

A. ARNOLD

M. DAUCHET

Théorie des magmoïdes (I)

RAIRO. Informatique théorique, tome 12, n° 3 (1978), p. 235-257

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_3_235_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORIE DES MAGMOÏDES (I) (*)

par A. ARNOLD ⁽¹⁾ et M. DAUCHET ⁽¹⁾

Communiqué par M. NIVAT

Résumé. — Les principales opérations appliquées aux arbres, telles que la substitution, sont décrites de façon axiomatique en définissant la structure algébrique de magmoïde. Les arbres eux-mêmes peuvent alors être définis comme les éléments d'un magmoïde libre. Il devient donc possible de traiter de façon plus algébrique la théorie des langages d'arbres. Nous donnons ici un exposé formel des éléments de base de cette théorie ainsi qu'un exemple d'application.

INTRODUCTION

L'utilisation explicite par les informaticiens d'objets appelés « arbres » est un phénomène qui tend à se généraliser. Il importe donc, pour faciliter cette utilisation, de définir formellement ces objets « arbres » ainsi que les manipulations qu'ils sont susceptibles de subir.

Il convient de remarquer en premier lieu qu'il n'existe pas qu'une seule espèce d'arbres : selon les raisons pour lesquelles ils les ont introduits et selon l'usage qu'ils en font, les informaticiens donnent aux arbres des définitions différentes et surtout leur appliquent des opérations différentes. Cette grande variété dans l'utilisation des arbres en informatique apparaît clairement à travers la diversité des communications faites aux trois colloques « Les Arbres en Algèbre et en Programmation » tenus à Lille depuis 1976. Les arbres auxquels nous nous intéressons sont ceux qui apparaissent essentiellement dans la théorie des schémas de programme ; ce sont des arbres finis dont les nœuds sont étiquetés par des symboles possédant une arité fixe, le nombre de descendants de chaque nœud étant égal à l'arité du symbole qui l'étiquette. Ces arbres sont donc aussi les termes d'une algèbre universelle [7] et se différencient nettement des arbres de dérivation dans une grammaire que Pair et Quéré [21] ont formalisés au moyen de la structure algébrique de binoïde.

(*) Reçu en mars 1978.

(¹) Laboratoire d'Informatique, Université de Lille I.

En second lieu il nous faut préciser quel type de formalisation nous voulons donner à ces objets. Il est possible de commencer par décrire formellement les arbres et de définir ensuite les opérations sur ces arbres en donnant la description du résultat. C'est la méthode utilisée par Brainerd [6] et Rosen [22] par exemple. Nous préférons pour notre part employer une approche plus algébrique : en donnant axiomatiquement les propriétés des opérations nous définissons une famille de structures algébriques ; en utilisant la méthode de description concrète signalée précédemment nous exhibons une structure particulière dont nous montrons qu'elle est libre, c'est-à-dire que les axiomes donnés suffisent à la décrire entièrement — à un isomorphisme près. L'avantage de cette approche est qu'elle ne distingue pas deux structures isomorphes — les arbres et les termes peuvent alors être vus comme deux modes de représentation d'une même structure — et que les calculs dans la structure libre peuvent se faire en utilisant uniquement les axiomes, sans faire référence à aucune représentation concrète de cette structure libre.

Un exemple de cette situation que nul n'ignore est celui du monoïde libre. On peut définir un mot sur un alphabet A comme une séquence finie $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ de lettres de A et définir ensuite le produit de concaténation de deux séquences $\langle a_1, \dots, a_p \rangle$ et $\langle a'_1, \dots, a'_q \rangle$ comme étant la séquence $\langle a_1, \dots, a_p, a'_1, \dots, a'_q \rangle$. Il est toutefois très utile de remarquer que l'ensemble des mots sur A muni du produit de composition n'est autre que le monoïde libre engendré par A (à un isomorphisme près).

*
* *

De nombreux auteurs ont utilisé cette approche en considérant les arbres comme éléments d'un Σ -magma — ou d'une Σ -algèbre — libre : Thatcher [25], Nivat [19, 20], Boudol [5], Maibaum [18], Downey [10], Engelfriet et Schmidt [13]... Un Σ -magma est une structure algébrique constituée d'un support E et d'un ensemble Σ d'opérateurs, chaque opérateur f de Σ ayant une arité notée $d(f)$. Le Σ -magma libre engendré par E est donc l'ensemble des termes formés sur Σ et sur E . Ainsi, si on identifie un alphabet A à un ensemble d'opérateurs unaires, les mots sur A peuvent être considérés comme les éléments du A -magma libre engendré par le mot vide; l'opération unaire associée à une lettre de A est alors le produit à gauche (ou à droite) par cette lettre.

