RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

RICHARD CANAL

Complexité de la réduction en logique combinatoire

RAIRO. Informatique théorique, tome 12, nº 4 (1978), p. 339-367
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_4_339_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Computer Science
(vol. 12, n° 4, 1978, p. 339 à 367)

COMPLEXITÉ DE LA RÉDUCTION EN LOGIQUE COMBINATOIRE (*)

par Richard CANAL [1]

Communiqué par G. Ausiello

Résumé. — *Le problème de l'existenec de la forme normale en Logique Combinatoire est abordé au moyen de nouvelles mesures de complexité statiques et dynamiques. L'ensemble des combinateurs est divisé en sous-ensembles suivant leurs effets, ce qui permet de définir soit des limites supérieures du nombre de réductions dans le cas d'existence de formes normales, soit des conditions suffisantes de non-obtention de forme normale.*

INTRODUCTION

Le Lambda-calcul et la Logique Combinatoire sont deux systèmes formels particulièrement bien adaptés à l'étude des sémantiques des langages de programmation, qu'elles soient dénotationnelles ou opérationnelles. Les travaux de Bohm [9], Landin [15] et MacCarthy [17] et ceux plus récents de Nolin [18], Reynolds [21], Robinet [22] et Ruggiu [23] permettent de traduire tout programme en une Lambda-expression ou en un terme combinatoire. Il s'ensuit que l'exécution d'un programme écrit en Logique Combinatoire consiste en la réduction du terme combinatoire qui le représente. Si on appelle forme normale toute expression irréductible, le problème de la terminaison des programmes devient équivalent à celui de l'existence de la forme normale. En effet, si le nombre d'étapes nécessaires à la réduction d'un terme est fini, alors la forme normale qui lui est associée existe et c'est le résultat du programme appliqué à ses données, sinon le terme à réduire ne possède pas de forme normale et le programme correspondant ne se termine pas.

Plusieurs auteurs ont envisagé le problème de l'obtention de la forme normale soit de manière dynamique, c'est-à-dire en considérant le processus de réduction, comme Lévy, soit de manière statique, c'est-à-dire en étudiant la structure des combinateurs, comme Sanchis, Craig ou Bohm. Ainsi, étant donné que plusieurs radicaux, c'est-à-dire des sous-expressions susceptibles d'être réduites, peuvent coexister dans un même terme, comment choisir le radical à réduire à chaque étape de calcul pour obtenir la forme normale

(*) Reçu en septembre 1977, révisé en mai 1978.
(1) Langages et Systèmes Informatiques, U.E.R. Mathématiques, Informatique, Gestion, Université Paul-Sabatier, Toulouse.

chaque fois qu'elle existe? Lévy [16] a défini la notion de réduction sûre de manière analogue à celle de Vuillemin [26] et montré que toute réduction sûre est optimale et permet d'atteindre la forme normale lorsqu'elle existe.

Par ailleurs, grâce à l'introduction d'une théorie des types au sens de Curry dans le système logico-combinatoire, Sanchis [25] a montré que tout terme combinatoire possédant un type a aussi une forme normale. D'autre part, CraiG [12] a décomposé l'ensemble des combinateurs en sous-ensembles suivant leurs effets, c'est-à-dire leur action au cours du processus de réduction sur les variables qui leur sont concaténées. Il a ainsi mis en évidence quatre effets fondamentaux : l'effet cachant qui permet d'éliminer certaines variables, l'effet composite qui les place entre parenthèses, l'effet duplicatif qui crée des occurrences suplémentaires de certaines variables et l'effet permutatif qui modifie les positions relatives des variables. Ces effets lui ont permis de donner la nature des effets des combinateurs qui doivent rentrer dans la composition d'une base et de montrer en particulier qu'une combinaison à effet non duplicatif possède toujours une forme normale.

Plus récemment, en utilisant la caractérisation des formes normales en Lambda-calcul de Bohm [9], M. Dezani-Ciancaglini, S. Ronchi Della Rocca, C. Bohm et M. Coppo ont calculé, dans certains cas bien particuliers, la borne supérieure du nombre de réductions nécessaires pour atteindre la forme normale des lambda-termes qui en possèdent une [13], et ils ont énoncé dans [7, 8] quelques conditions de terminaison dans le Lambda-calcul.

Cependant, le nombre des paramètres utilisés dans cette étude est très important, à cause de la présence de variable liées dans ce système formel, ce qui rend l'interprétation des résultats obtenus peu aisée. Vu l'équivalence existant entre le Lambda-calcul et la Logique Combinatoire, et l'absence de variables liées dans ce dernier système, il est plus simple d'étudier ce même problème en Logique Combinatoire.

C'est ce qu'ont entrepris Batini et Pettorossi [4, 19, 20] en définissant des mesures de complexité statiques inhérentes à la structure des combinateurs telles la longueur et la profondeur de parenthèses et des mesures dynamiques liées au processus de réduction. Parmi ces mesures, citons le nombre d'étapes de calcul, c'est-à-dire le nombre de réductions nécessaires à l'obtention de la forme normale, la taille de calcul qui est la longueur de l'expression transitoire la plus longue, et la profondeur de calcul qui est la profondeur de parenthèses de l'expression transitoire de profondeur maximale. Batini et Pettorossi [4] étudient les diverses relations existant entre ces mesures ainsi que leur comportement sur des ensembles finis appelés « bases », tels

$\{B, C, K\}$, $\{B\}$, $\{B, C\}$, $\{W\}$, $\{W, B\}$. En particulier, ils définissent les langages générés par certaines de ces bases, et présentent un algorithme optimal d'élimination de parenthèses, à l'aide du combinateur B.

Notre étude se place à la suite des travaux de Craig et de Batini et Pettorossi. Cependant, le point de vue adopté par ces auteurs est trop restrictif puisqu'il consiste à considérer un programme logico-combinatoire uniquement comme un combinateur réduit et à interpréter un combinateur qui n'est pas sous forme normale comme un programme appliqué à des données.

Nous préférons étudier le couple (programmes, données) sous la forme d'un combinateur (qui n'est pas nécessairement sous forme normale) auquel sont concaténées des variables représentant les arguments du programme. Cette construction plus complète est justifiée par le fait qu'un combinateur n'a d'intérêt que si son action apparaît sur les variables placées à sa droite. Dans ce cas, toute réduction possible du combinateur-programme sans ses variables équivaut à une compilation du programme pouvant conduire à des transformations syntaxiques et sémantiques de celui-ci et dans certains cas, à sa simplification directe, qui ne pouvait exister dans la syntaxe adoptée par Batini et Pettorossi [4] car le combinateur étudié était obligatoirement sous forme normale.

Dans la même optique, nous avons été amenés à modifier certaines mesures de complexité introduites par ces auteurs tout en conservant la règle de calcul sûre choisie par eux : réduction du radical le plus à gauche (leftmost). En particulier, nous affinons la notion de complexité de calcul en étendant la mesure « nombre d'étapes de calcul » aux combinés, c'est-à-dire aux combinateurs suivis d'un certain nombre de variables; cela nous permet, par exemple, de différencier les deux combinateurs $A = WK$ et $A' = C$ qui ont, selon Batini et Pettorossi, tous les deux une complexité de calcul nulle; en effet, la nouvelle mesure que nous définissons prendra respectivement pour valeurs, pour A et A', 3 et 1.

D'autre part, nous conservons la mesure statique de longueur, bien adaptée à la description des termes combinatoires mais nous définissons de nouvelles mesures dynamiques pour décrire de manière plus précise soit le processus de réduction, soit la structure de la forme normale, lorsqu'elle existe.

De plus, nous ne limitons pas l'étude de la complexité de calcul des combinateurs à des bases particulières formées de combinateurs privilégiés tels I, K, S, B, C, W. En effet, nous utilisons comme Craig [12] la décomposition de l'ensemble des combinateurs suivant leurs effets, pour donner des bornes supérieures pour les mesures dynamiques (propositions 1 à 3) qui généralisent les résultats obtenus par Batini et Petorossi sur des bases classiques ou restreintes à un seul combinateur. En particulier, nous montrons que le nombre d'étapes de réduction d'une combinaison à effet non duplicatif est limité supérieurement par sa longueur.

