

F. POUSSIN

## **Énumération des permutations par nombre de marches**

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 13, n° 3 (1979), p. 251-255

<[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1979\\_\\_13\\_3\\_251\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1979__13_3_251_0)>

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉNUMÉRATION DES PERMUTATIONS PAR NOMBRE DE MARCHES (\*)

F. POUSSIN (1)

Communiqué par R. CORI

Résumé. — Une permutation  $a_1 a_2 \dots a_n$  présente une « marche » en  $a_i$  si  $a_{i+1} = a_i - 1$ . On démontre que le nombre  $M(n, k)$  de permutations présentant exactement  $k$  marches est lié au nombre classique  $d(n)$  des permutations sans rencontres par la relation :

$$M(n, k) = \binom{n-k}{k} d(n-k+1)/(n-k).$$

Abstract. — A step in a permutation  $a_1 a_2 \dots a_n$  is an  $a_i$  such that  $a_{i+1} = a_i - 1$ . It is proved that the number  $M(n, k)$  of permutations with exactly  $k$  steps is given by  $M(n, k) = \binom{n-k}{k} d(n-k+1)/(n-k)$  where  $d(n)$  is the number of derangements (permutations with every element displaced).

### INTRODUCTION

Les propriétés combinatoires des permutations, notamment l'énumération des permutations suivant le nombre de leurs pics, creux, montées, descentes, ont trouvé récemment des applications remarquables à l'évaluation de certaines structures de données [4].

On s'est depuis longtemps intéressé à l'énumération des permutations en fonction du nombre de leurs descentes, c'est-à-dire que pour une permutation  $\sigma = \sigma(1) \dots \sigma(n)$  on comptait sous diverses conditions le nombre des  $i$  tels que  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$  ( $1 \leq i < n$ ). Voir entre autres [1, 3].

On peut aussi distinguer ces descentes suivant leur « hauteur », c'est-à-dire selon la valeur de  $\sigma(i) - \sigma(i+1)$  si  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$ . On s'intéresse ici, dans un premier temps, au cas où  $\sigma(i) - \sigma(i+1) = 1$ .

Ainsi, on dit qu'une permutation  $\sigma(1) \dots \sigma(n)$  présente une marche s'il existe  $i$  ( $1 \leq i < n$ ) tel que  $\sigma(i) = \sigma(i+1) + 1$ . Nous calculons ici le nombre de permutations de  $[n]$  qui ont un nombre donné  $k$  de marches.

(\*) Reçu mai 1978, révisé octobre 1978.

(1) Université de Picardie, Amiens, et L. A. « Informatique théorique et Programmation », Paris.

I. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

$[n]$  est l'ensemble des entiers  $\{1, \dots, n\}$ . Soit  $a$  une permutation de  $[n]$ , on notera  $a$  sous la forme  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . On dira que la permutation  $a$  présente une marche en  $i$  si  $a_i = a_{i+1} + 1$  ( $1 \leq i < n$ ). On notera  $\mathcal{M}(n, k)$  l'ensemble des permutations de  $[n]$  qui ont  $k$  marches et  $M(n, k)$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{M}(n, k)$ . Pour une permutation  $a \in \mathcal{M}(n, k)$  on notera  $\text{supp}(a) = \{a_i \mid a_i \neq a_{i+1} + 1\}$  et  $\text{sp}(a) = a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{n-k}}$  avec  $a_{i_j} \in \text{supp}(a)$  ( $1 \leq j \leq n-k$ ) et  $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}$ .

Exemple :  $a = 1 \ 7 \setminus 6 \ 3 \ 5 \setminus 4 \ 2$  a deux marches :  $a \in \mathcal{M}(7, 2)$  :

$$\text{supp}(a) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\text{sp}(a) = 1 \ 6 \ 3 \ 4 \ 2.$$

LEMME : Si  $a$  et  $b$  sont deux permutations de  $[n]$  alors  $a \neq b \Leftrightarrow \text{sp}(a) \neq \text{sp}(b)$ .

En effet, il est évident que si  $a \in \mathcal{M}(n, k)$  alors  $|\text{supp}(a)| = n - k$ . Donc si  $a \in \mathcal{M}(n, k_1)$  et  $b \in \mathcal{M}(n, k_2)$  avec  $k_1 \neq k_2$  alors  $a \neq b$  et  $\text{sp}(a) \neq \text{sp}(b)$ . Supposons donc  $a, b \in \mathcal{M}(n, k)$ . Si  $\text{supp}(a) \neq \text{supp}(b)$  alors  $a \neq b$  (d'après la construction de  $\text{supp}$ ) et  $\text{sp}(a) \neq \text{sp}(b)$ .

Reste le cas où  $\text{supp}(a) = \text{supp}(b)$ . Comme en partant d'un  $a$  donné on ne construit qu'un seul  $\text{sp}(a)$  il est évident que  $\text{sp}(a) \neq \text{sp}(b) \Rightarrow a \neq b$ .