Mais, de même que dans le monoïde libre l'opération essentielle est le produit de deux mots et non le produit d'une lettre et d'un mot, l'opération essentielle sur les arbres est l'opération appelée « greffe » par Boudol [5], « substitution » par d'autres auteurs tels que Engelfriet et Schmidt [13], Downey [10], qui consiste à remplacer les variables figurant aux feuilles d'un arbre par d'autres arbres. Cette

opération, qui généralise le produit de concaténation dans le monoïde libre n'est pas une opération du Σ -magma. C'est pourquoi nous proposons une structure algébrique dont la greffe sera l'opération principale.

L'opération de greffe notée $t [t_1/x_1, \dots, t_p/x_p]$ par Boudol, qui consiste à substituer t_1 à x_1, \dots, t_p à x_p dans t , a comme arguments un arbre t d'une part, une séquence t_1, \dots, t_p d'arbres d'autre part. Si nous prenons comme éléments de notre structure algébrique non seulement des arbres mais aussi des séquences finies d'arbres, cette greffe devient une opération interne partielle, que nous notons $\langle t \rangle . \langle t_1, \dots, t_p \rangle$ et qu'il est facile de généraliser au cas où son premier argument est aussi une séquence finie d'arbres. Nous appelons *produit de composition* cette opération partielle sur les séquences finies d'arbres.

Nous introduisons également une deuxième opération appelée *produit tensoriel* qui consiste à juxtaposer les séquences finies d'arbres, mais en modifiant les variables figurant dans le second opérande de façon à ce que les ensembles de variables de chaque opérande deviennent disjoints. Nous utiliserons aussi des éléments particuliers, appelés *torsions* et qui sont les séquences d'arbres réduits à une seule variable.

En axiomatisant les propriétés que doivent vérifier le produit de composition et le produit tensoriel, nous définissons la structure algébrique de *magmoïde*; en y ajoutant les axiomes concernant les torsions nous obtenons celle de *magmoïde projetable*.

Nous montrons alors que l'ensemble des séquences finies d'arbres construits sur un alphabet gradué Σ est bien le magmoïde projetable libre engendré par Σ , ce qui garantit que cette structure de magmoïde projetable fournit une bonne formalisation algébrique des arbres.

De même que la notion de monoïde est identique à celle de catégorie à un seul objet, on peut considérer que la notion de magmoïde projetable est identique à celle de théorie algébrique (cf. Lawvere [16]) que Goguen, Thatcher *et al.* [14], Arbib et Giv'e'on [1], Eilenberg et Wright [11], Elgot [12], Tiuryn [26] ont utilisée pour fournir une base théorique à l'étude des langages d'arbres. Cependant le rôle privilégié donné aux torsions dans le magmoïde projetable nous paraît d'une grande importance dans le développement de la théorie. C'est en particulier grâce à ces torsions qu'il est possible de définir sur les séquences d'ensembles d'arbres un produit de composition qui réalise l'opération appelée « greffe complète » par Boudol [5] ou « *OI*-substitution » par Engelfriet et Schmidt [13], et donc de définir le magmoïde projetable des parties d'un magmoïde [2]. Il devient alors possible de généraliser, au cas des arbres, la notion de substitution utilisée en théorie des langages; et de même qu'une substitution est un homomorphisme de monoïde de A^* dans $\mathcal{P}(B^*)$, dans le cas

des arbres la substitution pourra être définie comme un homomorphisme de magmoïde projetable, ce qui, comme dans le cas des langages, jouera un rôle important dans l'étude de la solution de systèmes d'équations dans le magmoïde projetable [2] et dans celle des transductions d'arbres [9].

Enfin, comme une structure algébrique est inséparable des homomorphismes qu'elle permet de définir, il nous faut dire ce que sont les homomorphismes de magmoïde. Il est facile de montrer que toutes les applications appelées « homomorphismes d'arbres » (*cf.* par exemple Rounds [24], Maibaum [18]) sont des homomorphismes de magmoïde — il faut à ce propos remarquer que ces homomorphismes d'arbres ne sont en général pas des morphismes dans la catégorie des Σ -magmas car ils peuvent envoyer les éléments d'un Σ -magma libre dans un Δ -magma libre. Mais il est également très facile de montrer qu'il existe d'autres homomorphismes de magmoïde, appelés *k-morphismes*, où *k* est un entier positif : ce sont ceux qui à un arbre font correspondre un *k*-uple d'arbres. Ainsi, par exemple, à tout arbre représentant une expression arithmétique qui permet de calculer un nombre complexe, on peut faire correspondre, par un 2-morphisme, deux arbres représentant les expressions arithmétiques qui permettent de calculer respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de ce nombre.

