_2$.



On observera que $S \in \diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)})$ si et seulement si S divise un semi-groupe de la forme $\diamond_n(S_1, \dots, S_n)$ avec :

$$S_1 \in \diamond_{u_1}(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u_1)}), \dots, S_n \in \diamond_n(\underline{V}_{d(u_1)+\dots+d(u_{n-1})+1}, \dots, \underline{V}_{d(u_1)+\dots+d(u_n)}).$$

Cela résulte de la formule suivante, qui se démontre facilement : pour tout semi-groupe $S_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq r$:

$$\diamond_n(S_{1,1}, \dots, S_{n,1}) \times \dots \times \diamond_n(S_{1,r} \times \dots \times S_{n,r}),$$

divise

$$\diamond_n(S_{1,1} \times \dots \times S_{1,r}, \dots, S_{n,1} \times \dots \times S_{n,r}).$$

Lorsque $\underline{V}_1 = \dots = \underline{V}_{d(u)} = \underline{V}$, on note simplement $\diamond_u(\underline{V})$ la variété $\diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)})$. Plus généralement, si L est un langage contenu dans P , on note $\diamond_L(\underline{V})$ la plus petite variété contenant les variétés $\diamond_u(\underline{V})$ avec $u \in L$.

Le théorème ci-dessous permet, par récurrence, de décrire les langages associés aux variétés $\diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)})$ pour tout arbre u .

THÉORÈME 3.1 : *Soit n un entier positif et $\underline{V}_0, \dots, \underline{V}_n$ des variétés de semi-groupes (monoïdes). On note respectivement \mathcal{V}_j et \mathcal{W} les variétés de langages correspondant à \underline{V}_j ($0 \leq j \leq n$) et à $\diamond_{(aa)^{n+1}}(\underline{V}_0, \dots, \underline{V}_n)$. Alors pour tout alphabet A , $A^+ \mathcal{W} (A^* \mathcal{W})$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_k L_{i_k}$, avec $0 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq n$, $a_1, \dots, a_k \in A$ et pour $0 \leq j \leq k$ $L_{i_j} \in A^+ \mathcal{V}_{i_j} (A^* \mathcal{V}_{i_j})$.*

Preuve : Si $L = L_{i_0} a_1 L_{i_1} \dots a_k L_{i_k}$, avec les conditions précisées par l'énoncé, L est reconnu par le semi-groupe $\diamond_{k+1}(S_{i_0}, \dots, S_{i_k})$ où, pour $0 \leq j \leq k$ S_{i_j} est le semi-groupe syntactique de L_{i_j} .

Or

$$\diamond_{k+1}(S_{i_0}, \dots, S_{i_k}) < \diamond_{n+1}(1, \dots, 1, S_{i_0}, 1, \dots, 1, S_{i_1}, \dots, S_{i_k}, 1, \dots, 1) = T$$

et T est dans $\diamond_{(aa)^{n+1}}(\underline{V}_0, \dots, \underline{V}_n)$ par définition.

Donc $L \in A^+ \mathcal{W}$ et $A^+ \mathcal{W}$ contient l'algèbre de Boole décrite dans l'énoncé.

Réciproquement soit $L \in A^+ \mathcal{W}$. Alors d'après une remarque faite plus haut, le semi-groupe syntactique de L divise un semi-groupe de la forme $S = \diamond_{n+1}(S_0, \dots, S_n)$ avec pour $0 \leq i \leq n$ $S_i \in \underline{V}_i$. On en déduit que S reconnaît L et il suffit d'appliquer le théorème 2.7 pour conclure. \square

Les propositions qui suivent, qui sont pour l'essentiel des reformulations de résultats déjà connus, me serviront d'exemples. Je commence par la hiérarchie de Simon [12]. Pour tout alphabet A , on note $A^* \mathcal{J}_n$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $A^* a_1 A^* a_2 \dots A^* a_k A^*$ avec $0 \leq k \leq n$ et $a_i \in A$ pour $1 \leq i \leq k$. On démontre que \mathcal{J}_n est une $*$ -variété et on note \underline{J}_n la variété de langages correspondante. La variété \mathcal{J} définie dans la section 1 est bien sûr la réunion des variétés \mathcal{J}_n .

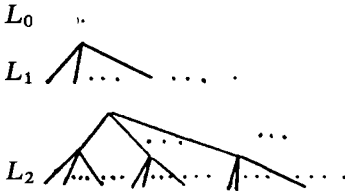
PROPOSITION 3.2 : (1) Si $u = a\bar{a}a\bar{a}$ (arbre \wedge), $\diamond_u(I) = \underline{J}_1$, la variété des monoïdes idempotents et commutatifs.

(2) Si $u = (a\bar{a})^{n+1}$ (arbre $\wedge \dots \wedge$ à $(n+1)$ feuilles), $\diamond_n(I) = \underline{J}_n$.