Si  $a \neq b$  alors il existe  $p < q$  et  $p' < q'$  tels que  $a_p = b_q$  et  $a_q = b_{p'}$ , on peut toujours supposer que  $a_p, a_q \in \text{supp}(a)$  et  $b_{q'}, b_{p'} \notin \text{supp}(b)$ , car si par exemple  $a_p \notin \text{supp}(a)$  on considère  $a_{p+1} = a_p - 1$  et  $b_{q'+1} = b_{q'} - 1$  puisqu'on est dans le cas où  $\text{supp}(a) = \text{supp}(b)$ . Mais ceci entraînera  $\text{sp}(a) \neq \text{sp}(b)$  comme on se convainc en examinant le schéma de la figure.

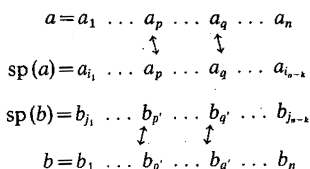


Figure -  $a_p$  est situé avant  $a_q$  dans  $\text{sp}(a)$ ,  
 mais  $b_{q'} = a_p$  est situé après  $b_{p'} = a_q$  dans  $\text{sp}(b)$ .

PROPRIÉTÉ 1 : On a  $M(n, k) = \binom{n-1}{k} M(n-k, 0)$ , pour  $n > 1$  et  $0 \leq k \leq n-1$ .

Démonstration : Soit  $b = b_1 b_2 \dots b_{n-k}$  une permutation de  $\mathcal{M}(n-k, 0)$ . Prenons une application  $\psi$  de  $[n-k]$  dans  $[n]$  telle que  $\psi(1) = 1$  et  $i < j \Rightarrow \psi(i) < \psi(j)$ . Il y a évidemment  $\binom{n-1}{k}$  applications qui répondent à ces

conditions. Posons  $b' = b'_1 b'_2 \dots b'_{n-k}$  et  $b_\psi = \{ b'_1, b'_2, \dots, b'_{n-k} \}$  avec  $b'_i = \psi(b_i)$  ( $1 \leq i \leq n-k$ ). Construisons alors  $b''$ , une permutation de  $[n]$  de la façon suivante :

- si  $i \in [n]$  et si  $i \notin b_\psi$  alors  $\exists j$  tel que  $b''_j = i, b''_{j+1} = i-1$ ;
- si  $b''_p = b'_p b''_q = b'_q$  alors  $p < q \Rightarrow i < j$ .

*Exemple :* Soit  $b = 1\ 3\ 4\ 2$ ; prenons  $b' = 1\ 5\ 7\ 4$ ; on a alors  $b'' = 3 \setminus 2 \setminus 1\ 6 \setminus 5\ 7\ 4 \in \mathcal{M}(7, 3)$ .

Il est clair d'après la construction utilisée que  $b'' \in \mathcal{M}(n, k)$  et que  $\text{sp}(b'') = b'$ .

Montrons que toutes les permutations de  $\mathcal{M}(n, k)$  peuvent être engendrées par cette méthode. Soit  $b'' \in \mathcal{M}(n, k), b' = \text{sp}(b'')$ ; il est évident que  $1 \in \text{supp}(b'')$ . On peut donc trouver  $\psi$  tel que  $\psi^{-1}(b')$  soit une permutation de  $[n-k]$ ; de plus  $\psi^{-1}(b') \in \mathcal{M}(n-k, 0)$ . Supposons en effet que  $\psi^{-1}(b')$  présente une marche :

$$\psi^{-1}(b') = b = b_1 \dots b_j \setminus b_{j+1} \dots b_{n-k} \quad \text{avec } b_j - 1 = b_{j+1}.$$

Considérons  $b' = b'_1 \dots b'_j b'_{j+1} \dots b'_{n-k}$ ; ou bien  $b'_j = b'_{j+1} + 1$  mais alors  $b' \neq \text{sp}(b'')$  ou bien pour tout entier  $i (b'_j < i < b'_{j+1}) : i \notin b_\psi$  et  $b''$  sera de la forme  $b''_1 \dots b''_j \setminus b''_{j+1} - 1 \setminus \dots \setminus b''_{j+1} \dots$  ce qui est incompatible avec  $b' = \text{sp}(b'')$ .

