RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

PATRICK SALLÉ

Une généralisation de la théorie des types en λ-calcul (II)

RAIRO. Informatique théorique, tome 14, nº 3 (1980), p. 301-314

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1980__14_3_301_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 14, n° 3, 1980, p. 301 à 314)

UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES TYPES EN λ-CALCUL (II) (*)

par Patrick SALLÉ [1]

Communiqué par J.-F. PERROT

Avertissement. — *Nous donnons ici la seconde partie de l'article « Une généralisation de la théorie des types en λ-calcul » dont la première partie a paru dans cette même revue, dans le numéro précédant celui-ci. Les références bibliographiques renvoient à la liste de la première partie.*

Résumé. — *Nous décrivons une généralisation de la théorie des types de Curry qui étend l'affectation de type à l'ensemble du λ-calcul. Dans cette théorie deux expressions β-η convertibles ont le même ensemble de types et une expression typée possède suivant la valeur de son type une forme normale ou une forme normale gauche (2^e partie).*

Abstract. — *We describe a generalization of Curry's type theory which extends type assignment to the whole λ-calculus. In our theory, two expressions that are β-η-convertible have the same set of types and a typed expression has a normal form or a head normal form according to the value of its type.*

9. EXTENSION DE LA THÉORIE DES TYPES

Nous présentons l'ensemble des types T' et sa structure puis les modifications apportées aux règles d'affectations.

9.1. Ensemble des types

Il est défini à partir des types de base et des opérations de composition et de construction de séquences.

DÉFINITION 12 : T' est le plus petit ensemble défini par :

– $0, 1, \omega$ appartiennent à T';

– si $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \tau \in T'$ alors $[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\tau \in T'$.

$[\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$ est appelée une séquence et possède les propriétés d'un ensemble mathématique *id est* l'indépendance par rapport à l'ordre d'écriture de ses éléments et au nombre de représentants d'un même élément.

(*) Reçu juin 1978, révisé octobre 1979.

[1] Laboratoire Langages et Systèmes Informatiques, Université Paul-Sabatier, 31077 Toulouse Cedex.

Exemple 14 : $[\omega][0, 1, 0]0$ et $[\omega][1, 0]0$ sont deux écritures du même type.

Nous introduisons les trois axiomes d'équivalence :

A'_0 : $[1]0=0$;

A'_1 : $[0]1=1$;

A'_ω : $[\bar{\tau}]\omega=\omega$ où $\bar{\tau}$ est une abréviation pour $\tau_1, \ldots, \tau_n$.

La justification sémantique de ces axiomes est la même que celle de A_0, A_1, A_ω. De même les propriétés (P1), (P2), la définition de la longueur d'un type $\| \quad \|$ et la propriété (P4) restent valables. (P3) devient (P'3) $\forall \tau \in T'$, $\forall n$, $\exists \bar{\tau}_1, \ldots, \bar{\tau}_{n-1}$ séquences et $\tau_n \in T'$ tels que

$$\tau=[\bar{\tau}_1] \, . \, \ldots \, . \, [\bar{\tau}_{n-1}]\tau_n.$$

Nous définissons des ordres partiels $\sqsubseteq$ et $\subseteqq$ entre types et séquences par :

– $\omega \sqsubseteq 0 \sqsubseteq 1$;

– $[\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subseteqq [\tau_1, \ldots, \tau_m]$ si et seulement si

$$\forall i (1 \leqq i \leqq n), \quad \exists j (1 \leqq j \leqq m) \qquad \text{tel que} \quad \sigma_i \sqsubseteq \tau_j;$$

– $[\tau_1, \ldots, \tau_m]\tau_{m+1} \sqsubseteq [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]\sigma_{n+1}$ si et seulement si

$$\tau_{m+1} \sqsubseteq \sigma_{n+1} \qquad \text{et} \qquad [\sigma_1, \ldots, \sigma_n] \subseteqq [\tau_1, \ldots, \tau_m].$$

On montre que les propriétés (P5) à (P8) sur la décidabilité des relations et la structure de treillis de l'ensemble des types restent vraies.

9.2. Règles d'affectation

Une base $\mathscr{B}$ est un ensemble d'affectations de la forme $\sigma\, x$ où x est une variable et σ est un type $\sqsubseteq 1$. Plusieurs types peuvent être affectés à la même variable. Si $\bar{\sigma}=\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ alors $\bar{\sigma}\, x$ est une abréviation pour $\sigma_1 x$, $\sigma_2 x, \ldots, \sigma_n x$. Le système d'affectation se déduit du système décrit au paragraphe 3 de la manière suivante :

– l'axiome A_p et les règles R_e et R_i sont inchangées;

– les règles R_c et R_a sont remplacées par :

Règle R'_c : Si $\mathscr{B} \vdash [\bar{\sigma}]\tau X$ où $\bar{\sigma}=\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ et si

$$\forall i (1 \leqq i \leqq n), \quad \mathscr{B} \vdash \sigma_i Y \text{ alors } \mathscr{B} \vdash \tau(XY).$$

Règle R'_a : Si $\mathscr{B}, \bar{\sigma}\, x \vdash \tau X$ et si x n'apparaît pas dans $\mathscr{B}$ alors $\mathscr{B} \vdash [\bar{\sigma}]\tau(\lambda x . X)$.

Nous introduisons également la notion de base étendue et les remarques du paragraphe 3 restent valables quant à leur signification.

Exemple 15 : L'expression $(\lambda x.((xK)a(\Delta\Delta))(x(KI)(\Delta\Delta)a))I$ de l'exemple 11 qui n'avait pas de type a un type $\sqsupseteq 0$ dans la théorie étendue dont nous donnons une déduction en annexe.

9.3. Propriétés de l'affectation

Nous montrons ici l'invariance de l'ensemble des types d'une λ-expression par α-β-η conversion. Cette propriété est vraie quelle que soit la base par rapport à laquelle les types sont définis. Auparavant nous énonçons un théorème qui montre que les sous expressions d'une expression typée ont également un type.