(3) Si $L = (a\bar{a})^*$, $\diamond_L(I) = \underline{J}$, la variété des monoïdes \mathcal{J} -triviaux.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du théorème 3.1. \square

La hiérarchie de Straubing \underline{V}_n peut se décrire de façon analogue. Soit L_n la suite de langages définie par $L_0 = \{1\}$ et $L_{n+1} = (aL_n\bar{a})^*$. Pour guider l'intuition on peut représenter ces langages par des arbres « infinis en largeur » :



PROPOSITION 3.3 : Pour tout $n \geq 0$ $\diamond_{L_n}(I) = \underline{V}_n$. En particulier :

$$\diamond_{L_0}(I) = \underline{I}, \quad \diamond_{L_1}(I) = \underline{J}, \quad \diamond_{L_2}(I) = \underline{PJ}.$$

Preuve : Là encore la proposition résulte immédiatement du théorème 3.1. \square

La hiérarchie de Brzozowski s'obtient en considérant des variétés de la forme $\diamond_L(\underline{Nil})$ où \underline{Nil} désigne la variété des semi-groupes nilpotents. De façon plus précise :

PROPOSITION 3.4 : Pour tout $n, k \geq 0$, on a :

(a) $\underline{B}_n = \diamond_{L_n}(\underline{Nil})$.

(b) $\underline{B}_{n+1, k} = \diamond_{(aL_n\bar{a})^{k+1}}(\underline{Nil})$.

Preuve : On a $\underline{B}_0 = \diamond_{L_1}(\underline{Nil})$ par définition. Par récurrence je suppose établie la formule $\underline{B}_n = \diamond_{L_n}(\underline{Nil})$. Alors pour tout $k \geq 0$, $A^+ \underline{\mathcal{B}}_{n+1, k}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 \dots L_r$ avec $r \leq k$ et $L_0, \dots, L_r \in A^+ \underline{\mathcal{B}}_n$. Soit $\underline{\mathcal{A}}_{n+1, k}$ la variété de langages correspondant à $\diamond_{(aL_n\bar{a})^k}(\underline{Nil})$. Le théorème 3.1 et l'hypothèse de récurrence montrent que pour tout alphabet A , $A^+ \underline{\mathcal{A}}_{n+1, k}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 a_1 L_1 \dots a_r L_r$ où $0 \leq r \leq k$, $L_0, \dots, L_r \in A^+ \underline{\mathcal{B}}_n$ et $a_1, \dots, a_r \in A$. Il suffit donc d'établir, pour tout $k \geq 0$, l'égalité $\underline{\mathcal{A}}_{n+1, k} = \underline{\mathcal{B}}_{n+1, k}$. L'inclusion $\underline{\mathcal{A}}_{n+1, k} \subset \underline{\mathcal{B}}_{n+1, k}$ résulte du fait ([4], p. 259) que si $L \in A^+ \underline{\mathcal{B}}_n$, alors

aL , $L a \in A^+ \mathcal{B}_n$ pour tout $a \in A$. Un produit de la forme $L_0 a_1 L_1 \dots a_r L_r$ avec $L_0, \dots, L_r \in A^+ \mathcal{B}_n$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ s'écrit donc sous la forme $L_0 (a_1 L_1) \dots (a_r L_r)$ avec $L_0, a_1 L_1, \dots, a_r L_r \in A^+ \mathcal{B}_n$. Pour démontrer l'inclusion opposée on montre par récurrence sur k que tout langage de la forme $L_0 \dots L_k$ avec $L_0, \dots, L_k \in A^+ \mathcal{B}_n$ est union de langages de la forme $K_0 a_1 K_1 \dots a_r K_r$ avec $0 \leq r \leq k$, $K_0, \dots, K_r \in A^+ \mathcal{B}_n$ et $a_0, \dots, a_r \in A$. C'est évident si $k=0$. Si $L = L_0 \dots L_{k+1}$, on observe que :

$$L_{k+1} = (A \cap L_{k+1}) \cup \bigcup_{a \in A} a(a^{-1} L_{k+1}),$$

d'où :

$$L = \bigcup_{a \in A \cap L_{k+1}} (L_0 \dots L_k) a \cup \bigcup_{a \in A} (L_0 \dots L_k) a (a^{-1} L_{k+1}).$$

Mais d'après l'hypothèse de récurrence $L_0 \dots L_k$ s'écrit comme union de langages de la forme $K_0 a_1 \dots a_r K_r$ avec $0 \leq r \leq k$, $a_1, \dots, a_r \in A$ et $K_0, \dots, K_r \in A^+ \mathcal{B}_n$. Or puisque \mathcal{B}_n est une variété de langages, on a $a^{-1} L_{k+1} \in A^+ \mathcal{B}_n$. D'autre part, d'après le résultat rappelé plus haut $K_r a \in A^+ \mathcal{B}_n$ pour tout $a \in A$. Ces deux observations permettent d'exprimer L comme union de langages de la forme $K_0 a_1 \dots a_p K_p$ (avec $0 \leq p \leq k+1$, $a_1, \dots, a_p \in A$ et $K_0, \dots, K_p \in A^+ \mathcal{B}_n$), ce qui conclut la récurrence. Donc $\mathcal{A}_{n+1,k} = \mathcal{B}_{n+1,k}$ pour tout k ce qui établit (b).