Cette décomposition s'est aussi avérée un outil efficace pour l'obtention de condition suffisantes de non-existence de forme normale (propositions 4 à 8). Entre autres résultats, nous démontrons que s'il existe un sous-terme dans une combinaison X à effet duplicatif, dont le nombre d'éléments est strictement supérieur au nombre maximal de variables qu'il faut concaténer aux combinateurs de base dans X pour obtenir une forme normale, alors la combinaison X n'a pas de forme normale.

Une étude plus approfondie des relations entre mesure statiques et dynamiques a été entreprise dans [11] et l'on y trouvera également de nombreuses conditions suffisantes d'obtention et de non-obtention de forme normale en Logique Combinatoire.

Dans la section 1, nous donnons succinctement les définitions et les propriétés essentielles de la Logique Combinatoire, en introduisant la notion de base, de combinaison et de combiné.

Dans la section 2, nous rappelons la définition de la longueur d'un terme combinatoire avant d'introduire les mesures dynamiques suivantes : le nombre d'étapes de calcul adapté aux combinés, l'arité qui est égale à l'ordre lorsque le combinateur est propre, c'est-à-dire lorsque la forme normale du combiné associé ne comprend que des variables, la puissance de réécriture qui est en fait la longueur de la forme normale des combinés propres, et la puissance de réduction qui est égale à la différence entre l'arité plus une unité et la puissance de réécriture.

Dans la section 3, nous décrivons les quatre effets fondamentaux des combinateurs : l'effet cachant, l'effet composite, l'effet duplicatif et l'effet permutatif. Dans des cas très généraux, nous proposons des encadrements du nombre d'étapes de calcul en fonction de la longueur, lorsque la forme normale existe, ainsi que l'expression du nombre d'étapes de calcul en fonction de la puissance de réduction et de l'arité dans le cas des combinateurs à effet non composite.

Dans la dernière section, nous présentons plusieurs conditions suffisantes de non-existence de forme normale pour des expressions de Logique Combinatoire, portant sur la longueur lorsqu'elles ne contiennent pas de parenthèses, ou dans le cas contraire, sur le nombre d'éléments, c'est-à-dire le nombre de sous-termes de profondeur de parenthèses nulle, appartenant aux expressions étudiées.

1. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES

Nous rappelons brièvement la définition du système formel qu'est la Logique Combinatoire; pour de plus amples détails, le lecteur pourra se reporter aux traités classiques [12, 14].

1.1. Syntaxe

DÉFINITION 1 : Soit $\mathscr{V}$ un ensemble (infini) dénombrable d'objets appelés variables et $\mathscr{C}$ un ensemble (infini) dénombrable de constantes. Tout élément de $\mathscr{V} \cup \mathscr{C}$ est un *atome.*

DÉFINITION 2 : Soit l'alphabet terminal $\mathscr{V} \cup \mathscr{C} \cup \{ (,) \}$.

Nous appelerons *termes combinatoires,* les mots du langage L engendré par la grammaire suivante où $\mathscr{S}$ est l'axiome :

$$\mathscr{S} \to \mathscr{M} \mid \mathscr{S}\mathscr{M} \mid \mathscr{S}(\mathscr{T}),$$

$$\mathscr{V} \to x \mid x_1 \mid x_2 \mid \dots \mid y \mid y_1 \mid y_2 \mid \dots,$$

$$\mathscr{C} \to A \mid A_1 \mid A_2 \mid \dots \mid B \mid C \mid D \mid \dots \mid X \mid X' \mid Y \mid Y' \mid \dots \mid I \mid K \mid S,$$

$$\mathscr{M} \to \mathscr{V} \mid \mathscr{C},$$

$$\mathscr{T} \to \mathscr{S}\mathscr{M} \mid \mathscr{S}(\mathscr{T}).$$

Un *combinateur* est un terme combinatoire dont tous les atomes sont des constantes. Les combinateurs seront généralement représentés par une constante.

L'identité syntaxique des termes, atomes, etc. sera notée : « $\equiv$ ». Comme dans la plupart des cas, nous étudierons les combinateurs suivis d'un certain nombre de variables, introduisons la notion de combiné :

DÉFINITION 3 : Un *combiné* est un combinateur auquel est concaténée une suite de variables souvent appelées arguments du combinateur.

DÉFINITION 4 : Une *base* de combinateurs est un ensemble non vide dénombrable de combinateurs.

Tout combinateur appartenant à une base est appelé combinateur de base.

Cette notion sera nécessaire pour étudier la complexité statique d'un combinateur qui dépendra justement de la base choisie pour l'exprimer.

DÉFINITION 5 : Une *combinaison* sur une base B est définie récursivement par :

– tout combinateur de la base B est une combinaison;

– si X_2 est un combinateur de la base B et X_1 est une combinaison, alors $X_1\ X_2$ est une combinaison;

— si X_1 et X_2 sont des combinaisons (X_2 non combinateur de la base B), alors X_1 X_2 et $X_1(X_2)$ sont des combinaisons.

1.2. Opérations

DÉFINITION 6 : La relation « *X se réduit* en Y », notée $X \underset{1}{\triangleright} Y$, est définie à partir des trois constantes privilégiées I, K et S par :

axiome (I) : $IX \underset{1}{\triangleright} X, \quad \forall X \in \mathscr{V} \cup \mathscr{C};$

axiome (K) : $KXY \underset{1}{\triangleright} X, \quad \forall X, Y \in \mathscr{V} \cup \mathscr{C};$

axiome (S) : $SXYZ \underset{1}{\triangleright} XZ(YZ), \quad \forall X, Y, Z \in \mathscr{V} \cup \mathscr{C}.$

Nous dirons que le combiné X_i est obtenu à partir de X en *i étapes de calcul*, et nous noterons $X \underset{i}{\triangleright} X_i$ si, et seulement si, il existe $X_1, \ldots, X_{i-1}$ combinés tels que :

$$X \underset{1}{\triangleright} X_1 \underset{1}{\triangleright} \ldots \underset{1}{\triangleright} X_{i-1} \underset{1}{\triangleright} X_i.$$

Nous désignerons également par $\triangleright$ la fermeture transitive de la relation $\underset{1}{\triangleright}$.

Tout terme de la forme IX, KXY ou $SXYZ$ avec X, Y et Z combinés, est appelé un *radical* et le terme réduit correspondant X, X, $XZ(YZ)$ son *contracté*.

Nous dirons que X est sous *forme normale* si, et seulement si, X ne contient pas de radical. Si $U \triangleright X$ et X est sous forme normale, nous dirons que X est la forme normale de U [en abrégé *fn* (U)]. On peut étendre la relation $\underset{1}{\triangleright}$ à de nouveaux combinateurs. Nous utiliserons par la suite :

$B = S(KS)K$, qui vérifie $BXYZ \underset{1}{\triangleright} X(YZ)$,

$C = S(BBS)(KK)$, qui vérifie $CXYZ \underset{1}{\triangleright} XZY$,

$W = SS(SK)$, qui vérifie $WXY \underset{1}{\triangleright} XYY$.

Un des résultats fondamentaux de la Logique Combinatoire est le théorème suivant, car il prouve l'unicité de la forme normale, lorsqu'elle existe :

THÉORÈME DE CHURCH-ROSSER [23] : *Un combiné peut avoir au plus une forme normale.*

D'autre part, il existe plusieurs règles de calcul pour effectuer le processus de réduction.

Certaines de ces règles conduisent obligatoirement à la forme normale, si elle existe; par contre, d'autres peuvent ne pas l'obtenir, même si elle existe.

Par la suite, nous utiliserons systématiquement, la règle de réduction d'appel par nom (leftmost), car elle permet toujours d'obtenir la forme normale chaque fois qu'elle existe.

2. MESURES DE COMPLEXITÉ

Nous allons introduire dans ce chapitre un certain nombre de mesures de complexité associées aux combinateurs. Elles sont de deux natures différentes. D'une part, nous définissons des mesures statiques basées sur la structure même du combinateur telle la longueur qui est le nombre d'occurrences de combinateurs de base qui composent le terme combinatoire. D'autre part, nous considérons des mesures dynamiques comme par exemple :

– le nombre d'étapes de réduction qui n'est autre que le nombre d'applications de la relation $\triangleright$ pour parvenir à la forme normale;

– l'arité du combinateur, c'est-à-dire, le nombre minimal de variables qu'il faut lui concaténer pour obtenir la forme normale si elle existe;

– ou bien la puissance de réécriture du combinateur qui est la longueur de la forme normale si elle existe.