PROPOSITION 9 : *Soit F une λ-expression différente d'une simple variable et telle que $\mathscr{B} \vdash \tau F$ alors :*

– *si $F = XY$ alors il existe une séquence $\bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, telle que*

$$\mathscr{B} \vdash [\bar{\sigma}]\tau X \quad et \quad \mathscr{B} \vdash \sigma_i Y, \qquad \forall i, i=1, n;$$

– *si $F = \lambda x.Y$ alors $\tau = [\bar{\sigma}]\rho$ et $\mathscr{B}, \bar{\sigma} x \vdash \rho Y$ où x n'apparaît pas dans $\mathscr{B}$.*

La preuve de cette proposition s'obtient facilement à partir de celle de la proposition 1.

LEMME 10 : *Si R est un β-radical qui se réduit en R' alors*

$$\mathscr{B} \vdash \tau R \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{B} \vdash \tau R'.$$

Condition suffisante :

$R \equiv (\lambda x.X)Y$ et d'après la proposition 9 $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ telle que $\mathscr{B} \vdash [\bar{\sigma}]\tau\lambda x.X$, $\mathscr{B} \vdash \sigma_i Y$, $\forall i=1, n$ et x n'apparaît pas dans $\mathscr{B}$. D'après la proposition 9 également on peut écrire que $\mathscr{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$. Or $R' \equiv [Y/x]X$ et pour montrer que $\mathscr{B} \vdash \tau [Y/x]X$ il suffit de remplacer dans la preuve de $\mathscr{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash \tau X$ les occurrences de $\sigma_i x$ (qui ne sont pas dans $\mathscr{B}$) par les déductions de $\mathscr{B} \vdash \sigma_i Y$ quel que soit i, $1 \leqq i \leqq n$.

Condition suffisante :

$R \equiv (\lambda x.X)Y$ et deux cas se produisent suivant que x a au moins une occurrence dans X ou non.

– Si oui Y est un sous terme propre de R'. Si Y apparaît n fois dans R' dans la déduction de $\mathscr{B} \vdash \tau R'$ chaque occurrence de Y fait l'objet d'une déduction $\mathscr{B} \vdash \sigma_i Y$ avec $1 \leqq i \leqq n$. En posant $\bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ pour obtenir $\mathscr{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$ il suffit de remplacer les déductions de $\mathscr{B} \vdash \sigma_i Y$ par les affectations $\sigma_i x$. Par la règle R'_c on obtient $\mathscr{B} \vdash \tau(\lambda x.X)Y$.

– Si Y ne figure pas comme sous terme propre de R' c'est que $(\lambda x.X)Y \triangleright X = R'$ c'est-à-dire que x ne figure pas comme variable libre dans X. Comme $\mathcal{B} \vdash \tau X$ on peut aussi écrire $\mathcal{B}$, $\sigma x \vdash \tau X$ quel que soit σ. On en déduit que $\mathcal{B} \vdash [\omega]\tau(\lambda x.X)$ et que $\mathcal{B} \vdash \tau(\lambda x.X) Y$.

PROPOSITION 10 : *Si X et X' sont deux expressions* β*-convertibles elles ont le même ensemble de types.*

La preuve s'obtient en itérant l'application du lemme 10.

THÉORÈME 4 : *Si X et X' sont deux expressions* α-β-η *convertibles alors elles ont le même ensemble de types.*

Il suffit en fait de montrer que si R est un η-radical et R' son radical réduit $(R \underset{\eta}{\triangleright} R')$ alors $\mathcal{B} \vdash \tau R \Leftrightarrow \mathcal{B} \vdash \tau R'$.

Condition nécessaire :

$R \equiv \lambda x.(M x)$ et x n'apparaît pas dans M. Par la proposition 9 $\tau = [\bar{\sigma}]\rho$ et $\mathcal{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash \rho(M x)$. Une deuxième application de cette proposition permet d'écrire qu'il existe $\bar{\sigma}'$ telle que $\mathcal{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash [\bar{\sigma}']\rho M$ et $\mathcal{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash \bar{\sigma}' x$. On en déduit que $\bar{\sigma}' \subseteqq \bar{\sigma}$. Comme x n'apparaît pas dans M, $\bar{\sigma} x$ est inutile dans la déduction de $[\bar{\sigma}']\rho M$ d'où $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}']\rho M$ et par la règle R_i $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}]\rho M$ puisque $[\bar{\sigma}]\rho \sqsubseteq [\bar{\sigma}']\rho$.

Condition suffisante :

$R' \equiv M$ et x n'est pas variable libre de M. On a $\mathcal{B} \vdash \tau M$ et l'on peut écrire $\mathcal{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash \tau M$, $\forall \bar{\sigma}$. Or τ peut se mettre sous la forme $\tau = [\bar{\sigma}]\rho$. On en déduit d'après R'_c que $\mathcal{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash \rho M x$ et par R'_a que $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}]\rho(\lambda x.(M x))$.

Nous montrons également en Annexe II que la suppression des règles R_i et R_e du système de déduction permet également de déduire des ensembles de types qui se conservent par α-β-η conversion. Ce résultat permet de montrer par un autre argument dans [17] que la théorie ainsi obtenue est équivalente à celle présentée dans cet article.

9.4. Propriétés des λ-expressions typées

Nous montrons tout d'abord que toute expression ayant un type distinct de ω a une forme normale gauche. Auparavant nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION 11 : Nous appellerons nombre de séquences d'un type τ, notée $|||\tau|||$, le nombre de séquences de ce type comportant plus d'un élément.