Des résultats de [2, 9, 17] il ressort que les *k*-morphismes jouent un rôle important dans la théorie des langages d'arbres. En particulier l'utilisation de ces *k*-morphismes permet d'expliquer de façon très naturelle certaines anomalies de la théorie « classique » des langages d'arbres.

Cet exposé comprend cinq parties. Dans la première nous définissons d'abord le magmoïde $T(\Sigma)$ dont les éléments sont des séquences finies d'arbres ; puis nous donnons les axiomes de magmoïde et exhibons deux exemples de magmoïdes, qui joueront un grand rôle par la suite : le magmoïde des torsions et le magmoïde $\tilde{T}(\Sigma)$. Nous terminons cette première partie en montrant que $\tilde{T}(\Sigma)$ est un magmoïde libre. Dans la seconde partie nous montrons que le magmoïde $T(\Sigma)$ contient un magmoïde de torsions. A partir de là nous mettons en évidence la notion de magmoïde projetable que nous définissons axiomatiquement. Puis, après avoir donné un autre exemple de magmoïde projetable nous montrons que $T(\Sigma)$ est le magmoïde projetable libre. La troisième partie est consacrée à l'étude des morphismes de magmoïde, notion plus vaste que la notion habituelle d'homomorphisme d'arbres. Dans la quatrième partie nous construisons deux magmoïdes différents dont les éléments sont des sous-ensembles de $T(\Sigma)$. Dans la dernière partie nous montrons sur des exemples comment des notions classiques en théorie des langages d'arbres peuvent s'exprimer dans le cadre de la théorie des magmoïdes.

Seules les deux premières parties de cet article figurent dans le présent numéro. Les trois dernières parties paraîtront dans un numéro suivant de la même revue.

CHAPITRE I

LES MAGMOÏDES

1. Le magmoïde $T(\Sigma)$

DÉFINITIONS : On appelle *alphabet gradué* la donnée d'un couple (Σ, d) où Σ est un ensemble quelconque qu'on suppose habituellement fini, mais il n'est pas indispensable pour le moment de s'imposer cette restriction, et d une application de Σ dans N . Les éléments de Σ seront appelés *symboles*. L'entier $d(f)$, où f appartient à Σ est appelé le *degré* ou la *arité* de f . Par abus de langage, l'alphabet gradué (Σ, d) sera le plus souvent noté Σ . On notera Σ_n , pour tout entier n , l'ensemble des éléments de Σ de degré n ; i. e. $\Sigma_n = d^{-1}(n) = \{f \in \Sigma \mid d(f) = n\}$.

On appelle *ensemble des variables*, ou ensemble des index, l'ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ et on note X_n l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$. X_0 est donc l'ensemble vide.

On appelle *ensemble des arbres sur Σ indexés par X_n* l'ensemble $T_\Sigma(X_n)$ – qu'on peut considérer [20] comme un langage sur l'alphabet (non gradué) $\Sigma \cup X_n \cup \{(,)\}$ défini inductivement par :

- $\Sigma_0 \cup X_n \subset T_\Sigma(X_n)$;
- si $f \in \Sigma_p$ et $t_1, \dots, t_p \in T_\Sigma(X_n)$ alors $f(t_1, \dots, t_p) \in T_\Sigma(X_n)$.

On note T_Σ l'ensemble $T_\Sigma(X_0) = T_\Sigma(\emptyset)$.

On sait [20, 5, 14, 11] que pour chaque n l'ensemble $T_\Sigma(X_n)$ peut être muni d'une structure de Σ -magma, ainsi que l'ensemble $T_\Sigma(X) = \bigcup_{n \geq 0} T_\Sigma(X_n)$.

Nous redéfinissons la *greffe* [5] – appelée aussi substitution [13, 14, 10] – mais nous préférons employer le terme de greffe car nous donnerons ultérieurement au terme de substitution un autre sens, analogue à celui qu'il a en théorie des langages.