Montrons qu'on ne peut ainsi engendrer deux permutations  $b''$  identiques. Prenons  $a$  et  $b$  appartenant à  $\mathcal{M}(n-k, 0), a \neq b$  :

$$\begin{aligned} a &= a_1 \dots a_{n-k}, & a' &= a'_1 \dots a'_{n-k}, & a'_i &= \psi_1(a_i), & a_{\psi_1} &= \{ a'_i \}, \\ b &= b_1 \dots b_{n-k}, & b' &= b'_1 \dots b'_{n-k}, & b'_i &= \psi_2(b_i), & b_{\psi_2} &= \{ b'_i \}. \end{aligned}$$

Si on suppose  $a \neq b$  alors il existe  $i$  tel que  $a_i < a_{i+1}$  et  $b_i > b_{i+1}$ . Mais on aurait  $a'_i < a'_{i+1}$  et  $b'_i > b'_{i+1}$ , donc  $a \neq b \Rightarrow a' \neq b'$ . Or  $a' = \text{sp}(a'')$  et  $b' = \text{sp}(b'')$  donc d'après le lemme ceci entraîne  $a'' \neq b''$ .

**PROPRIÉTÉ 2 :** On a  $M(n, 0) = (n-1) \cdot M(n-1, 0) + M(n-1, 1)$  pour  $n > 2$ .

*Démonstration :* Soit  $a = a_1 \dots a_{j-1} a_j a_{j+1} \dots a_n \in \mathcal{M}(n, 0)$  une permutation de  $[n]$  sans marche telle que  $a_j = n$ . Considérons la permutation  $a' = a_1 \dots a_{j-1}, a_{j+1} \dots a_n$ ; c'est une permutation de  $[n-1]$ . Deux cas peuvent se produire :

- ou  $a_{j-1} = a_{j+1} + 1$  et alors  $a' \in \mathcal{M}(n-1, 1)$ ;
- ou  $a_{j-1} \neq a_{j+1} + 1$  et alors  $a' \in \mathcal{M}(n-1, 0)$ .

Réciproquement, soit  $a' = a_1 \dots a_{n-1} \in \mathcal{M}(n-1, 1)$ , il lui correspond une seule permutation de  $\mathcal{M}(n, 0) : a = a_1 \dots a_i n a_{i+1} \dots a_{n-1}$ . Soit  $a' = a_1 \dots a_{n-1} \in \mathcal{M}(n-1, 0)$ , il lui correspond  $n-1$  permutations de  $\mathcal{M}(n, 0)$  car on peut insérer  $n$  devant  $a_1, a_2, \dots$ , ou  $a_{n-1}$  (sauf devant  $a_i$  si  $a_i = n-1$ ) et on peut aussi insérer  $n$  après  $a_{n-1}$ .

Il est évident que deux permutations construites par cette méthode ne peuvent être égales.

Une permutation sans « rencontres », ou sans point fixe est une permutation  $a$  telle que  $a_i \neq i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Le nombre des permutations de  $[n]$  sans rencontres est généralement noté  $d(n)$  et obéit à la relation de récurrence  $d(n+1) = n(d(n) + d(n-1))$  [2, 5].

PROPRIÉTÉ 3 : On a  $M(n, 1) = d(n)$  pour  $n \geq 1$ .

Démonstration : D'après 1 :  $M(n+1, 1) = n \cdot M(n, 0)$ ,

donc d'après 2 :  $M(n+1, 1) = n((n-1) \cdot M(n-1, 0) + M(n-1, 1))$ ,

mais d'après 1 :  $M(n, 1) = (n-1) \cdot M(n-1, 0)$ ,

donc  $M(n+1, 1) = n \cdot (M(n, 1) + M(n-1, 1))$ .

On voit que cette relation de récurrence est semblable à celle du nombre de permutations sans rencontres. De plus,  $M(1, 1) = d(1) = 0$  car  $\mathcal{M}(1, 1) = \emptyset$ ;  $M(2, 1) = d(2) = 1$  car  $\mathcal{M}(2, 1)$  est formé de la permutation 2 1.

PROPRIÉTÉ 4 : On a les égalités suivantes :

$$(A) \quad M(n, k) = \binom{n-1}{k} \frac{d(n-k+1)}{n-k},$$

$$(B) \quad M(n, k) = \binom{n-1}{k} \frac{(n-k+1)!}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k+1} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Démonstration : La formule (A) découle directement des propriétés 1 et 3. La formule (B) lui est équivalente.

Table des  $M(n, k)$ ,  $2 \leq n \leq 8$ ,  $0 \leq k < n$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
2...	1	1						
3...	3	2	1					
4...	11	9	3	1				
5...	53	44	18	4	1			
6...	309	265	110	30	5	1		
7...	2 119	1 854	795	220	45	6	1	
8...	16 687	14 833	6 489	1 855	385	63	7	1

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. CARLITZ et R. SCOVILLE, *Some Permutation Problems*, J. Comb. Th., vol. A 22, 1977, p. 129-146.
- [2] L. COMTET, *Analyse combinatoire*, P.U.F., Paris, 1970.
- [3] D. FOATA et M. P. SCHÜTZENBERGER, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Lecture Notes in Mathematics n° 138, Springer-Verlag, 1970.
- [4] F. FRANÇON, *Histoires de fichiers*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 12, 1978, p. 49-62.
- [5] J. RIORDAN, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, Wiley, 1959.