Remarque : Étant données les propriétés des séquences on peut toujours pour une expression donnée se limiter sans nuire à la généralité à l'ensemble des types de cette expression tel que, si x apparaît exactement n fois dans l'expression son type est une séquence de n éléments. En effet s'il y a plus de n éléments certains ne sont pas utilisés dans la déduction du type, s'il y a moins de n éléments on peut dupliquer les éléments qui sont utilisés plusieurs fois.

LEMME 11 : *Si F et X sont deux formes normales gauches qui vérifient la condition* (1) *et si dans une base $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} \vdash \tau FX$, $\tau \neq \omega$ alors FX possède une forme normale gauche.*

Par la proposition 9 $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ telle que $\mathscr{E} \vdash [\bar{\sigma}] \tau F$ et $\mathscr{E} \vdash \sigma_i X$, $\forall i$, $i = 1, n$.

Si $F \equiv z G_1 \ldots . G_p$ alors F est une forme normale gauche vérifiant (1) ainsi que FX. Sinon $F \equiv \lambda x . F'$ et la preuve du lemme se fait par récurrence sur r le nombre maximal de séquences présentes dans le type d'une sous-expression quelconque de F et de X.

Première étape : $r = 0$, le type de FX a été calculé sans séquences, il s'agit donc d'un type au sens de la théorie non étendue et par le théorème 2 FX a une forme normale gauche vérifiant (1).

Deuxième étape : Supposons le résultat vrai pour tout r, $r \leqq n$ et montrons qu'il est vrai pour $r = n$. Deux cas seront envisagés suivant le nombre m d'éléments de $\bar{\sigma}$.

Cas 1 : $m > 1$.

$\bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ et il y a m occurrences de la variable x dans F'.

Remplaçons chaque occurrence de x par un x_i distinct avec $1 \leqq i \leqq m$ et soit F_0 l'expression ainsi obtenue à partir de F'. Les deux expressions $(\lambda x . F') X$ et $(\lambda x_1 \ldots x_m . F_0) X \ldots X$ se réduisent à la même expression. On prouve successivement que $(\lambda x_i \ldots \lambda x_m . F_{i-1}) X$ se réduit en $\lambda x_{i+1} \ldots \lambda x_m . F_i$ où F_i est une forme normale gauche vérifiant (1) quel que soit i. En effet $\mathscr{E} \vdash [\sigma_i][\sigma_{i+1}] \ldots [\sigma_m] \tau \lambda x_i \ldots \lambda x_m . F_{i-1}$, $\mathscr{E} \vdash \sigma_i X$, $||| [\sigma_i] \ldots [\sigma_m] \tau ||| < n$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

Cas 2 : $m = 1$, $\bar{\sigma} = \sigma$ et deux cas se présentent suivant que :

– il n'existe pas d'occurrence de x dans F'.

$(\lambda x . F') X \triangleright F'$ de type $\tau \neq \omega$ qui est en forme normale gauche de par la condition (1);

– il existe exactement une occurrence de x dans F' et soit $F' \equiv \lambda y_1 \ldots \lambda y_p . z G_1 \ldots G_q$. Nous considérerons les deux cas suivants.

a) $z \equiv x$. Il suffit de prouver que $X G_1 \ldots G_q$ a une forme normale gauche vérifiant (1). Or X est de type $\sigma = [\bar{\nu}_1] \ldots [\bar{\nu}_q] \Psi$ et $\mathscr{E} \vdash \nu_{ij} G_i$, $\forall_i$, $1 \leqq i \leqq q$ et $\forall j$ tel que $\nu_{ij} \in \bar{\nu}_i$. Comme $||| \sigma ||| \leqq n$ on fait une récurrence sur $|| \sigma ||$.

Première étape : $|| \sigma || = 1$, σ est un type atomique qui ne peut être que 0 ou 1. Dans ce cas X, G_1, ..., G_q sont des formes normales gauches ayant également le type 0 ou 1. Il en est de même de toutes leurs sous-expressions et aucune séquence n'est présente dans le type d'aucune sous-expression. D'après le théorème 2 FX a une forme normale gauche qui vérifie (1).

Deuxième étape : Supposons la propriété $\forall \rho$ telle que $\|\rho\| < \|\sigma\|$ et considérons XG_1. Si $\bar{\nu}_1$ est réellement une séquence on est replacé dans les conditions initiales du lemme dans le cas 1 avec $|||\sigma||| \leqq n$. Dans ce cas il a été prouvé que XG_1 a une forme normale qui vérifie (1). Si $\bar{\nu}_1$ n'est pas une séquence alors $\bar{\nu}_1 = \nu_{11}$ et $\|\nu_{11}\| < \|\sigma\|$. Par hypothèse de récurrence XG_1 a une forme normale gauche qui vérifie (1). En recommençant q fois ce raisonnement on montre que : $XG_1 \ldots G_q$ a une forme normale gauche qui vérifie (1).

b) $z \not\equiv x$. Dans ce cas $(\lambda x . F')X$ se réduit à la forme normale gauche $\lambda y_1 \ldots y_p . z G'_1 \ldots G'_q$ où $G'_i = [X/x] G_i$. Or il n'existe qu'une occurrence de x dans F et donc il existe j, $1 \leqq j \leqq q$ tel que $G'_j \not\equiv G_j$ et que $G'_i \equiv G_i$, $\forall_i \neq j$ qui sont des expressions vérifiant (1). Les seules sous-expressions de G'_j qui nous intéressent sont celles qui possèdent un type distinct de ω et qui d'après (1) sont en forme normale gauche. D'autre part seule celle qui contient la variable x si elle existe a été modifiée par la réduction. Elle est alors de la forme $\lambda z_1 \ldots \lambda z_s . XH_1 \ldots H_t$ où X est de type σ. Par une démonstration semblable à celle du cas *a*) on montre que cette expression a une forme normale gauche qui vérifie (1) ainsi donc que toutes les sous-expressions de G'_j ayant un type différent de ω.