La longueur et le nombre d'étapes de réduction vérifient les axiomes d'Ausiello [1] et, en particulier, ceux de Batini et Pettorossi [4] qui sont bien adaptés à la Logique Combinatoire. Ce sont donc des mesures faibles de complexité au sens de Blum [5].

Par contre, l'arité, la puissance de réduction et la puissance de réécriture sont des mesures de complexité dynamiques qui ne vérifient les axiomes de Batini et Pettorossi que pour les combinateurs dont la forme normale, si elle existe, est propre.

Rappelons ces axiomes :

1) $|\,|$ est une mesure de complexité *statique* si :

– $|\,|$ est une application récursive de l'ensemble des combinateurs dans celui des entiers;

– $\forall n \in N$, le nombre des combinateurs X tel que $|X| = n$ est fini.

2) $|\,|$ est une mesure de complexité *dynamique* si :

– $|\,|$ est une application récursive partielle de l'ensemble des combinateurs dans celui des entiers;

– « le combinateur X a une *fn* » implique que « $|X|$ est défini »;

– « $|X|$ est défini » implique que « X a une *fn* » est un problème décidable;

– « $|X| = n$ » est décidable.

DÉFINITION 7 : L'*ordre* d'un combinateur X, noté $\mathcal{O}(X)$, est le plus petit entier $m > 0$, s'il existe, tel que toute réduction de $Xx_1 \ldots x_m x_{m+1} \ldots x_n$ est obtenue par l'application de la règle de déduction suivante :

$$X \rhd X' \Rightarrow XZ \rhd X'Z,$$

à une réduction de $Xx_1 \ldots x_m$, sinon $\mathcal{O}(X)$ est infini.

L'ajout de cette règle de déduction au système formel de la définition 4 s'explique intuitivement comme suit :

On peut ajouter un terme Z à droite d'un combiné possédant une *fn* sans changer le processus de réduction.

Exemple :

$$K x_1 x_2 x_3 \ldots x_n \rhd x_2 x_3 \ldots x_n \qquad \text{donc} \quad \mathcal{O}(K) = 2,$$

$$I x_1 x_2 \ldots x_n \rhd x_1 \ldots x_n, \qquad \mathcal{O}(I) = 1,$$

mais $WWWx_1 \ldots x_n$ n'a pas de forme normale et $\mathcal{O}(WWW)$ est nul, car $WWWx_1\, x_2 \ldots x_n \rhd WWWx_1\, x_2 \ldots x_n \rhd \ldots$

DÉFINITION 8 : Un combinateur X est *propre* si la forme normale de $Xx_1 \ldots x_n$, avec $n = \mathcal{O}(X)$, ne contient aucun combinateur.

Une combinaison de combinateurs d'une base B est propre si le combinateur qui la représente est propre, sachant que tout combinateur est une combinaison de combinateurs propres et inversement [12].

DÉFINITION 8 : L'*arité* d'un combinateur X, notée $\mathcal{A}(X)$ est égale à $\mathcal{O}(X)$ si X est propre, infinie sinon.

Exemple : $\mathcal{A}(S) = 3$, $\mathcal{A}(K) = 2$ mais $\mathcal{A}(CCC) = \infty$ tandis que $\mathcal{O}(CCC) = 2$.

DÉFINITION 10 : La *longueur* d'un terme combinatoire X, notée $l(X)$, est égale au nombre d'occurrences d'atomes qui le composent.

DÉFINITION 11 : La *puissance de réécriture* d'un combinateur X, notée $PR(X)$ est définie par :

– si X est propre, alors $PR(X)$ est égale à la longueur de $fn\,(Xx_1 \ldots x_m)$ où $m = \mathcal{A}(X)$;

– sinon $PR(X)$ est infinie.

Exemple : $Sx_1\, x_2\, x_3 \rhd x_1\, x_3\, (x_2\, x_3)$ donc $PR(X) = 4$ par contre $PR(CCC)$ est infinie.

DÉFINITION 12 : La *puissance de réduction* d'un combinateur X, notée $P(X)$, est égale à $\mathcal{A}(X) + 1 - PR(X)$ si X est propre, infinie sinon.

Intuitivement, il s'agit de la différence entre la longueur du combiné $Xx_1 \ldots x_n$ où $n = \mathscr{A}(X)$ et la longueur de $fn(Xx_1 \ldots x_n)$.

Ainsi, $P(S) = 0$, $P(K) = 2$ et $P(CCC)$ est infini.

NOTATION : Afin d'alléger les notations, nous désignerons par X_d le combiné $Xx_1 \ldots x_m$, où $m = \mathscr{A}(X)$.

DÉFINITION 13 : Le *nombre d'étapes de calcul* d'un combinateur X, noté $T(X)$, est défini par :

1) $T(X) = i$ ssi X_d se réduit en sa fn en i étapes c'est-à-dire ssi $X_d \underset{i}{\triangleright} fn(X_d)$;

2) $T(X)$ est infini sinon.

REMARQUE 1 : La mesure $T(X)$ est différente de la mesure $CT(X)$ introduite par Batini et Pettorossi dans [4]. En effet, $T(X)$ représente le nombre d'étapes de réduction du terme $Xx_1 \ldots x_m$ où $m = \mathscr{A}(X)$, tandis que $CT(X)$ donne le nombre de réductions du combinateur X seul. On peut d'ailleurs écrire :

$$T(X) \geqq CT(X)+1, \qquad \forall \text{ le combinateur } X.$$

T est une mesure plus fine que CT comme le montre l'exemple suivant :

Soit $X = SKI$ et $X' = I$

$$CT(X) = CT(X') = 0 \qquad \text{par contre} \quad T(X) = 2 \qquad \text{et} \qquad T(X') = 1.$$

REMARQUE 2 : Toutes les combinaisons que nous rencontrerons seront supposées d'ordre fini.

3. COMPLEXITÉ DES COMBINATEURS SUIVANT LEURS EFFETS

Craig a souligné dans [12] quatre propriétés caractéristiques des combinateurs suivant l'action qu'ils ont sur la suite des variables qui leur sont concaténées : effets cachant, duplicatif, composite et permutatif. Nous étudions, dans cette section, les liens existant entre les diverses mesures de complexité précédemment introduites, suivant les effets des combinateurs considérés.

DÉFINITION 14 : Soit un combinateur X, d'ordre n défini par

$$X x_1 \ldots x_n \triangleright Y \qquad \text{où} \qquad Y = fn(X x_1 \ldots x_n).$$

Nous disons que :

1) X a un effet *duplicatif* ssi il existe au moins un i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que Y contient au moins deux occurrences de x_i;

2) X a un effet *cachant* ssi il existe i, $1 \leqq i \leqq n$, tel que Y ne contient pas d'occurrence de x_i;

3) X a un effet *composite* ssi Y contient au moins une paire de parenthèses (toujours selon les conventions de parenthésage définies à la section 1);

4) X a un effet *permutatif* ssi il existe au moins i et j, $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ et des mots α, β, $\gamma \in \{ x_1, \ldots, x_n \}^*$ tels que $Y = \alpha\, x_j\, \beta\, x_i\, \gamma$.

N. B. : 1) Un combinateur X est dit à effet **A** lorsque le seul effet de X est **A** à l'exclusion de tout autre.

2) Un combinateur X est dit à effet **A** ou **B** :

– soit lorsqu'il est à effet **A**;

– soit lorsqu'il est à effet **B**;

– soit lorsque les seuls effets de X sont les effets **A** et **B** à la fois, à l'exclusion de tout autre.

3) Un combinateur X est dit à effet :

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ ou $\mathbf{A}_n$,

lorsqu'il est à effet :

$(\ldots((\mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A}_2)$ ou $\mathbf{A}_3)$ ou $\mathbf{A}_4) \ldots)$ ou $\mathbf{A}_n)$.

LEMME 1 : *Soit J un ensemble fini d'indices.*

Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs propres à effet cachant, permutatif ou composite.

Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_i, $i \in J$ alors X a une fn et $1 \leqq \mathrm{T}(X) \leqq l(X)$.

DÉFINITION 15 : Une combinaison X de combinateurs de base sera dite linéaire lorsqu'aucune parenthèse n'apparaît dans X.

REMARQUE : Dans la suite de l'exposé, J désignera toujours un ensemble d'indices.