Si t est un élément de $T_\Sigma(X_n)$ et t_1, \dots, t_n des éléments de $T_\Sigma(X_p)$, $t[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]$ est l'élément de $T_\Sigma(X_p)$ obtenu en remplaçant dans t chaque variable x_i par t_i . De façon plus précise, la greffe est définie par induction par :

- si $t = x_i \in X_n \subset T_\Sigma(X_n)$ alors :

$$t[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n] = t_i;$$

– si $t \in \Sigma_0 \subset T_\Sigma(X_n)$ alors :

$$t[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n] = t;$$

– si $t = f(t'_1, \dots, t'_q)$ avec $t'_i \in T_\Sigma(X_n)$ et $f \in \Sigma_q$ alors :

$$\begin{aligned} & t[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n] \\ &= f(t'_1[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n], \dots, t'_q[t_1/x_1, \dots, t_n/x_n]). \end{aligned}$$

Exemple 1 : Soit Σ l'alphabet gradué $\{f, g, a\}$ avec $d(f) = 2$, $d(g) = 1$ et $d(a) = 0$.

Soit $t = f(x_2, g(a)) \in T_\Sigma(X_3)$ – remarquons que t est aussi élément de $T_\Sigma(X_2)$, $T_\Sigma(X_4)$, ... – et soient $t_1 = a$; $t_2 = g(x_1)$, $t_3 = x_4$ qui appartiennent à $T_\Sigma(X_4)$. Alors :

$$t[t_1/x_1, t_2/x_2, t_3/x_3] = f(g(x_1), g(a)) \in T_\Sigma(X_4).$$

Nous voyons dans cet exemple qu'il existe une ambiguïté, qui pourrait être gênante, concernant l'ensemble de variables X_n sur lequel un arbre donné est construit. Pour lever cette ambiguïté, il faudra en même temps qu'on se donne un arbre, indiquer son ensemble X_n de variables. Ainsi l'arbre $t = f(x_2, g(a))$ spécifié comme appartenant à $T_\Sigma(X_2)$ sera différent du même arbre spécifié comme appartenant à $T_\Sigma(X_3)$. Cette distinction est parfaitement naturelle et est couramment utilisée : la même expression $x + 1$ peut servir à définir plusieurs fonctions différentes telles que $\lambda x(x + 1) : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ et $\lambda x, y(x + 1) : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$. D'autre part, étant donné la définition même de la greffe, il est utile de pouvoir considérer des éléments de $T_\Sigma(X_p)^n$. Nous sommes donc amenés à poser la définition suivante :

DÉFINITION : Soient p et q deux entiers positifs. Nous noterons $T(\Sigma)_q^p$ l'ensemble $\{q\} \times T_\Sigma(X_q)^p$, c'est-à-dire que $T(\Sigma)_q^p$ est l'ensemble des éléments de la forme $\langle q; t_1, \dots, t_p \rangle$ avec $t_i \in T_\Sigma(X_q)$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Nous noterons $T(\Sigma)$ la réunion pour tous les p et q appartenant à \mathbf{N} des ensembles $T(\Sigma)_q^p$.

Si $t = f(x_2, g(a))$ nous pourrions donc différencier l'élément $\langle 2; t \rangle \in T(\Sigma)_2^1$ de l'élément $\langle 3; t \rangle \in T(\Sigma)_3^1$.

Remarquons que pour tout $q \in \mathbf{N}$, $T(\Sigma)_q^0$ contient un seul élément, qui sera noté O_q et qui est égal à $\langle q \rangle$ ou plus exactement à $\langle q; \Lambda_q \rangle$, où Λ_q est l'unique élément de $T_\Sigma(X_q)^0$, c'est-à-dire la suite vide d'arbres de $T_\Sigma(X_q)$. Remarquons aussi qu'on peut identifier l'ensemble T_Σ des arbres sans variables à $T(\Sigma)_0^1$.

Nous définissons alors le *produit de composition* par : si

$$u = \langle q; t_1, \dots, t_p \rangle \in T(\Sigma)_q^p$$

et si

$$u' = \langle r; t'_1, \dots, t'_q \rangle \in T(\Sigma)_r^q$$

alors $u \cdot u' = \langle r, t'_1, \dots, t'_p \rangle$ où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$,

$$t'_i = t_i[t'_1/x_1, \dots, t'_q/x_q].$$

Comme pour tout i , $t_i \in T_\Sigma(X_q)$, t'_i est défini et appartient à $T_\Sigma(X_r)$ et donc $u \cdot u' \in T(\Sigma)_r^p$.