L'égalité $\underline{B}_{n+1} = \diamond_{L_{n+1}}(\underline{\text{Nil}})$ s'en déduit facilement puisque :

$$\underline{B}_{n+1} = \bigcup_{k \geq 0} \underline{B}_{n+1,k} \quad \text{et} \quad \diamond_{L_{n+1}}(\underline{\text{Nil}}) = \bigcup_{k \geq 0} \diamond_{(aL_n \bar{a})^k}(\underline{\text{Nil}}). \quad \square$$

D. Thérien (communication personnelle) a proposé de modifier la hiérarchie de Brzozowski en partant de la variété LI au lieu de Nil. On définit alors des +-variétés $\mathcal{B}'_{n,k}$ de la façon suivante : pour tout alphabet A :

(1) $A^+ \mathcal{B}'_0$ est constitué des langages de la forme $XA^*Y \cup Z$ où X, Y et Z sont des langages finis de A^+ .

(2) $A^+ \mathcal{B}'_{n+1,r}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme $L_0 a_1 L_1 \dots a_k L_k$ avec $0 \leq k \leq r$, $a_1, \dots, a_k \in A$ et $L_0, \dots, L_k \in A^+ \mathcal{B}'_n$.

(3) $A^+ \mathcal{B}'_{n+1} = \bigcup_{r \geq 0} A^+ \mathcal{B}'_{n+1,r}$.

On sait que \mathcal{B}'_0 est la variété de langages correspondant à LI. Par conséquent il résulte aisément du théorème 3.1 :

PROPOSITION 3.5 : *Pour tout $n, k \geq 0$, \mathcal{B}'_n et $\mathcal{B}'_{n+1,k}$ sont des variétés de langages. Les variétés de semi-groupes correspondantes sont respectivement $\underline{B}'_n = \diamond_{L_n}(\underline{\text{LI}})$ et $\underline{B}'_{n+1,k} = \diamond_{(aL_n \bar{a})^{k+1}}(\underline{\text{LI}})$.*

Le lien entre les variétés $\underline{B}_{n,k}$ et $\underline{B}'_{n,k}$ est précisé par l'énoncé suivant, dû à D. Thérien :

PROPOSITION 3.6 :

(1) Pour tout $k > 0$, $\underline{B}_{1,2k} = \underline{B}_{1,2k+1} = \underline{B}'_{1,k}$.

(2) Pour tout $n > 0$ et $k \geq 0$, $\underline{B}_{n+1,k} = \underline{B}'_{n+1,k}$ et $\underline{B}_n = \underline{B}'_n$.

Preuve : (1) Soit A un alphabet. D'après la définition de $A^+ \mathcal{B}'_{1,k}$ et l'expression des éléments de $A^+ \mathcal{B}'_0$, on voit que $A^+ \mathcal{B}'_{1,k}$ est l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme uA^* , A^*u et $u_0A^*u_1 \dots u_rA^*u_{r+1}$ où $0 \leq r \leq k$ et $u, u_0, \dots, u_{r+1} \in A^+$. Or on sait ([4], p. 258) que l'algèbre de Boole ainsi définie est $A^+ \mathcal{B}_{1,2k} = A^+ \mathcal{B}_{1,2k+1}$.

(2) On déduit de (1) la relation :

$$A^+ \mathcal{B}'_1 = \bigcup_{k>0} A^+ \mathcal{B}'_{1,k} = \bigcup_{k>0} A^+ \mathcal{B}_{1,k} = A^+ \mathcal{B}_1 \quad \text{d'où} \quad \underline{B}'_1 = \underline{B}_1.$$

Les autres relations s'en déduisent par récurrence. \square

Comme on le voit les hiérarchies $\underline{B}_{n,k}$ et $\underline{B}'_{n,k}$ ne diffèrent que pour $n=1$.

Cependant la hiérarchie \underline{B}'_n me paraît plus intéressante. Par exemple, comme me l'a fait remarquer D. Thérien, le théorème 1.5 peut s'écrire

$$\underline{B}'_n = \underline{V}_n * \underline{LI} \quad \text{pour tout } n \geq 0,$$

alors que le cas $n=0$ était curieusement éliminé dans la version donnée plus haut.

Le théorème qui suit donne une caractérisation algébrique intéressante des opérations schématisées par $\underline{V} \rightarrow \widehat{\underline{V} \underline{I}}$ et $\underline{V} \rightarrow \widehat{\underline{I} \underline{V}}$.