Pour démontrer la proposition 3 qui suit, nous aurons besoin du Lemme suivant :

LEMME 2 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs propres à effet permutatif de même arité a.*

Soit U une combinaison linéaire formée d'occurences de A_i telle que $l(U) = b$ avec $b > a$.

Soit V tel que $U \underset{t}{\rhd} V$ et $l(V) = a$ alors V est une combinaison linéaire formée d'occurrences de A_i et $t = b - a$.

DÉFINITION 16 : Nous dirons qu'un combinateur X a un effet permutatif simple ssi une seule variable est permutée avec une autre dans fn (X_d).

PROPOSITION 3 : *Soit Y un combinateur propre à effet permutatif simple. Soit X une combinaison linéaire formée d'occurrences de Y.*
Alors X a une fn et
– si $l(X) \geqq \mathscr{A}(Y)$, $l(X)-\mathscr{A}(Y)+1 \leqq T(X) \leqq l(X)$;
– sinon $1 \leqq T(X) \leqq l(X)$.

Démonstration : Si $l(X) \geqq \mathscr{A}(Y)$.

Soit X' la combinaison linéaire formée d'occurrences de Y de longueur $\mathscr{A}(Y)$ obtenue à partir de X après le nombre de réductions défini dans le lemme 2; un tel X' existe car le lemme 2 peut s'appliquer au combinateur Y puisque $Y \in (A_i)$.

'n a donc

$$T(X) = T(X')+l(X)-l(X'),$$

or

$$l(X') = \mathscr{A}(Y),$$

il est évident que

$$T(X') \geqq 1,$$

$$T(X') \leqq l(X').$$

En effet, soit X_i' tel que $X' \underset{i}{\triangleright} X_i$. Alors, à chaque étape de réduction, le nombre d'occurrences de combinateurs Y dans X_i' diminue au moins d'une unité.

D'où

$$l(X)-\mathscr{A}(Y)+1 \leqq T(X) \leqq l(X)-\mathscr{A}(Y)+\mathscr{A}(Y).$$

Si $l(X) < \mathscr{A}(Y)$ alors

$$1 \leqq T(X) \leqq l(X) \qquad (\textit{voir} \text{ lemme } 1).$$

D'où le résultat. ■

Exemple illustrant la proposition 3 : Soit $X = CCCCC$

$$5-3+1 \leqq T(X) \leqq 5 \qquad \text{soit} \quad 3 \leqq T(X) \leqq 5,$$

or $T(X) = 4$.

THÉORÈME 1 : *Soit* $(A_j)_{j\in\{1,n\}}$ *une famille de combinateurs de base à effets duplicatif, cachant ou permutatif mais non composite tels que :*

$P(A_j) > 0$ avec $1 \leqq j \leqq n$.

Pour toute combinaison linéaire propre X *possédant une fn, formée d'occurrences de* A_i *on a :*

$$\boxed{\frac{l(X)-1+P(X)}{\displaystyle\operatorname*{Sup}_{j=1,n} P(A_j)} \leqq T(X) \leqq \frac{l(X)-1+P(X)}{\displaystyle\operatorname*{Inf}_{j=1,n} P(A_j)}.}$$

Démonstration : Il est trivial qu'à chaque étape de réduction, la longueur du terme à réduire Z diminue de la puissance de réduction du combinateur le plus à gauche dans Z (par définition même de cette puissance de réduction).

Soit X_k tel que : $X \underset{k}{\rhd} X_k$.

Supposons $T(X)$ fini, autrement dit X a une *fn*.

Lorsqu'on a atteint le plus petit k tel que $l(X_k) = l(X_{fn})$, (un tel k existe car $T(X)$ est fini), c'est-à-dire, lorsqu'on a atteint la *fn* de X_d notée X_{fn}, le processus de réduction de X_d s'arrête.

En effet, on démontre de façon évidente que pour tout

$i \in \{1, k-1\}$, on a $l(X_i) > l(X_k)$,

car

$\forall j \in \{1, n\}$, $P(A_j) > 0$.

Cherchons maintenant les bornes du nombre d'étapes de calcul de X.

On a :

$$l(X_d) = l(X) + \mathscr{A}(X) \quad \text{et} \quad l(X_{fn}) = PR(X),$$

la différence de longueur entre le combiné à réduire et sa *fn* est donc :

$$l(X_d) - l(X_{fn}) = l(X) + \mathscr{A}(X) - PR(X),$$

soit

$$l(X_d) - l(X_{fn}) = l(X) + P(X) - 1,$$

car

$$P(X) = \mathscr{A}(X) + 1 - PR(X).$$

A chaque étape de réduction, la longueur de l'expression transitoire diminue de la puissance de réduction du combinateur le plus à gauche dans cette expression donc au maximum de

$$\operatorname*{Sup}_{j=1,n} P(A_j),$$

et au minimum de

$$\operatorname*{Inf}_{j=1,n} P(A_j).$$

On peut donc écrire :

$$l(X_d)-l(X_{fn}) \leqq T(X) . \operatorname*{Sup}_{j=1,n} P(A_j),$$

et

$$l(X_d)-l(X_{fn}) \geqq T(X) . \operatorname*{Inf}_{j=1,n} P(A_j),$$

d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 1 : *Soit A un combinateur de base à effets duplicatif, cachant ou permutatif tel que $P(A) > 0$.*

Pour toute combinaison linéaire propre X formée d'occurrences de A, possédant une fn, on a :

$$T(X)=\frac{l(X)-1+P(X)}{P(A)}.$$

COROLLAIRE 2 : *Soit (A_i) une famille de combinateurs de base à effets duplicatif, cachant ou permutatif de même puissance de réduction positive $P(A_i)$.*

Pour toute combinaison linéaire propre X formée d'occurrences de A_i, possédant une fn, on a l'égalité :

$$T(X)=\frac{l(X)-1+P^{i}(X)}{P(A_i)}.$$

COROLLAIRE 3 : *Soit $(A_i)_{i \in \{1,n\}}$ une famille de combinateurs de base à effets duplicatif, cachant ou permutatif tels que $P(A_i) > 0$.*

Pour toute combinaison linéaire propre X formée d'occurrences de A_i, possédant une fn, on a :

$$T(X) \leqq \frac{l(X)-1+\mathscr{A}(X)}{\operatorname*{Inf}_{i=1,n} P(A_i)}.$$

Démonstration : A la dernière réduction, on réécrit au moins un atome; cela veut dire que la longueur de la fn de X est au moins égale à une unité Donc

$$PR(X) \geqq 1.$$

Donc

$$P(X) = \mathscr{A}(X)+1-PR(X) \leqq \mathscr{A}(X)+1-1 = \mathscr{A}(X).$$

D'où le résultat. ∎

REMARQUE : Le théorème 1 et ses trois corollaires nous donnent le lien unissant une mesure dynamique à une mesure statique dans le cas particulier d'une combinaison linéaire propre formée de combinateurs à effets quelconques sauf composite, de puissance de réduction positive.

Cependant, ils ne nous permettent pas de donner l'ordre de la complexité de calcul.

Nous allons maintenant étudier une forme particulière de la combinaison X qui nous permette de donner un ordre de grandeur de la complexité de calcul de X, grâce au théorème 1. Pour cela, nous aurons besoin du théorème 2.

DÉFINITION 17 : On dira qu'un combinateur X a un effet cachant de degré n ssi il existe n variables qui n'ont pas d'occurrences dans $fn(X)$.

THÉORÈME 2 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs de base à effet cachant de degré n et d'arité a.*

Toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_i vérifie l'inégalité :

$$\mathscr{A}(X) \leqq a(n+1)-n^2.$$

Démonstration : On pourra montrer de manière évidente que toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_i telle que $l(X) > a$ se réduit, après un certain nombre d'étapes, en une combinaison linéaire X' formée d'occurrences de A_i telle que $l(X') \leqq a$ et telle que $\mathscr{A}(X') = \mathscr{A}(X)$.

Cette propriété est essentiellement due à l'effet uniquement cachant des A_i.

Il nous faut donc maintenant trouver l'arité maximale d'une telle expression X'.

On sait que chaque étape de réduction entraîne la disparition de n arguments.