LEMME 12 : *Toute forme normale gauche a un type distinct de ω dans une base étandue $\mathscr{E}$.*

Si $F \equiv \lambda x_1 \ldots \lambda x_n . z G_1 \ldots G_m$ *il suffit d'affecter à z un type* $\underbrace{[\omega] \ldots\ldots [\omega]}_{m \text{ fois}} \tau$, $\tau \neq \omega$.

THÉORÈME 5 : *Si X est une expression quelconque et si $\mathscr{E} \vdash \tau X$ pour une base étendue $\mathscr{E}$ et un type τ distinct de ω alors X se réduit à une forme normale gauche qui vérifie la condition* (1).

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 2.

Nous montrons également que toute expression ayant le type 0 a une forme normale. Auparavant nous montrons le lemme suivant.

LEMME 13 : *Si N et X sont deux expressions vérifiant les conditions* (1) *et* (2) *et si $\mathscr{B} \vdash \tau(NX)$ avec $\tau \sqsupseteq 0$ alors NX a une forme normale.*

D'après la proposition 9 si $\mathscr{B} \vdash \tau(NX)$ alors $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \ldots, \sigma_n$ telle que $\mathscr{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau N$ et $\mathscr{B} \vdash \sigma_i X$, $\forall i$, $i = 1, n$. Deux cas se présentent :

— N n'a pas d'abstractions initiales. $NX \equiv z N_1 \ldots N_m X$ et z variable libre a un type $\Psi \sqsubseteq 1$ dans $\mathscr{B}$. On en déduit que $N_1, \ldots, N_m$, X ont un type $\sqsupseteq 0$ et d'après (2) elles sont en forme normale ainsi que NX;

– $N \equiv \lambda x . N'$. Nous ferons une récurrence sur r le nombre maximal de séquences présentes dans le type de l'une quelconque des sous-expressions de N et de X.

Première étape : $r=0$. Le type de NX a été calculé sans séquences et d'après la proposition 7 NX a une forme normale.

Deuxième étape : Supposons le résultat vrai quel que soit $r<n$ et montrons le pour $r=n$.

On distinguera deux cas suivant le nombre d'éléments p de la séquence $\bar{\sigma}$.

Cas 1 : $p>1$.

Il y a p occurrences de la variable x dans N' qui ont chacune un type σ_i. Remplaçons chacune de ces occurrences par un x_i distinct avec $1 \leqq i \leqq p$ et x_i correspond à l'occurrence qui a le type σ_i. Soit N_0 l'expression ainsi obtenue à partir de N', $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_p . N_0) X \ldots . . X$ et $(\lambda x . N') X$ se réduisent à la même expression. Or $\mathscr{E} \vdash [\sigma_1] \ldots [\sigma_p] \tau (\lambda x_1 \ldots \lambda x_p . N_0) X \ldots X$ et $\mathscr{E} \vdash \sigma_1 X$. Comme $|||[\sigma_p] \ldots [\sigma_p] \tau ||| < n$, par hypothèse de récurrence $(\lambda x_1 \ldots \lambda x_p . N_0) X$ se réduit en $\lambda x_2 \ldots . . \lambda x_p . N_1$ de type $[\sigma_2] \ldots [\sigma_p] \tau$ qui vérifie (1) d'après le théorème 1. D'autre part la variable x_1 existe en une seule occurrence et est variable de tête d'une sous-expression $H \equiv x_1 G_1 \ldots G_q$. Toutes les autres sous-expressions vérifient (2) et il existe une déduction de $\mathscr{B}' \vdash \Psi H$ avec $\sigma = [\nu_1] \ldots [\nu_q] \Psi$ et $\mathscr{B}' \supseteqq \mathscr{B}$. Comme $||| \Psi ||| < ||| \sigma ||| \leqq n$ on en déduit que H vérifie (2) ainsi que toutes les sous-expressions de N_1. En recommençant p fois ce raisonnement on en déduit que NX se réduit en N_p de type $\tau \sqsupseteq 0$ qui vérifie (2) et qui est donc en forme normale.

Cas 2 : $p=1$, $\bar{\sigma}=\sigma$ et nous distinguerons selon que :

– il n'existe pas d'occurrence de x dans N'.

$(\lambda x . N') X \rhd N'$ de type $\tau \sqsupseteq 0$ qui vérifie (2) et qui est donc en forme normale;

– il existe exactement une occurrence de x dans N'.

Il suffit de prouver que toutes les sous-expressions de N' se réduisent à une expression vérifiant (1) et (2). Si x est variable de tête d'une expression ayant un type distinct de ω alors celle-ci est en forme normale gauche et soit $H \equiv \lambda y_1 \ldots y_s . x G_1 \ldots G_t$ cette expression. Si elle n'a un type que par rapport à une base étendue alors elle se réduit à une forme normale gauche vérifiant (1). Sinon $\exists \mathscr{B}' \supseteqq \mathscr{B}$ telle que $\mathscr{B}$, $\sigma_x \vdash \mu H$ et $\mu \sqsupseteq 0$ alors d'après R_a, $\mathscr{B} \vdash \mu (\lambda y_1 \ldots \lambda y_s . X G_1 \ldots G_t)$. On en déduit que $\mu = [\bar{\rho} 1] \ldots . [\bar{\rho} s] \psi$, $[\bar{\rho} i] \sqsubseteq 1$, $\forall i=1, s$, $\Psi \sqsupseteq 0$ et que $\sigma = [\bar{\nu}_1] \ldots [\bar{\nu}_t] \Psi$. Il suffit de montrer que $X G_1 \ldots G_t$ de type $\Psi \sqsupseteq 0$ a une forme normale gauche. Comme $||| \sigma ||| \leqq n$ on fait une récurrence sur $|| \sigma ||$.

Première étape : $\|\sigma\|=0$. Dans ce cas $X, G_1 \ldots G_t$ ont un type atomique 0 ou 1 ainsi que toutes leurs sous-expressions et on applique le théorème 9.