THÉORÈME 3.7 : Pour toute variété de monoïdes \underline{V} , on a :

(a) $\diamond_{\text{a}\bar{\text{a}}\bar{\text{a}}\bar{\text{a}}}(\underline{V}, \underline{I}) = \underline{J}_1 * \underline{V}$.

(b) $\diamond_{\text{a}\bar{\text{a}}\bar{\text{a}}\bar{\text{a}}}(\underline{I}, \underline{V}) = \underline{V} * \underline{J}_1$.

La démonstration repose sur le « principe du produit semi-direct », qui est une version simplifiée du « wreath-product principle » de Straubing (Ph. D. 1978), lequel est lui-même le premier énoncé complet d'un résultat utilisé antérieurement dans des cas particuliers, notamment par A. Meyer (1969) et Brzozowski-Simon (1973). Soit $\eta : A^* \rightarrow M * N$ un morphisme de A^* dans un produit semi-direct de monoïdes $M * N$ et soit $\pi : M * N \rightarrow N$ la projection canonique. On a alors en posant $B = N \times A$ et $\varphi = \pi\eta$.

PROPOSITION 3.8 (Principe du produit semi-direct) : Si L est reconnu par η , alors L est réunion de langages de la forme $X \cap Y \sigma^{-1}$ où $X \subset A^*$ est reconnu par N , $Y \subset B^*$ est reconnu par M et où $\sigma : A^* \rightarrow B^*$ est la fonction séquentielle définie par $1 \sigma = 1$ et $(a_1 \dots a_n) \sigma = (1, a_1)(a_1 \varphi, a_2) \dots ((a_1 \dots a_{n-1}) \varphi, a_n)$.

Preuve : Il suffit d'établir le résultat dans le cas où $L = (s_0, t_0) \eta^{-1}$ pour un certain $(s_0, t_0) \in M * N$. Selon l'usage, je noterai additivement le monoïde M et par juxtaposition l'action de N sur M .

Soit $\alpha : B = N \times A \rightarrow M$ défini par $(t, a) \alpha = ts$ où s est la première composante de a (c'est-à-dire $a \eta = (s, u)$ pour un certain $u \in T$). Soit $X = t_0 \varphi^{-1}$ et $Y = s_0 \alpha^{-1}$: X est donc reconnu par N et Y par M . Il vient $X \cap Y \sigma^{-1} = \{ a_1 \dots a_n \in A^* \mid (a_1 \dots a_n) \varphi = t_0 \text{ et } (a_1 \dots a_n) \sigma \alpha = s_0 \}$.

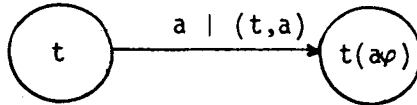
Or en posant $a_i = (s_i, t_i)$, on a successivement :

$$\begin{aligned} (a_1 \dots a_n) \sigma \alpha &= ((1, a_1)(a_1 \varphi, a_2) \dots ((a_1 \dots a_{n-1}) \varphi, a_n) \alpha \\ &= (1, a_1) \alpha + (a_1 \varphi, a_2) \alpha + \dots + ((a_1 \dots a_{n-1}) \varphi, a_n) \alpha \\ &= s_1 + t_1 s_2 + \dots + t_1 \dots t_{n-1} s_n \end{aligned}$$

et $(a_1 \dots a_n) \varphi = t_1 \dots t_n$.

On en déduit $((a_1 \dots a_n) \sigma \alpha, (a_1 \dots a_n) \varphi) = (a_1 \dots a_n)$, d'où finalement $X \cap Y \sigma^{-1} = (s_0, t_0) \eta^{-1}$, ce qui démontre la proposition. \square

REMARQUE : La fonction séquentielle σ est réalisée par le transducteur dont les états sont les éléments de N (1 étant l'état initial) et dont les transitions et la fonction de sortie sont représentés par le diagramme :



On déduit du principe du produit semi-direct l'énoncé suivant, qui est une version améliorée d'un exercice proposé par Eilenberg (p. 253).

PROPOSITION 3.9 : Soit \underline{V} une variété de monoïdes et soit \mathcal{V} la variété de langages correspondante. Soit $A^* \mathcal{V}$ l'algèbre de Boole engendrée par les langages de la forme L ou LaA^* avec $a \in A$ et $L \in A^* \mathcal{V}$. Alors $\overline{\mathcal{V}}$ est une variété de langages et la variété de monoïdes correspondante est $\underline{J}_1 * \underline{V}$.

Preuve : Tout d'abord, si $L \in A^* \mathcal{V}$, LaA^* est reconnu par $\diamond_2(M(L), 1)$. Or on sait que $\diamond_2(M_1, M_2) = M_2 *_{\varphi} (V * M_1)$ pour un certain monoïde $V \in \underline{J}_1$. On en déduit ici $\diamond_2(M(L), 1) \in \underline{J}_1 * \underline{V}$.