On démontre aisément que l'arité de X' sera maximale si les n arguments qui disparaissent au cours d'une réduction sont tous des variables et non des combinateurs et s'ils sont placés à la fin de l'expression que l'on veut réduire, c'est-à-dire, si la règle de réduction des A_i est de la forme :

$$A_i x_1 \ldots x_a \underset{1}{\triangleright} x_1 \ldots x_{a-n}.$$

On peut se rendre compte intuitivement que, dans ce cas, l'arité de la combinaison est maximale lorsque le nombre de combinateurs dans les expressions transitoires est maximal.

Soit X'' la combinaison linéaire formée d'occurrences de A_i, de longueur inférieure ou égale à a dont l'arité est maximale.

On a donc $\mathscr{A}(X') \leqq \mathscr{A}(X'')$.

X'' se décompose de la manière suivante :

$$X'' = A_j \alpha \quad \text{avec} \quad l(\alpha) \leqq a-1,$$
$$\text{et} \quad \alpha \in \{C\}^*,$$
$$\alpha \text{ combinaison linéaire des } A_i.$$

Pour que l'arité de X'' soit maximale, il faut donc que :

$$l(\alpha) = a - n$$

ainsi aucun combinateur appartenant à α ne disparaît au cours de la première réduction.

Donc X''_d s'écrit :

$$X''_d = \overbrace{A_j A_{i_1} \ldots A_{i_{a-n}} x_1 \ldots x_n}^{\text{a éléments}},$$

où A_{i_k} est un élément quelconque de $\{A_i\}_{i \in J}$.

Puisque $j \in J$ on a : $A_j x_1 \ldots x_a \triangleright x_1 \ldots x_{a-n}$ donc :

$$X''_d \underset{1}{\triangleright} A_{i_1} \ldots A_{i_{a-n}} = A_{i_1} \underbrace{A_{i_2} \ldots A_{i_{a-n}}}_{a-n-1} = X''_1.$$

Puisque $\mathscr{A}(A_{i_1}) = a$, il faut ajouter $n+1$ arguments à X''_1 pour qu'une autre réduction soit possible, c'est-à-dire :

$$X''_{1a} = A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_n} x_1 \ldots x_{n+1},$$

alors puisque $i_1 \in J$, on a :

$$X''_{1a} \underset{1}{\triangleright} A_{i_2} \ldots A_{i_n} x_1 = A_{i_2} A_{i_3} \ldots A_{i_n} x_1 = X''_2.$$

Il faut ici encore ajouter $n+1$ arguments à X''_2 pour la réduction suivante soit possible.

Généralisons :

Soit

$$X''_l = \underbrace{A_{i_l} A_{i_{l+1}} \ldots A_{i_n}}_{a-n-l} \underbrace{x_1 \ldots x_{l-1}}_{l-1}.$$

Puisque $\mathscr{A}(A_{i_l}) = a$, on peut écrire, en ajoutant à X_l'' $n+1$ arguments

$X_{l_a}'' = A_{il} A_{il-1} \ldots A_{i_n} x_1 \ldots x_{l-1} x_1' \ldots x_{n+1}'$,

donc

$X_{l_a}'' \underset{1}{\triangleright} A_{i_{l+1}} A_{i_{l+2}} \ldots A_{i_n} x_1 \ldots x_{l-1} x_1' = X_{l+1}''$,

de même X_{l+1_a}'' s'obtiendra à partir de X_{l+1}'' en ajoutant $n+1$ arguments.

Puisqu'il y a $a-n+1$ étapes de réduction (c'est la longueur de X'') pour arriver à la *fn* de X'', le nombre total d'arguments utilisés pour que toutes les réductions soient possibles est :

$n+(a-n)(n+1)$.

En effet, on utilise n arguments pour la première réduction et $n+1$ pour les suivantes.

Donc

$\mathscr{A}(X'') = n+(a-n)(n+1) = an+a-n^2$.

Comme

$\mathscr{A}(X') \leqq \mathscr{A}(X'')$,

par définition de X'' on a

$\mathscr{A}(X) = \mathscr{A}(X') \leqq an+a-n^2$,

d'où le résultat. ■

COROLLAIRE 4 : *Soit $(A_i)_{i \in \{1,n\}}$ une famille de combinateurs de base à effet cachant de degré n et d'arité a.*

Toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_i possède une fn et est telle que

$$T(X) \leqq \frac{l(X)-1+a(n+1)-n^2}{1+n}.$$

Démonstration : Les combinateurs A_i vérifient les conditions du corollaire 3 avec

$P(A_i) = a+1-(a-n) = 1+n$,

ici

$\operatorname*{Inf}_{i=1,n} P(A_i) = P(A_i) = 1+n$,

et

$\mathscr{A}(X) \leqq an+a-n^2$,

d'où le résultat. ■

Donnons quelques exemples :

1) Pour le combinateur K, $n = 1$ et $a = 2$; on a donc

$$T(X) \leqq \frac{l(X)+2}{2},$$

or, si X est une combinaison linéaire de combinateurs K, on sait que :

$$T(X) = \frac{l(X)}{2} + 1 \qquad \text{si} \quad l(X) \text{ est paire,}$$

et

$$T(X) = \frac{l(X)+1}{2} \qquad \text{si} \quad l(X) \text{ est impaire.}$$

2) Soit le combinateur F défini comme suit :

$$\mathrm{F}\, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \underset{1}{\triangleright} x_1 x_3 x_5,$$

alors $n = 2$ et $a = 5$.

On a donc

$$T(X) \leqq \frac{l(X)+10}{3},$$

si X est une combinaison linéaire de combinateurs F et de combinateurs tels que $n = 2$ et $a = 5$.

4. CONDITIONS SUFFISANTES DE NON OBTENTION DE FORMES NORMALES

Nous donnons dans ce paragraphe plusieurs conditions suffisantes pour que le nombre d'étapes de calcul soit infini, autrement dit, des conditions suffisantes pour que certains combinés n'aient pas de forme normale. Nous allons, tout d'abord, étudier les combinaisons linéaires de combinateurs ayant une puissance de réduction négative ou nulle. La forme normale de telles combinaisons n'existe pas toujours étant donné que la longueur du terme combinatoire de transition ne peut que croître ou rester constante. Une condition de non-obtention de forme normale pour des combinaisons de ce type est la suivante :

PROPOSITION 4 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs à effets quelconques mais non composite, tels que $P(A_i) \leqq 0$, $\forall\, i \in J$.*

Toute combinaison linéaire propre X formée d'occurrences de A_i telle que $l(X) > \sup\limits_{i \in J} \mathscr{A}(A_i)$ a un nombre d'étapes de calcul $T(X)$ infini.

Démonstration : Soit A_k le combinateur le plus à gauche dans X.

Par hypothèse, $P(A_k) \leqq 0$ car $k \in J$.

Soit X_1 l'expression telle que $X \underset{1}{\triangleright} X_1$, on peut écrire :

$$l(X_1) = l(X) - P(A_k),$$

puisque $P(A_k) \leqq 0$ il vient immédiatement

$$l(X_1) \geqq l(X),$$

et *a fortiori*

$$l(X_1) > \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i).$$

Étudions de plus près la structure de X_1 :

X_1 est une combinaison propre formée d'occurrences de A_i puisque les arguments de A_k sont tous des A_i : en effet, comme $k \in J$,

$$\mathscr{A}(A_k) \leqq \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i) < l(X).$$

Puisque A_k n'a pas d'effet composite et que X est linéaire, X_1 est linéaire.

Donc X_1 a les mêmes propriétés que X.

Généralisons.

Soit X_i l'expression telle que $X \underset{i}{\triangleright} X_i$.

Supposons que X_i soit une combinaison linéaire propre formée d'occurrences de A_i de longueur supérieure ou égale à $l(X)$ et *a fortiori* à $\operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i)$, d'après nos hypothèses.

Montrons que tout X_{i+1} tel que $X_i \underset{1}{\triangleright} X_{i+1}$ vérifie les mêmes propriétés que X_i.

Soit A_l le combinateur le plus à gauche dans X_i.

Par hypothèse $P(A_l) \leqq 0$ car $l \in J$

or

$$l(X_{i+1}) = l(X_i) - P(A_l),$$

donc

$$l(X_{i+1}) \geqq l(X_i),$$

comme $l(X_i) \geqq l(X)$ il vient immédiatement

$$l(X_{i+1}) \geqq l(X) \geqq \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i).$$

De plus, comme $\mathscr{A}(A_l) \leqq \operatorname{Sup} \mathscr{A}(A_i) < l(X_i)$ et que X_{i+1} est une combinaison propre formée d'occurrences de A_i, les arguments de A_l sont uniquement des combinateurs A_i.