Deuxième étape : Supposons la propriété vraie $\forall \rho$, $\|\rho\|<\|\sigma\|$.

Dans ce cas on montre que $XG_1, XG_1\ G_2, \ldots, XG_1 \ldots G_t$ se réduisent successivement en $X_1, X_2, \ldots, X_t$ qui vérifient les propriétés (1) et (2). X_t ayant un type $\Psi \sqsupseteq 0$ est alors en forme normale. Pour cela on remarque que si $\bar{\nu}_1$ est réellement une séquence on est replacé dans les conditions initiales du théorème dans le cas 1 avec $|||\sigma||| \leqq n$ et que dans ce cas XG_1 se réduit en X_1 qui vérifient (1) et (2). Sinon $\bar{\nu}_1$ n'a qu'un seul élément soit ν_{11} et $\|\nu_{11}\|<\|\sigma\|$. Par hypothèse de récurrence X_1 vérifie (1) et (2). On peut recommencer t fois ce raisonnement.

THÉORÈME 6 : *Si X est une expression quelconque et si $\mathscr{B} \vdash \tau X$ avec $\tau \sqsupseteq 0$ alors X a une forme normale.*

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 3.

A partir des théorèmes 5 et 6 et du lemme 12 on déduit un théorème qui résume l'ensemble des propriétés de la théorie étendue.

THÉORÈME 7 : *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

– *une expression quelconque X a une forme normale (respectivement forme normale gauche);*

– *il existe une base $\mathscr{B}$ (respectivement une base étendue $\mathscr{E}$) et un type τ, $\tau \sqsupseteq 0$ (respectivement $\tau \neq \omega$) tels que $\mathscr{B} \vdash \tau X$ (respectivement $\mathscr{E} \vdash \tau X$).*

La preuve est évidente puisque deux expressions α-β-η convertibles ont le même ensemble de types, que toute forme normale a le type 0 et que toute forme normale a un type distinct de ω.

La théorie étendue permet de donner un type significatif à toute expression qui n'est pas un terme non résoluble [1], *id est* à la représentation de tout programme qui calcule effectivement quelque chose. Si on applique cette théorie à Y l'ensemble des types que l'on peut affecter à Y est d'après le théorème 4 l'ensemble des types que l'on peut affecter aux expressions de la forme

$$\lambda f. f(f(\ldots\ldots\ldots((\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))\ldots)),$$

obtenues par réductions successives de Y. C'est l'ensemble des types de la forme $[[\omega]\tau_1, [\tau'_1]\tau_2, \ldots, [\tau'_n]\tau_{n+1}]\tau_{n+1}$, $\tau_i \sqsupseteq \tau'_i$, $\forall i=1, n$. On en déduit une condition nécessaire et suffisante sur le type de F pour que YFX ait une forme normale :

– F doit avoir les types $[\omega]\tau_1, \ldots, [\tau'_n]\tau_{n+1}$, $\tau_i \sqsupseteq \tau'_i$, $\forall i=1, n$;

– si σX alors $\tau_{n+1}=[\sigma]\tau$ et $\tau \sqsupseteq 0$.

ANNEXE I

Déduction d'un type de $X \equiv (\lambda x.((xK)\ a(\Delta\Delta))\ (x(KI)(\Delta\Delta)\ a))\ I$:

$$K \equiv \lambda x \lambda y . x, \qquad KI \equiv \lambda x \lambda y . y,$$

$$\mathscr{E} = \{[[0]\ [\omega]\ 0]\ [0]\ [\omega]\ 0x,\ 1a\} \quad \frac{\omega y,\ 0x \vdash 0x}{} \ Ra$$

$$\frac{0x \vdash [\omega]\ 0\ y.x}{} \ Ra$$

$$\frac{\mathscr{E} \vdash [[0]\ [\omega]\ 0]\ [0]\ [\omega]\ 0x \qquad \vdash [0]\ [\omega]\ 0\ \lambda x \lambda y . x}{\dfrac{\mathscr{E} \vdash [0]\ [\omega]\ 0(xK), \qquad \mathscr{E} \vdash 0a \ \ \dfrac{Ri}{}}{\dfrac{\mathscr{E} \vdash [\omega]\ 0((xK)\ a), \qquad \mathscr{E} \vdash \omega(\Delta\Delta)}{\mathscr{E} \vdash 0(xKa(\Delta\Delta))}} \ Rc} \ Rc$$

$$\mathscr{E}' = \{[[\omega]\ [1]\ 1]\ [\omega]\ [1]\ 1x,\ 1a\}$$

on déduit de la même façon :

$$\mathscr{E}' \vdash 1(x(KI)\ (\Delta\Delta)\ a),$$

$$\mathscr{E}'' = \mathscr{E}' \cup \mathscr{E}$$

$$\frac{\mathscr{E} \vdash 0(xKa(\Delta\Delta), \qquad \mathscr{E}' \vdash 1(x(KI)\ (\Delta\Delta)\ a)}{\dfrac{\mathscr{E}'' \vdash 0(xKa(\Delta\Delta))\ (x(KI)\ (\Delta\Delta)\ a)}{}\ Ra} \ Rc$$

$$1a \vdash [[[0]\ [\omega]\ 0]\ [0]\ [\omega]\ 0],\ [[\omega]\ [1]\ 1]\ [\omega]\ [1]\ 1]\ 0\ (\lambda x.((xK)\ a(\Delta\Delta))\ (x(KI)\ (\Delta\Delta)\ a)).$$

Comme on peut déduire $\vdash [\sigma]\ \sigma I$, $\forall \sigma$ on a :

$$[[0]\ [\omega]\ 0]\ [0]\ [\omega]\ 0I \qquad \text{et} \qquad [[\omega]\ [1]\ 1]\ [\omega]\ [1]\ 1I,$$

d'où $1a \vdash 0X$.