Réciproquement, soit $L \subset A^*$, un langage reconnu par un élément de $\underline{J}_1 * \underline{V}$. Il existe alors deux monoïdes $M \in \underline{J}_1$ et $N \in \underline{V}$ tels que L soit reconnu

par $M * N$. Avec les notations de la proposition précédente, il suffit d'établir que $Y \sigma^{-1}$ est élément de $A^* \overline{\mathcal{V}}$. Or puisque Y est reconnu par M , Y est combinaison booléenne de langages de la forme $B^* b B^*$ avec $b \in B$. Comme σ^{-1} commute aux opérations booléennes, il suffit d'établir que $(B^* b B^*) \sigma^{-1} \in A^* \overline{\mathcal{V}}$. Or si on pose $b = (t, a)$, il vient :

$$(B^* b B^*) \sigma^{-1} = \{ a_1 \dots a_n \in A^* \mid \exists i, 1 \leq i \leq n ((a_1 \dots a_{i-1}) \varphi, a_i) = (t, a) \} = (t \varphi^{-1}) a A^*.$$

Comme $t \varphi^{-1} \in A^* \overline{\mathcal{V}}$, on a $(B^* b B^*) \sigma^{-1} \in A^* \overline{\mathcal{V}}$ et donc finalement $L \in A^* \overline{\mathcal{V}}$. Il en résulte que $\overline{\mathcal{V}}$ est une variété de langages et que la variété de monoïdes correspondante est $\underline{J}_1 * \underline{V}$. \square

Preuve du théorème 3.7 : (a) découle directement de la proposition 3.8 et du théorème 3.1. L'énoncé (b) est dual.

COROLLAIRE 3.10 : (1) Si $u = a^n (\overline{aaa})^n$ (arbre  à $(n+1)$ feuilles) :

$$\diamond_u(I) = \underline{J}_1^n = \underline{J}_1 * \underline{J}_1 \dots * \underline{J}_1 \quad (n \text{ fois})$$

(2) Si $L = \{ a^n (\overline{aaa})^n \mid n \geq 0 \}$ $\diamond_L(I) = \underline{R}$, la variété des monoïdes \mathcal{R} -triviaux.

Preuve :

- (1) Par récurrence à l'aide des théorèmes 3.1 et 3.7.
- (2) Un résultat de théorie des semi-groupes affirme qu'un monoïde est \mathcal{R} -trivial ssi il divise un produit en couronne de la forme $U_1 \circ U_1 \dots \circ U_1$.

En termes de variétés cet énoncé se traduit par l'égalité :

$$\underline{R} = \bigcup_{n \geq 0} \underline{J}_1^n \quad \text{ce qui établit (2).} \quad \square$$

COROLLAIRE 3.11 : Soit \underline{V} une variété de monoïdes et $\overline{\mathcal{V}}$ la variété de langages correspondante. Soit, pour tout alphabet A , $A^* \overline{\mathcal{V}}$ la plus petite algèbre de Boole contenant $A^* \overline{\mathcal{V}}$ et fermée pour opérations $L \rightarrow L a A^*$ (resp. $L \rightarrow A^* a L$) où $a \in A$. Alors $\overline{\mathcal{V}}$ est une variété de langages et la variété de monoïdes correspondante est $\underline{R} * \underline{V}$ ($\underline{V} * \underline{R}$).

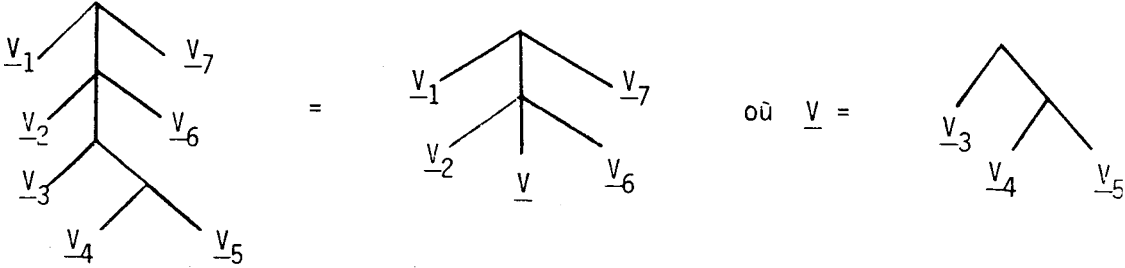
Preuve : L'énoncé résulte de la proposition 3.9 et de l'égalité $\underline{R} = \bigcup_{n \geq 0} \underline{J}_1^n$. \square

Il est intéressant de comparer entre elles les variétés $\diamond_u (V_1, \dots, V_{d(u)})$. Voici une première observation, qui est une conséquence immédiate des définitions.