Il est évident que X_{i+1} est linéaire.

Donc $\forall i \in J$, X_i a les mêmes propriétés que X.

Cela veut dire que $\forall i \in J$, il existera toujours une réduction possible de X_i, en prenant le combinateur A_i le plus à gauche dans X_i.

Celui-ci existe $\forall i \in J$, car X_i vérifie toujours les mêmes propriétés, celles de X, donc

$T(X)$ est infini. ∎

On se rend compte que la présence de l'effet duplicatif parmi les effets d'un combinateur est nécessaire pour que ce combinateur ait une puissance de réduction négative ou nulle. Précisons l'influence de la nature de l'effet duplicatif sur un type particulier des combinaisons décrites dans la proposition 4.

DÉFINITION 19 : Nous dirons qu'un combinateur X tel que

$$X x_1 \ldots x_n \rhd Y = fn(X),$$

a un effet duplicatif de degré n et de puissance $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ssi :

1) $\exists n \geqq 0$ tel que les variables $x'_1, \ldots, x'_n$ ont plus d'une occurrence dans Y;

2) le nombre d'occurrences de x'_1 dans Y est α_i.

PROPOSITION 5 : *Soit α un combinateur à effets permutatif, cachant de degré n_1 ou duplicatif de degré n_2 et de puissance $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_2})$.*

Si $n_1 + n_2 < \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i$ alors toute combinaison linéaire propre X formée d'occurrences de α et vérifiant $l(X) > \mathscr{A}(\alpha)$ n'a pas de forme normale.

Démonstration: Parmi les $l(X)$ éléments de X, il y a tout d'abord n_0 atomes qui seront soit permutés soit inchangés après la première réduction, puis n_1 atomes qui disparaîtront à cause de l'effet cachant de α, et enfin n_2 atomes qui auront plus d'une occurrence dans le terme obtenu après la première réduction.

Après la première réduction, le terme obtenu contient les n_0 atomes inchangés ou permutés et les $\sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i$ éléments qui sont apparus par l'effet duplicatif de α.

Donc $n_0 + n_1 + n_2$ représente l'arité de α soit $\mathscr{A}(\alpha)$ et $n_0 + \sum_{i=1}^{n_2} \alpha_i$ la puissance de réécriture de α, soit $PR(\alpha)$.

Nous pouvons alors calculer la puissance de réduction de A :

$$P(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha)+1-PR(\alpha)$$

$$=n_0+n_1+n_2+1-n_0-\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i$$

$$=n_1+n_2+1-\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i.$$

Or, d'après la proposition 4 qui peut s'appliquer à X et α, une condition suffisante pour que $T(X)$ soit infinie est que la puissance de réduction de α soit négative ou nulle.

Donc, si $n_1+n_2+1-\sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i \leqq 0$ alors $T(X)$ est infinie, soit si

$$n_1+n_2 \leqq \sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i-1;$$

or, par hypothèse

$$n_1+n_2 < \sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i,$$

donc $T(X)$ est infinie. ∎

Exemple : Soit A un combinateur défini par :

$$A\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6 \rhd x_3\,x_1\,x_1\,x_1\,x_4\,x_6\,x_4,$$

A a un effet cachant de degré 2, un effet duplicatif de degré 2 et de puissance (3, 2).

Donc $n_1=2$, $n_2=2$, $\sum_{i=1}^{2}\alpha_i=5$.

On a bien ici

$$n_1+n_2 < \sum_{i=1}^{n_2}\alpha_i,$$

donc toute combinaison linéaire formée d'occurrences de A de longueur supérieure à 6 n'a pas de *fn*.

Il est intéressant de préciser certaines conditions de non-obtention de formes normales pour des expressions uniquement composées de combinateurs à effets duplicatifs.

Étudions tout d'abord les expressions linéaires.

DÉFINITION 20 : Soit un combinateur X et x_i ses arguments $(i \in J)$. On dira qu'un effet α de X tombe sur des atomes x_j $(j \in J)$ lorsque au cours de la réduction, les atomes x_j sont modifiés par l'effet α.

Exemples :

– Dans $K x_1 x_2 \rhd x_1$, l'effet cachant de K tombe sur x_2.

– Dans $W x_1 x_2 \rhd x_1 x_2 x_2$, l'effet duplicatif de W tombe sur x_2.

– Dans $B x_1 x_2 x_3 \rhd x_1 (x_2 x_3)$, l'effet composite de B tombe sur x_2 et x_3.

– Dans $C x_1 x_2 x_3 \rhd x_1 x_3 x_2$, l'effet permutatif de C tombe sur x_2 et x_3.

N. B. : Les effets permutatifs et composites tombent toujours sur au moins deux variables, alors que les autres effets peuvent tomber sur une seule variable.

PROPOSITION 6 : *Soit $(A_i)_{i \in \{1, n\}}$ une famille de combinateurs à effet duplicatif.*

Soit $(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ la suite des indices des atomes les plus à gauche sur lesquels tombent respectivement les effets duplicatifs de $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$.

Soit X_j tel que $X \underset{j}{\rhd} X_j$. On posera $X = X_0$.

Toute combinaison linéaire X formée d'occurrences de A_i telle qu'il existe $j \geqq 0$ avec

$$l(X_j) > \max_i k_i,$$

ne possède pas de fn.

Démonstration : Supposons qu'il existe un indice j positif ou nul tel que :

$$l(X_j) > \max_i k_i,$$

X_j peut s'écrire :

$$X_j = A_p \alpha \qquad \text{avec} \quad \alpha \in \{C\}^* \quad \text{et} \quad p \in \{1, n\},$$

or $l(X_j) > k_p$ car $p \in \{1, n\}$.

Donc, au moins un effet duplicatif de A_p tombe sur un combinateur appartenant à α, ce qui veut dire

$$l(X_{j+1}) \geqq l(X_j),$$

car A_p a un effet uniquement duplicatif.

Donc $l(X_{j+1}) > \max\limits_i k_i$.

On démontre, plus généralement, que

$$\forall k, \qquad l(X_{j+k}) \geqq \max_i k_i,$$

à cause de l'effet uniquement duplicatif des combinateurs A_i.

Cela veut dire que, dans ce cas, pour tout k, une nouvelle étape de réduction pourra s'effectuer sur X_{j+k}, en prenant le combinateur A_i le plus à gauche dans X_{j+k}.

Celui-ci existera toujours car, pour tout k, $l(X_{j+k}) > 1$ donc $T(X)$ est infinie. ■

Que devient la proposition 6 quand l'expression à réduire n'est plus linéaire?

Pour étudier les combinaisons parenthésées, nous devons tout d'abord définir le nombre d'éléments d'un terme combinatoire.

DÉFINITION 21 : Nous appellerons nombre d'éléments d'un combinateur X, noté $N(X)$, l'entier défini récursivement comme suit :

1) si X combinateur de base, $N(X) = 1$;

2) si $X = X_1 X_2$, $N(X) = N(X_1)+N(X_2)$;

3) si $X = X_1 (X_2)$, $N(X) = N(X_1)+1$.

Exemple : si

$X = B(C(KW))\, BC$; alors $N(X) = 4$;

si

$X = B(C(KW))\,(BC)$, alors $N(X) = 3$.

PROPOSITION 7 : *Soit $(A_i)_{i\in J}$ une famille de combinateurs à effet duplicatif. Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_i.*

Soit X_j tel que : $X \underset{j}{\triangleright} X_j$, avec $X = X_0$.

S'il existe un entier $j \geqq 0$ tel que $N(X_j) > \max\limits_{i\in J} k_i$ (la suite des k_i étant définie comme dans la proposition 4), alors X n'a pas de fn.

Démonstration : Supposons qu'il existe j tel que $N(X_j) > \max k_i$.

On peut écrire X_j sous la forme :

$X_j = A_p \alpha$ avec $\alpha \in \{C \cup \{(\} \cup \{)\}\}^*$,

puisque $p \in J$, on a $N(X_j) > k_p$.

Cela veut dire qu'au moins un effet duplicatif de A_p tombe sur un combinateur ou sur une combinaison de combinateurs de base incluse entre deux parenthèses.