ANNEXE II

Dans cette annexe nous considérons la théorie de types construite sur l'ensemble T' en utilisant l'axiome A_p et les règles de déduction R'_a et R'_c (suppression des règles R_i et R_e). Nous noterons $\mathscr{B} \vdash' \tau M$ la déduction du type τ pour l'expression M dans cette théorie et nous montrons que deux expressions β-η-convertibles ont alors deux ensembles de types égaux modulo l'application des axiomes A'_0 et A'_1. Les preuves concernant les propriétés de normalisation dans cette théorie sont données dans [17]. Nous montrons tout d'abord que :

PROPOSITION A : *Si* $M =_\beta N$ *alors* $\mathscr{B} \vdash \tau M$ *si et seulement si*

$$\mathscr{B} \vdash' \tau N.$$

L'examen du lemme 10 et de la proposition 10 suffit pour voir que la preuve est identique.

Il reste à montrer la propriété dans le cas de η-conversion et tout d'abord sur les β-Ω-formes normales. Nous dirons que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont égales, $\mathscr{B}=\mathscr{B}'$, si $\forall \bar{\sigma}$, $x \in \mathscr{B}$ il existe $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}$ tel que $\bar{\sigma}' x \in \mathscr{B}'$.

LEMME A : *Soient* X *et* X' *deux* β-Ω-*formes normales* η-*convertibles, alors si* $\mathscr{B} \vdash' \tau X$ *il existe* $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ *et* $\tau' = \tau$ *tels que* $\mathscr{B}' \vdash' \tau' X'$.

La démonstration se fait par double récurrence sur $|X|$ et sur p le nombre de η-conversions nécessaires pour passer de X à X'.

Première étape : $|X|=1$. Deux cas se présentent :

– $X = X' = \Omega$. X et X' n'ont que le type ω;

– $X = y$.

1) $p=1$, $X' = \lambda x . yx$, $\mathscr{B} = \{\tau y\}$ et $\mathscr{B} \vdash' \tau y$:

α) si $\tau \equiv [\bar{\sigma}] \rho$ on peut déduire $\mathscr{B}$, $\bar{\sigma} x \vdash' \rho y$ et $\mathscr{B} \vdash' [\bar{\sigma}] \rho \, \lambda x . yx$;

β) si $\|\tau\| = 1$ nous considèrerons le cas $\tau = 0$. Alors il existe $\mathscr{B}' = \{[1] 0 \, y\}$ tel que $\mathscr{B}'$, $1x \vdash' 0 \, yx$ et $\mathscr{B}' \vdash' [1] \, 0 \, \lambda x . yx$. Or $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$ et $0 = [1] 0$. Démonstration identique pour $\tau = 1$.

2) Supposons la propriété vraie pour $\|\rho\| \leqq k$ et montrons la pour k $X' = \lambda x_1 \ldots x_n . y X'_1 \ldots X'_n$ avec $X'_i =_\eta X_i$, $\forall_i = 1, n$.

Il existe $\bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_n$ tels que $\tau = [\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}_n] \rho$ et on en déduit que $[\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}_n] \rho \, y \vdash' [\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}_n] \rho \, \overline{X}$ avec $\overline{X} = \lambda x_1 \ldots x_n . y x_1 \ldots x_n$. D'autre part par hypothèse de récurrence x_i et X'_i ont même ensembles de types, c'est-à-dire que quel que soit i il existe $\bar{\sigma}'_i = \bar{\sigma}_i$ tel que $\bar{\sigma}'_i x_i \vdash \bar{\sigma}'_i X'_i$. On en déduit que

$$\mathscr{B}' = \{[\bar{\sigma}'_1] \ldots [\bar{\sigma}'_n] \rho \, y\}, \qquad \mathscr{B} = \mathscr{B}',$$

$$\mathscr{B}' \vdash' [\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}'_n] \rho \, X' \qquad \text{et} \qquad [\bar{\sigma}'_1] \ldots [\bar{\sigma}'_n] \rho = \tau.$$

Deuxième étape : Supposons la propriété vraie $\forall X$ tel que $|X| \leqq q$ et soit X de taille q :

$$X \equiv \lambda x_1 \ldots x_n . z X_1 \ldots X_m,$$

$$X' \equiv \lambda x_1 \ldots x_{n+h} . z X'_1 \ldots \ldots X'_{m+h}.$$

Nous montrerons uniquement dans le cas $h \geqq 0$ la preuve par $h<0$ étant tout à fait semblable.

Nous avons $X'_{m+j} =_\eta x_{n+j}$, $\forall_j = 1, h$ et $X_i =_\eta X'_i$, $\forall_i = 1, m$. Deux cas sont à considérer selon que :

1) *z est libre* : $\mathscr{B}, \alpha z \stackrel{\prime}{\vdash} [\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}_n] \rho X$ avec $\alpha \equiv [\bar{\nu}_1] \ldots [\bar{\nu}_m] \rho$ et si $\mathscr{B}, \alpha z, \bar{\sigma}_1 x_1, \ldots, \bar{\sigma}_n x_n = \mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_1 \stackrel{\prime}{\vdash} \bar{\nu}_i X_i$, $\forall_i = 1, m$. Par hypothèse de récurrence on déduit qu'il existe $\mathscr{B}_1^{(i)}$ et $\bar{\nu}'_i$ tels que pour tout $i=1, m'$ $\mathscr{B}_1^{(i)} = \mathscr{B}_1$, $\bar{\nu}'_i = \bar{\nu}_i$ et $\mathscr{B}_1^{(i)} \stackrel{\prime}{\vdash} \bar{\nu}'_i X'_i$. Considérons $\mathscr{B}_2 = \bigcup_{i=1, m} \mathscr{B}_1^{(i)}$ alors $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}_1$. D'autre part il existe $\bar{\nu}_{m+1}, \ldots \bar{\nu}_{m+h}$ et ρ' tels que $\rho = [\bar{\nu}_{m+1}] \ldots [\bar{\nu}_{m+h}] \rho'$. Comme $X = \eta X'$ on a $X'_{m+j} =_\eta x_{m+j}$, $\forall_j = 1, h$ et x_{m+j} n'apparaît pas dans $X'_1 \ldots X'_m$. Par hypothèse de récurrence il existe $\bar{\nu}'_{m \to j} = \bar{\nu}_{m+j}$, $\forall j = 1, h$ tel que $\bar{\nu}'_{m+j} x_{m+j} \vdash \bar{\nu}'_{m+j} X'_{m+j}$ ce qui permet d'écrire en posant