PROPOSITION 3.12 : Soit u un arbre. Alors pour toute variété $V_1, \dots, V_{d(u)}$, on a :

$$\diamond_u (V_1, \dots, V_{d(u)}) = \diamond_{aa\bar{a}} (V_1, \dots, V_{d(u)}) = \diamond_{a\bar{a}} (\diamond_u (V_1, \dots, V_{d(u)}).$$

La suite repose sur un théorème de substitution qu'on peut illustrer par le schéma suivant :



THÉORÈME 3.13 (théorème de substitution) : Soit $u = u_1 a u_2 \bar{a} u_3$ un arbre avec $u_2 \in P$. Alors pour toute variété $V_1, \dots, V_{d(u)}$, on a :

$$\begin{aligned} &\diamond_u (V_1, \dots, V_{d(u)}) \\ &= \diamond_{u_1 a \bar{a} u_3} (V_1, \dots, V_{d(u_1)}, \diamond_{u_2} (V_{d(u_1)+1}, \dots, V_{d(u_1)+d(u_2)}), V_{d(u_1)+d(u_2)+1}, \dots, V_{d(u)}). \end{aligned}$$

Preuve : Par récurrence sur $|u|$. Si $u = a\bar{a}$, la relation cherchée s'écrit $\diamond_{a\bar{a}}(V) = \diamond_{a\bar{a}}(\diamond_1(V))$ et résulte de l'égalité $V = \diamond_1(V)$. Dans le cas général, on factorise u en $u = (av_1\bar{a}) \dots (av_n\bar{a})$ avec $v_1, \dots, v_n \in P$.

1^{er} cas : $n = 1$: Si $u_1 u_3 = 1$, il vient $u_2 = v_1$ et d'après la proposition 3.12, on a $\diamond_u (V_1, \dots, V_{d(u)}) = \diamond_{a\bar{a}}(\diamond_{u_2} (V_1, \dots, V_{d(u)})$. Sinon on a nécessairement $u_1 = au'_1$, $u_3 = u'_3 \bar{a}$ d'où $v_1 = u'_1 a u_2 \bar{a} u'_3$. La relation cherchée s'obtient en utilisant à la fois la proposition 3.12 et l'hypothèse de récurrence appliquée à v_1 .

2^e cas : $n \geq 2$: Alors l'un des arbres $av_i \bar{a}$ ($1 \leq i \leq n$) admet $au_2 \bar{a}$ comme facteur. On pose $av_i \bar{a} = u' a u_2 \bar{a} u''$ et on applique l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} &\diamond_{av_i \bar{a}} (V_1, \dots, V_{d(v_i)}) = \diamond_{v_i} (V_1, \dots, V_{d(v_i)}) \\ &= \diamond_{u' a \bar{a} u''} (V_1, \dots, V_{d(u')}, \diamond_{u_2} (V_{d(u')+1}, \dots, V_{d(u')+d(u_2)}), \dots, V_{d(v_i)}). \end{aligned}$$

La relation cherchée s'en déduit puisque :



$$\diamond_u(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(u)}) = \diamond_{(a\bar{a})^n}(\diamond_{v_1}(\underline{V}_1, \dots, \underline{V}_{d(v_1)}), \dots, \diamond_{v_n}(\underline{V}_{d(v_1 \dots v_{n-1})+1}, \dots, \underline{V}_{d(u)})).$$

On en déduit à l'aide de la proposition 3.12 :

COROLLAIRE 3.14 : Soit $u = u_1 a a u_2 \bar{a} \bar{a} u_3$ un arbre avec $u_2 \in P$. Alors pour toute variété \underline{V} , $\diamond_u(\underline{V}) = \diamond_{u_1 a u_2 \bar{a} u_3}(\underline{V})$.

Soient u et v deux arbres. On dit que u est un arbre *extrait* de v si u s'obtient à partir de v en supprimant dans v un certain nombre d'occurrences liées de a et \bar{a} . De façon formelle la relation « est extrait de » est la fermeture réflexive et transitive de la relation \leq définie par $u \leq v$ ssi il existe une factorisation $v = v_1 a v_2 \bar{a} v_3$ telle que $v_2 \in P$ et $u = v_1 v_2 v_3$.

Par extension on notera également \leq la relation « est extrait de ». Il est clair que \leq est une relation d'ordre.

Exemple : L'arbre $u = a\bar{a}a\bar{a}a\bar{a}$ () est extrait de $v = a\bar{a}a\bar{a}a\bar{a}$ () puisque $v = (1) a (a\bar{a}a) \bar{a} (a\bar{a})$.

THÉORÈME 3.15 : Pour toute variété \underline{V} , si u est un arbre extrait de l'arbre v , on a $\diamond_u(\underline{V}) \subset \diamond_v(\underline{V})$.