Soit X_{j+1} tel que $X_j \underset{1}{\triangleright} X_{j+1}$.

Montrons que l'on a :

$N(X_{j+1}) \geqq N(X_j)$.

Nous avons deux cas à étudier suivant la structure de X_j, donc de α.

1^{er} *cas :*

$\alpha = (A_r \alpha')\alpha''$ avec α' et $\alpha'' \in \{C \cup \{(\} \cup \{)\}\}^*$.

1^er^ *sous-cas :* Un effet duplicatif ne tombe pas sur $(A_r\, \alpha')$.

Calculons le nombre d'éléments de $X_j = A_p\,(A_r\, \alpha')\, \alpha''$.

$N(X_j) = 1+1+N(\alpha'') = 2+N(\alpha'')$.

X_{j+1} s'écrit :

$$X_{j+1} = A_r\,\alpha'\,\alpha''' \qquad \begin{cases} \text{avec} \quad \alpha''' \in \{C \cup \{)\} \cup \{(\}\}^*, \\ \text{avec} \quad N(\alpha''') > N(\alpha''), \end{cases}$$

car c'est dans α'' que se trouve l'occurrence dupliquée.

$N(X_{j+1}) = 1+N(\alpha')+N(\alpha''')$,

or

$N(\alpha') \geqq 1$.

Donc

$N(X_{j+1}) > 1+1+N(\alpha'')$,

d'où

$N(X_{j+1}) > N(X_j)$.

2^e^ *sous-cas :* Un effet duplicatif tombe sur $(A_r\,\alpha')$. X_{j+1} s'écrit alors :

$X_{j+1} = A_r\,\alpha'\,(A_r\,\alpha')\,\alpha'''$,

avec $N(\alpha''') \geqq N(\alpha'')$.

$N(X_{j+1}) = 1+N(\alpha')+1+N(\alpha''')$,

donc

$N(X_{j+1}) \geqq 2+N(\alpha')+N(\alpha'')$,

or

$N(\alpha') \geqq 1$,

d'où

$N(X_{j+1}) \geqq 3+N(\alpha'')$.

Donc

$N(X_{j+1}) > N(X_j)$.

2^e^ *cas :*

$\alpha = A_r\,\alpha' \qquad \text{avec} \quad \alpha' \in \{C \cup \{)\} \cup \{(\}\}^*$.

1^er^ *sous-cas :* Un effet duplicatif ne tombe pas sur A_r, alors il existe dans α' au moins une occurrence qui sera dupliquée, donc $N(\alpha'') \geqq N(\alpha')+1$ si α'' désigne l'expression obtenue à partir de α, après intervention de l'effet duplicatif de A_p

$\alpha'' \in \{C \cup \{(\} \cup \{()\}^*$,

X_j s'écrit :

$X_j = A_p A_r \alpha'$,

donc

$N(X_j) = 1+1+N(\alpha') = 2+N(\alpha')$,

X_{j+1} s'écrit :

$X_{j+1} = A_r \alpha''$,

donc

$N(X_{j+1}) = 1+N(\alpha'')$,

soit

$N(X_{j+1}) \geqq 1+N(\alpha'')+1$.

Ce qui veut dire : $N(X_{j+1}) \geqq N(X_j)$.

2^e^ *sous-cas :* Un effet duplicatif tombe sur A_r, alors X_{j+1} s'écrit :

$X_{j+1} = A_r A_r \alpha''$ avec $\alpha'' \in \{C \cup \{)\} \cup \{()\}^*$,

et $N(\alpha'') \geqq N(\alpha')$,

donc

$N(X_{j+1}) \geqq 1+1+N(\alpha')$,

d'où

$N(X_{j+1}) \geqq N(X_j)$.

Donc, quelle que soit la forme de X_j on a :

$N(X_{j+1}) \geqq N(X_j)$.

On pourrait montrer de manière évidente que, pour tout $k \geqq 0$

$N(X_{j+k}) \geqq N(X_j)$,

et *a fortiori* que :

$N(X_{j+k}) > \max_{i \in J} k_i$.

Cela veut dire que, dans ce cas, pour tout $k \geqq 0$, une réduction ultérieure aura lieu sur X_{j+k}, en prenant le combinateur A_i le plus à gauche dans X_{j+k}.

Cet A_i existera toujours car $\forall k, N(X_{j+k}) > 1$.

Donc $T(X)$ est infinie. ■

L'influence de la structure des sous-chaînes incluses dans une paire de parenthèses sur l'existence de la forme normale d'une expression parenthésée formée de combinateurs à effet duplicatif paraît importante. C'est ce que nous montrons dans la proposition 8 et dans ses trois corollaires.

Pour cela, nous allons introduire la notion d'ensemble de sous-termes d'un combinateur X, notée $E(X)$.

On sait que si un combinateur X n'est pas de base, il peut s'exprimer en fonction de combinateurs de base, si cette base est bien choisie.

Intuitivement, si X n'est pas un combinateur de base, l'ensemble des sous-termes de X comprend le combinateur X lui-même, et les sous-chaînes incluses entre deux parenthèses de même niveau dans l'expression de X en fonction des combinateurs de base.

Par contre, si X est un combinateur de base, l'ensemble de ses sous-termes est vide.

Exemples : Soit la base (A, B, C) :

– si $X = A$, alors $E(X) = \emptyset$;

– si $X = AB$, alors $E(X) = X$;

– si $X = CA\,(A\,(B\,(CAB)\,CCA))$, alors

$$E(X) = \{X\} \cup \{A(B(CAB)CCA)\} \cup \{B(CAB)CCA\} \cup \{CAB\}.$$

DÉFINITION 22 : Soit un combinateur quelconque X.

On définit l'ensemble $E(X)$ des sous-termes de X comme l'ensemble défini récursivement comme suit :

1) si X est un combinateur de base, alors $E(X) = \emptyset$;

2) si $X = U(V)$, alors $E(X) = \{X\} \cup \{V\} \cup E(U) \cup E(V)$;

3) si $X = UV$, alors $E(X) = \{X\} \cup E(U) \cup E(V)$.

Tout élément de $E(X)$ est appelé sous-terme de X.

Remarque 1 : Si X est une combinaison linéaire de combinateurs de base, alors $E(X) = \{X\}$.

Remarque 2 : Cette notion de sous-terme d'un combinateur est vaguement liée à la mesure de complexité statique N (nombre d'éléments).

En effet, $N(X)$ représente la somme du nombre de combinateurs de base non parenthésés et du nombre de sous-termes du premier niveau (c'est-à-dire, d'expressions incluses entre des parenthèses de niveau 1).

PROPOSITION 8 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs de base à effet duplicatif.*

Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_i.

S'il existe un sous-terme X^a de X tel que :

$$N(X^a) > \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i),$$

alors X n'a pas de forme normale.

Démonstration : Si $\forall j \in \mathbb{N}$, $X \underset{j}{\triangleright} X_j$ et X_j ne commence pas par X^a alors $T(X)$ est infinie.

Sinon $\exists j$ tel que $X_j = X^a \alpha$ avec $\alpha \in (V \cup C)^*$; en effet, dans ce cas, si X a pour sous-terme X^a, tout X_k tel que $X \underset{k}{\triangleright} X_k$ avec $k < j$, aura pour sous-terme X^a, quelle que soit l'arité des combinateurs utilisés pour réduire X en X_k. (Ce fait est dû à l'effet uniquement duplicatif des combinateurs A_i.)

Puisque $X_j = X^a \alpha$, on peut écrire :

$$N(X_j) = N(X^a) + N(\alpha) \geqq N(X^a)$$

Par hypothèse,

$$N(X^a) > \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i),$$

donc, *a fortiori*

$$N(X_j) > \operatorname*{Sup}_{i \in J} \mathscr{A}(A_i) > \max_{i \in J} k_i$$

(la suite des k_i étant définie dans la proposition 6).

D'après la proposition 7, X n'a donc pas de forme normale. ∎

Exemple : Soient A, B, C trois combinateurs de base à effet duplicatif tels que :

$$A x_1 x_2 \triangleright x_1 x_1 x_2 x_2,$$

$$B x_1 \triangleright x_1 x_1 x_1,$$

et

$$C x_1 x_2 x_3 \triangleright x_1 x_2 x_2 x_3 x_3 x_3.$$

La combinaison X telle que :

$$X = CAB(A(AB(CA))),$$

n'a pas de *fn*.