$$\alpha' = [\bar{\nu}'_1] \ldots [\bar{\nu}'_{m+h}] \rho' \qquad \text{et} \qquad \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}', \qquad [\bar{\sigma}'_1] x_1, \ldots, [\bar{\sigma}'_n] x_n,$$
$$\mathscr{B}', \quad \alpha' z, \quad \bar{\nu}'_{m+1} x_{m+1}, \ldots, \bar{\nu}'_{m+h} x_{m+h} \stackrel{\prime}{\vdash} \rho' (z X'_1 \ldots X'_{m+h}),$$

d'où $\mathscr{B}', \alpha' z \stackrel{\prime}{\vdash} [\bar{\sigma}'_1] \ldots [\bar{\sigma}'_n] \rho' X'$.

2) $z \equiv x_l : 1 \leqq l \leqq n$.

Dans ce cas $\mathscr{B} \stackrel{\prime}{\vdash} [\bar{\sigma}_1] \ldots [\bar{\sigma}_n] \rho X$ où $\bar{\sigma}_l$ est de la forme $\alpha, \bar{\tau}_l$ avec α type de l'occurrence de z jouant le rôle de variable principale. Un raisonnement analogue conduit une déduction de $\mathscr{B}' \stackrel{\prime}{\vdash} [\bar{\sigma}'_1] \ldots [\bar{\sigma}'_n] \rho' X'$ où $\bar{\sigma}'_l$ est de la forme $\alpha', \bar{\tau}'_l$ avec $\alpha = \alpha'$ et $\tau_l = \tau'_l$ et plus généralement $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$, $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}'_i$ et $\rho = \rho'$.

Pour montrer la conservation des ensembles de types par η-conversion pour des expressions quelconques nous nous servirons des deux lemmes suivants :

LEMME B : *Si* $\mathscr{B} \stackrel{\prime}{\vdash} \tau M$, $\tau \not\equiv \omega$ *alors il existe un approximant* A *de* M *tel que* $\mathscr{B} \stackrel{\prime}{\vdash} \tau A$.

La preuve de ce lemme [17] montre également que A s'obtient à partir de M en réduisant tous les radicaux ayant un type distinct de ω et en remplaçant dans l'expression ainsi obtenue toutes les sous-expressions de type ω par Ω.

LEMME C : *Si* A *est un approximant de* M *et si* $\mathscr{B} \vdash \tau A$ (*resp.* $\mathscr{B} \stackrel{\prime}{\vdash} \tau A$) *alors* $\mathscr{B} \vdash \tau M$ (*resp.* $\mathscr{B} \stackrel{\prime}{\vdash} \tau M$).

Si A est un approximant de M alors $M \rhd M'$ et A s'obtient à partir de M' en remplaçant des sous-expressions de M' par Ω. Si $\mathscr{B} \vdash \tau A$ on obtient une déduction de $\mathscr{B} \vdash \tau M'$ en affectant le type ω à toutes les sous-expressions de M' qui sont remplacées par Ω dans A. D'après le théorème A on a donc $\mathscr{B} \vdash \tau M$.

Nous sommes alors en mesure de prouver :

PROPOSITION B : *Si* $M =_{\beta\eta} N$ *alors si* $\mathscr{B} \vdash \tau M$ *il existe* $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$ *et* $\tau' = \tau$ *tels que* $\mathscr{B}' \stackrel{\prime}{\vdash} \tau' N$.

En effet d'après le lemme B si $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \tau\, M$ il existe en approximant A de M tel que $\mathscr{B} \vdash \tau\, A$. D'autre part N possède un approximant A' tel que $A =_{\eta} A'$. Comme A et A' sont deux β-Ω formes normales on en déduit qu'il existe $\mathscr{B}' = \mathscr{B}$, $\tau' = \tau$ tels que $\mathscr{B}' \overset{\prime}{\vdash} \tau'\, A'$. D'après le lemme C on obtient $\mathscr{B}' \overset{\prime}{\vdash} \tau'\, N$.

Nous donnons enfin la preuve d'un lemme très technique qui est utilisé dans [9] et qui établit que si $X \triangleright X'$ la « taille » de la déduction d'un type τ pour X est plus grande que celle de τ pour X'. Pour cela nous introduisons les notions suivantes :

Soit D une déduction de $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \sigma\, X$ et $R \equiv (\lambda x . Y)\, Z$ un radical de X.

L'*ensemble caractéristique* de R dans D se définit par

$$C(R) = \{ \tau \mid \tau \neq \omega \text{ et } \tau \text{ est un type de } \lambda x . Y \text{ dans } D \}.$$

Le *poids* de R $h(R) = \max \{ \| \tau \| \mid \tau \in C(R)$.

Une composante significative Y de X dans une déduction D de $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \sigma\, X$ est une composante de X qui n'est pas composante d'une composante Z de X qui n'a que le type ω dans D.

La mesure d'une déduction D de $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \sigma\, X$ est une paire d'entiers non négatifs $\langle m(D), n(D) \rangle$ définie par : $m(D)$ est le poids maximal des radicaux significatifs de X dans D; $n(D)$ est le nombre de radicaux de poids $m(D)$ dans D.

Nous ordonnons les paires d'entiers par l'ordre lexicographique usuel $(\langle h', k' \rangle \leqq \langle h, k \rangle$ ssi $h' < h$ ou $k' \leqq k)$.