Preuve : D'après la définition de \leq , on peut se ramener au cas où $v = v_1 a v_2 \bar{a} v_3$ avec $v_2 \in P$ et $u = v_1 v_2 v_3$. La preuve se fait par récurrence sur $|v|$. Si $v = a\bar{a}$, $u = 1$ et le résultat est évident. Si $d(v) = 1$, on a $v = av' \bar{a}$ avec $v' \in P$ d'où $\diamond_v(\underline{V}) = \diamond_{v'}(\underline{V})$ d'après (2). Si $v_1 v_3 = 1$, il vient $v_2 = v' = u$ et le résultat est établi. Sinon, on a nécessairement $v_1 = av'_1$ et $v_3 = v'_3 \bar{a}$ d'où $v' = v'_1 a v_2 \bar{a} v'_3$. On en déduit en appliquant l'hypothèse de récurrence à v' :

$$\diamond_v(\underline{V}) = \diamond_{v'}(\underline{V}) \supset \diamond_{v'_1 v_2 v'_3}(\underline{V}) = \diamond_{av'_1 v_2 v'_3 a}(\underline{V}) = \diamond_u(\underline{V}).$$

Si $d(v) \geq 2$, v se factorise en $v = (aw_1 \bar{a}) \dots (aw_n \bar{a})$ avec $n \geq 2$, $w_1, \dots, w_n \in P$ et où l'un des arbres $aw_k \bar{a}$ admet $av_2 \bar{a}$ comme facteur. On pose $aw_k \bar{a} = v' av_2 \bar{a} v''$ et $w'_k = a^{-1}(v' v_2 v'') \bar{a}^{-1}$. On obtient alors en appliquant l'hypothèse de récurrence $\diamond_{w_k}(\underline{V}) \supset \diamond_{w'_k}(\underline{V})$:

$$\begin{aligned} \diamond_v(\underline{V}) &= \diamond_{(a\bar{a})^n}(\diamond_{w_1}(\underline{V}), \dots, \diamond_{w_n}(\underline{V})) \\ &\supset \diamond_{(a\bar{a})^n}(\diamond_{w_1}(\underline{V}), \dots, \diamond_{w'_k}(\underline{V}), \dots, \diamond_{w_n}(\underline{V})) = \diamond_u(\underline{V}). \end{aligned}$$

Le corollaire 3.14 montre qu'on peut se restreindre à l'ensemble P' des arbres dont chaque nœud est d'arité différente de 1. Bien entendu, si on part d'une variété \underline{V} quelconque la restriction à P' de l'application $u \rightarrow \diamond_u(\underline{V})$ n'a

cependant aucune raison d'être injective. Par exemple si $V = \underline{A}$, la variété des semi-groupes apériodiques, on a $\hat{\varphi}(V) = \underline{V}$ pour tout u . En revanche on peut avancer la conjecture suivante.

CONJECTURE : Soient $u, v \in P'$. Alors $\diamond_u(I)$ est contenu dans $\diamond_v(I)$ si et seulement si u est extrait de v .

Si cette conjecture est vraie, la restriction à P' de l'application

$$u \rightarrow \diamond_u(I)$$

est injective. L'étude de l'application $L \rightarrow \diamond_L(I)$ paraît encore plus problématique. Il est en effet prouvé en [10] que

$$\diamond_{(aa)} * (J) = \diamond_{(aa)} * (J_1) = \diamond_{(aa)} * (R)$$


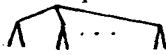
d'où l'on déduit

$$\diamond_{(a(aa) * \bar{a})} (I) = \diamond_{(aaa\bar{a}\bar{a})} * (I) = \diamond_{(aL\bar{a})} * (I)$$

où L est le langage $\{a^n(\bar{a}\bar{a}\bar{a})^n \mid n \geq 0\}$.

Je voudrais signaler une petite subtilité relative à cette dernière égalité. On en déduit en particulier :

$$\underline{J}_1^3 = \diamond_{a^3(\bar{a}\bar{a}\bar{a})^3} (I) \subset \bigcup_{n>0} \diamond_{(aaa\bar{a}\bar{a})^n} (I).$$

Or il est facile de vérifier que l'arbre $a^3(\bar{a}\bar{a}\bar{a})^3$ () n'est extrait d'aucun des arbres $(aaa\bar{a}\bar{a})^n$ (, ...).

Cependant la relation ci-dessus ne contredit pas la conjecture car on ne peut pas en déduire *a priori* une inclusion du type :

$$\diamond_{a^3(\bar{a}\bar{a}\bar{a})^3} (I) \subset \diamond_{(aaa\bar{a}\bar{a})^n} (I).$$

4. PROBLÈMES DE DÉCIDABILITÉ

On dit qu'une variété de semi-groupes (ou de monoïdes) V est *décidable* s'il existe un algorithme qui permet de tester si un semi-groupe fini donné est ou n'est pas dans V .