En effet X a pour sous-terme :
- X;
- $A(AB(CA))$;
- $AB(CA)$; et
- CA.

Or,

$$N(X) = 4 > \mathrm{Sup}[\mathscr{A}(A), \mathscr{A}(B), \mathscr{A}(C)] = 3.$$

COROLLAIRE 1 : *Soit $(A_i)_{i \in \{1, n\}}$ une famille de combinateurs de base à effet duplicatif.*

Soit $(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ la suite des indices des atomes les plus à gauche sur lesquels tombent respectivement les effets duplicatifs de $A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n$.

Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_i.

S'il existe un sous-terme X^a de X tel que :

$$N(X^a) > \max_i k_i,$$

alors X n'a pas de forme normale.

Exemple : Si l'on prend la base (A, B, C) de l'exemple précédent, on remarque que tout combinateur X de longueur supérieure à 2, formé d'occurrences de A, B, C n'a pas de forme normale.

COROLLAIRE 2 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs de base à effet duplicatif.*

Soit X une combinaison formée d'occurrences de A_i.

S'il existe un indice j tel que $X \underset{j}{\triangleright} X_j$ et que X_j contienne n occurrences consécutives de A_i $(i \in J)$ avec $n > \underset{i \in J}{\mathrm{Sup}}\, \mathscr{A}(A_i)$, alors X n'a pas de forme normale.

Démonstration : Si X contient n occurrences de A_i, alors, quelle que soit l'arité des combinateurs utilisés pour réduire X en X_j, $(X \underset{j}{\triangleright} X_j)$, le combiné X_j contiendra toujours au moins n occurrences de A_i consécutives.

Si $\forall j \in N$, $X \underset{j}{\triangleright} X_j$ et X_j ne commence pas par les n occurrences de A_i alors $T(X)$ est infinie.

Sinon $\exists j$ tel que $X_j = A_i^n \beta$, $\beta \in (V \cup C)^*$. Comme $n > \mathscr{A}(A_i)$, il en résulte que $X_{j+1} = A_i^p \beta$, $p > n$ et $T(X)$ est infinie. ∎

Exemple : Soient A et B deux combinateurs de base à effet duplicatif tels que

$$A x_1 x_2 x_3 x_4 \triangleright x_1 x_2 x_3 x_3 x_4,$$

$$B x_1 x_2 x_3 \triangleright x_1 x_2 x_2 x_3 x_3.$$

La combinaison X telle que

$$X = AB(A(B(AABBA(BBA)A))),$$

n'a pas de forme normale, car Sup $[\mathscr{A}(A), \mathscr{A}(B)] = 4$ et car X contient cinq occurrences consécutives de A_i.

COROLLAIRE 3 : *Soit $(A_i)_{i \in J}$ une famille de combinateurs de base à effet duplicatif.*

Soit k_i la suite d'indices définie dans le corollaire 1.

S'il existe un indice j tel que $X \underset{j}{\triangleright} X_j$ et que X_j contienne n occurrences consécutives de $A_i\,(i \in J)$ avec $n > \max\limits_i k_i$ alors X n'a pas de fn.

Exemple : Soient A, B et C, trois combinateurs de base tels que

$$A\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4 \triangleright x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_4,$$

$$B\,x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5 \triangleright x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_5,$$

$$C\,x_1\,x_2\,x_3 \triangleright x_1\,x_2\,x_2\,x_3\,x_3.$$

La combinaison X telle que

$$X = ACB(A(B(CAB)AABCAB)),$$

n'a pas de forme normale.

En effet, $\max\limits_i k_i = \max\,(4, 5, 3) = 5$ et X contient six occurrences consécutives de A_i.

REMERCIEMENTS

L'auteur remercie Jean Vignolle pour ses nombreux conseils et suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. AUSIELLO, *Abstract Computational Complexity and Cycling Computations*, J.C.S.S., vol. 5, 1971, p. 118-128.
2. G. AUSIELLO, *Computational Complexity. Main Results and a Commentary*, Seminaire I.R.I.A., 1972.
3. G. AUSIELLO, *Complessita di Calcolo delle Funzioni*. Boringhieri, Ed., 1975.
4. C. BATINI et A. PETTOROSSI, *On Subrecursiveness in Weak Combinatory Logic*, *in* λ Calculus and Computer Science Theory, Proceedings of the Symposium held in Rome, C. Bohm, Ed., Springer Verlag, 1975, p. 288-297.
5. M. BLUM, *A Machine Independent Theory of the Complexity of Recursive Functions*, J.A.C.M., vol. 14, nº 2, 1967, p. 322-336.
6. C. BOHM et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *λ-Terms as Total or Partial Functions on Normal Forms*, *in* λ-Calculus and Computer Science Theory, Proceedings of the Symposium held in Rome, C. Bohm, Ed., Springer Verlag, 1975, p. 96-121.

7. C. BOHM et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *Combinatorial Problems, Combinator Equations and Normal Forms*, *in* Automata, Languages and Programming, 2nd Colloquium, University of Saarbrücken, J. Loeckx, Ed., Springer Verlag, 1974, p. 185-199.

8. C. BOHM, M. COPPO et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *Terminations Tests inside λ-Calculus*, *in* Automata, Languages and Programming, Fourth Colloquium, University of Turku, A. Salomaa et M. Steinby, Ed., Springer Verlag, 1977, p. 95-110.

9. C. BOHM, *The CUCH as a Formal and Description Language*, *in* Formal Languages, Description Languages for Computer Programming, T. B. Steel, Ed., North Holland, 1966, p. 179-197.

10. R. CANAL et J. VIGNOLLE, *Effet cachant et complexité de réduction en logique combinatoire*, Rapport interne Université Paul-Sabatier, Laboratoire « Langages et Systèmes Informatiques », 1978.

11. R. CANAL, *Étude de la complexité de calcul en logique combinatoire*, Thèse 3e Cycle, Université Paul-Sabatier, 1978.

12. H. B. CURRY, R. FEYS et W. CRAIG, *Combinatory Logic*, vol. 1, North Holland, Amsterdam, 1968.

13. M. DEZANI-CIANCAGLINI et S. RONCHI DELLA ROCA, *Computational Complexity and Structures of λ-Terms*, *in* Programmation, Proceedings of the 2nd International Symposium on Programming, B. Robinet, Ed., Dunod, Paris, 1976, p. 160-181.

14. J. R. HINDLEY, B. LERCHER et J. P. SELDIN, *Introduction to Combinatory Logic*, Cambridge University Press, 1972.

15. P. J. LANDIN, *A Lambda-Calculus Approach*, Advances in Programming and Non Numerical Computation, Pergamon Press, 1966, p. 97-141.

16. J. J. LÉVY, *Réductions correctes et optimales dans le Lambda-Calcul*, Thèse de Doctorat, Université Paris-VII, 1978.

17. J. MCCARTHY, *Recursive Functions of Symbolic Expressions and their Computation by Machine*, Part I, Comm. A.C.M., vol. 3, n° 4, 1960, p. 184-195.

18. L. NOLIN, *Logique Combinatoire et Algorithmes*, C.R. Académie des Sciences, Paris, t. 272, p. 1435-1438 et p. 1485-1488, série A, 1971.

19. A. PETTOROSSI, *Sulla Terminazione in Classi Subricorsive di Algorithmi*, A.I.C.A., Congress Genova, 1975.

20. A. PETTOROSSI, *Combinators as Tree-transducers*, Colloque sur les Arbres en Algèbre et en Programmation, Lille, 1977.

21. J. C. REYNOLDS, *A simple Typeless Language Based on the Principle of Completeness and the Reference Concept*, Comm. A.C.M., vol. 13, n° 5, 1970, p. 308-319.

22. B. ROBINET, *Un modèle fonctionnel des structures de contrôle*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, n° 3, 1977, p. 213-236.

23. J. B. ROSSER, *A Mathematical Logic without Variables*, Annals of Maths, n° 2, 36, 1935, p. 127-150.

24. C. RUGGIU, *De l'organigramme à la formule*, Thèse de Doctorat, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1974.

25. L. E. SANCHIS, *Types of Combinatory Logic*, Notre-Dame Journal of Formal Logic (5). 1964, p. 161-180.

26. J. VUILLEMIN, *Proof Techniques for Recursive Programs*, Ph. D. Thesis, Stanford, 1973.