Nous montrons alors que :

PROPOSITION C : *Soit D une déduction de $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \tau\, X$ dont la mesure n'est pas $\langle 0, 0 \rangle$. Alors il existe un terme X' et une déduction D' de $\mathscr{B} \overset{\prime}{\vdash} \tau\, X'$ telle que $X \triangleright X'$ et que la mesure de D' soit plus petite que celle de D.*

Démonstration : Si $m(D) = 0$ alors tout radical de X a pour poids 0, il n'a que le type ω et est non significatif. On en déduit que $n(D) = 0$.

D'autre part aucun radical ne peut avoir de type de taille égale à 1 et différent de $\omega . m(D) = 1$ ne se produit jamais.

Reste le cas de $m(D) \geqq 2$, $n(D) > 0$ et soit alors $R \equiv (\lambda x . Y)\, Z$ de poids $m(D)$ et soit $R' = [Z/x]\, Y$. Il suffit de montrer que le poids des radicaux créés par la réduction de R est inférieur à $m(D)$. Or quel que soit $\tau = [\bar{\tau}_1]\, \tau_2$, $\tau \in C(R)$, $\| \bar{\tau}_1 \| < m(D)$. L'ensemble des types de Z ont une taille inférieure à $m(D)$.

— $Z \equiv \lambda y . \bar{Z}$ et $x Y_1$ est une sous-expression de Y. $C((\lambda y . \bar{Z})\, Y_1)$ est égal à l'ensemble des types de Z et a un poids inférieur à $m(D)$.

— $R' \equiv Z \equiv \lambda y . \bar{Z}$ et $R'\, Q$ est une sous-expression de X; $h((\lambda y . \bar{Z})\, Q) < m(D)$ par les mêmes raisons.

– $R \equiv (\lambda xy.\overline{Y})Z$ et RQ est une sous-expression de X dans ce cas $\forall \tau = [\bar{\tau}_1][\bar{\tau}_2]\tau_3, \tau \in C(R), \|[\bar{\tau}_2]\tau_3\| < m(D)$ et l'ensemble de ces types constitue $C((\lambda y.[Z/x]\overline{Y})Q)$ de poids inférieur à $m(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. P. Barendregt, *Some Extensional Term Models for Combinatory Logics and λ-calculi*, Ph. D. thesis, Utrecht University, the Netherlands, 1971.
2. C. Böhm, *The CUCH as a Formal and Description Language*, *in* Formal Language, Description Languages for Computer Programming, T. B. Steal Jr., éd., p. 179-197, 1966, North Holland, Amsterdam.
3. C. Böhm et M. Dezani-Ciancaglini, *Lambda-Terms as Total or Partial Function on Normal Forms, Lambda Calculus and Computer Science Theory*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 37, 1975, p. 96-121, Springer Verlag.
4. C. Böhm et M. Dezani-Ciancaglini, *Termination Test Inside λ-Calculus*, Automata Languages and Programming, A. Soloma, éd., Lecture Notes in Computer Science, vol. 52, 1977, Springer-Verlag, Turku.
5. H. B. Curry, J. R. Hindley et J. P. Seldin, *Combinatory Logic*, vol. 2, 1972, Amsterdam, North Holland.
6. M. Coppo et M. Dezani-Ciancaglini, *A Proposal for a New Type Assignment for λ-Terms*, Rapport Interne, Université de Turin, 1976.
7. M. Coppo et M. Dezani-Ciancaglini, *A Generalized Type Theory for λ-Calculus*, Rapport Interne, Université de Turin, 1977.
8. M. Coppo et M. Dezani-Ciancaglini, *A New Type Assignment for λ-Terms*, *in* Archiv Für Math. Logik und Grundlageforshung, vol. 19, 1978, p. 1-17.
9. M. Coppo, M. DezaniCiancaglini et P. Sallé, *Functional Characterisation of Some Semantic Equalities Inside λ-Calculus*, Automata Languages and Programming, E. Maurer, éd., Lecture Notes in Computer Science, 1979.
10. J. P. Landin, *A Correspondence between ALGOL-60 and Church's λ-Notation*, C.A.C.M., vol. 8, February and March 1965, p. 89-101 et 158-165.
11. J. H. Morris, *Lambda Calculus Models of Programming Languages*, Ph. D., M.I.T., 1968.
12. L. Nolin, *Les modèles Informatiques des λ-calculs*, λ-Calculus and Computer Science Theory, Proceedings of the Symposium Held in Rome, C. Böhm, éd., Springer Verlag, 1975, p. 166-176.
13. B. Robinet, *Contribution à l'étude des réalités informatiques*, Thèse Doctorat, n° I.P. 74-9, Paris, 1974.
14. B. Robinet et F. Nozick, *Sémantique des structures de contrôle*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, n° 1, 1977, p. 63-74.
15. B. Robinet, *Un modèle fonctionnel des structures de contrôle*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, n° 3, 1977, p. 213-236.
16. L. E. Sanchis, *Types of Combinatory Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, (5), 1964, p. 161-180.
17. P. Sallé, *Types et étiquettes dans le λ-calcul* (à paraître).

18. P. SALLÉ, *La notion de types en λ-calcul*, Groupe Programmation et Languages A.F.C.E.T., Bulletin n° 3, 1978.

19. P. SALLÉ, *Une extension de la théorie des types en λ-calcul*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 62, 1978, Springer Verlag, p. 398-410.

20. P. SALLÉ et J. L. DURIEUX, *L'échappement comme sémantique des structures de contrôle*, Actes du Congrès A.F.C.E.T. T.T.I., Gif-sur-Yvette, novembre 1978, p. 77-87.

21. C. P. WADSWORTH, *The Relation Between Lambda Expressions and Their Denotations in Scott's Models for the λ-Calculus*, Séminaire I.R.I.A., 1974.