Pour les variétés V_n et B_n des hiérarchies de Straubing et de Brzozowski, le problème de la décidabilité est toujours ouvert puisque seul le cas $n=1$ a pu

être résolu positivement (cf. les théorèmes de Simon et de Knast rappelés dans la section 1). Le résultat qui suit constitue peut-être une première étape vers la solution générale du problème.

THÉORÈME 4.1 : *Pour tout arbre u la variété $\diamond_u(I)$ est décidable.*

Le théorème repose sur une propriété de $\diamond_u(I)$ intéressante pour elle-même.

PROPOSITION 4.2 : *Soit u un arbre et soit \mathcal{V}_u la variété de langages associée à $\diamond_u(I)$. Pour tout alphabet A , $A^* \mathcal{V}_u$ est un ensemble fini effectivement descriptible.*

Preuve : Le résultat est évident si $u=1$. Si $u=au_1\bar{a}au_2\bar{a}\dots au_n\bar{a}$ avec $u_1, \dots, u_n \in P$, on a $\diamond_u(V) = \diamond_{(a\bar{a})^n}(\diamond_{u_1}(V), \dots, \diamond_{u_n}(V))$. Par récurrence les ensembles $A^* \mathcal{V}_{u_1}, \dots, A^* \mathcal{V}_{u_n}$ sont des ensembles finis effectivement descriptibles. Le théorème 3.1 donne alors un algorithme pour construire $A^* \mathcal{V}_u$, qui est un ensemble fini puisque c'est l'algèbre de Boole engendrée par un nombre fini de langages. \square

Preuve du théorème 4.1 : Soit M un monoïde fini et A un alphabet en bijection avec M . Il existe alors un morphisme subjectif naturel $\pi : A^* \rightarrow M$. D'après [4], p. 188, on a pour tout $m \in M$ la double inégalité :

$$M(m\pi^{-1}) < M < \prod_{m \in M} M(m\pi^{-1}).$$

On en déduit que M est dans la variété $\diamond_u(I)$ si et seulement si, pour tout $m \in M$, le langage $m\pi^{-1}$ est dans $A^* \mathcal{V}_u$. La proposition 4.2 fournit donc un algorithme pour tester si $M \in \diamond_u(I)$.

On en déduit en particulier à l'aide du corollaire 3.10, un résultat de pure théorie des semi-groupes.

COROLLAIRE 4.3 : *Pour tout entier n , la variété $\underline{J}_1^n = \underline{J}_1 * \dots * \underline{J}_1$ (n fois) est décidable.*

BIBLIOGRAPHIE

1. J. A. BRZOWSKI, *Hierarchies of Aperiodic Languages*, R.A.I.R.O., Informatique Théorique, vol. 10, 1976, p. 33-49.
2. J. A. BRZOWSKI et R. KNAST, *The Dot-Depth Hierarchy of Star-Free Languages is Infinite*, J. Computer and System Sciences, vol. 16, 1978, p. 37-55.
3. J. A. BRZOWSKI et I. SIMON, *Characterizations of Locally Testable Events*, Discrete Mathematics, vol. 4, 1973, p. 243-271.

4. S. EILENBERG, *Automata, Languages and Machines*, vol. B, Academic Press, New York, 1976.
5. R. KNAST, *Some Theorems on Graph Congruences*, R.A.I.R.O., Informatique Théorique, vol. 17, n° 4, 1983, p. 331-342.
6. R. KNAST, *A Semigroup Characterization of Dot-Depth One Languages*, R.A.I.R.O., Informatique Théorique, vol. 17, n° 4, 1983, p. 321-330.
7. G. LALLEMENT, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Wiley, New York, 1979.
8. J. E. PIN, *Variétés de langages et variétés de semi-groupes*, Thèse, Paris, 1981.
9. J. E. PIN et J. SAKAROVITCH, *Une application de la représentation matricielle des transductions* (à paraître).
10. J. E. PIN et H. STRAUBING, *Monoids of Upper-Triangular Matrices* (à paraître).
11. C. REUTENAUER, *Sur les variétés de langages et de monoïdes*, Lect. Notes in Computer Science, n° 67, Springer Verlag, Berlin, 1979, p. 260-265.
12. I. SIMON, *Hierarchies of Events with Dot-Depth One*, Thèse, Université de Waterloo, 1972.
13. I. SIMON, *Piecewise Testable Events*, Lect. Notes in Computer Science, n° 33, Springer Verlag, Berlin, 1975, p. 214-222.
14. H. STRAUBING, *A Generalization of the Schützenberger Product of Finite Monoids*, Theor. Comp. Sc., vol. 13, 1981, p. 137-150.
15. H. STRAUBING, *Finite Semigroup Varieties of the Form $\underline{V} * \underline{D}$* (à paraître).