Dans le cas particulier où $p=0$, et donc où $u = O_q$, on aura $u \cdot u' = O_r$. Si $q=0$ on aura $u \cdot O_r = \langle r; t_1, \dots, t_p \rangle$.

Exemple 2 : En reprenant les notations de l'exemple 1, $\langle 3; t \rangle$, $\langle 4; t_1, t_2, t_3 \rangle = \langle 4; f(g(x_1), g(a)) \rangle$.

Il résulte immédiatement du fait que la greffe est associative (cf. Boudol [5] et aussi Goguen et Thatcher [14], Thatcher [25]) que ce produit de composition est associatif.

PROPOSITION 1 : *Le produit de composition est associatif.*

Pour tout $p \in \mathbf{N}$ posons $\text{Id}_p = \langle p; x_1, \dots, x_p \rangle \in T(\Sigma)_p^p$. Il est immédiat que cet élément est neutre pour le produit de composition.

PROPOSITION 2 : *Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $q \in \mathbf{N}$ et pour tout $u \in T(\Sigma)_p^p$, $\text{Id}_p \cdot u = u \cdot \text{Id}_q = u$.*

Nous allons maintenant définir le *produit tensoriel* qui permet de juxtaposer des séquences d'arbres mais en translatant les indices des variables figurant dans le second opérande. Soient

$$u = \langle q; t_1, \dots, t_p \rangle \in T(\Sigma)_q^p \quad \text{et} \quad u' = \langle q'; t'_1, \dots, t'_{p'} \rangle \in T(\Sigma)_{q'}^{p'}.$$

Alors

$$u \otimes u' = \langle q + q'; t_1, \dots, t_p, t'_1, \dots, t'_{p'} \rangle$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p'\}$:

$$t'_i = t'_i[x_{q+1}/x_1, \dots, x_{q+q'}/x_q].$$

Comme $t'_i \in T_\Sigma(x_q)$, t'_i est défini et appartient à $T_\Sigma(x_{q+q'})$ d'où $u \otimes u' \in T(\Sigma)_{q+q'}^{p+p'}$.

Il est immédiat que ce produit tensoriel, qui contrairement au produit de composition est défini pour tout couple d'éléments de $T(\Sigma)$, est associatif.

PROPOSITION 3 : *Le produit tensoriel est associatif.*

La propriété suivante est aussi une propriété du produit tensoriel d'applications linéaires, sa démonstration, qui se trouve dans [4] est pratiquement immédiate.

A partir de maintenant nous supposons, pour éviter un trop grand nombre de parenthèses dans l'écriture, que le produit de composition est prioritaire sur le produit tensoriel.

PROPOSITION 4 : *Soient $u, u', v, v' \in T(\Sigma)$. Si les produits $u . u'$ et $v . v'$ sont définis alors $(u \otimes v) . (u' \otimes v')$ est défini et est égal à $u . u' \otimes v . v'$.*

Exemple 3 : Soient

$$u = \langle 1; f(x_1, x_1) \rangle \in T(\Sigma)_1^1,$$

$$u' = \langle 2; g(x_2) \rangle \in T(\Sigma)_2^1,$$

$$v = \langle 2; f(x_2, a), x_1, x_2 \rangle \in T(\Sigma)_2^3,$$

$$v' = \langle 4; a, x_1 \rangle \in T(\Sigma)_4^2.$$

Alors

$$u . u' = \langle 2; f(g(x_2), g(x_2)) \rangle \in T(\Sigma)_2^1,$$

$$v . v' = \langle 4; f(x_1, a), a, x_1 \rangle \in T(\Sigma)_4^3,$$

$$u \otimes v = \langle 3; f(x_1, x_1), f(x_3, a), x_2, x_3 \rangle \in T(\Sigma)_3^4,$$

$$u' \otimes v' = \langle 6; g(x_2), a, x_3 \rangle \in T(\Sigma)_6^3$$

et

$$u . u' \otimes v . v' = (u \otimes v) . (u' \otimes v')$$

$$= \langle 6; f(g(x_2), g(x_2)), f(x_3, a), a, x_3 \rangle \in T(\Sigma)_6^4.$$

2. Axiomes de magmoïde

Muni de produit de composition et du produit tensoriel, l'ensemble $T(\Sigma)$ forme une structure algébrique appelée *magmoïde* que nous allons maintenant définir sous forme axiomatique.

Un magmoïde est un quintuplet $\langle M, ., \otimes, e, e_0 \rangle$ — qui sera noté M selon l'usage consistant à identifier une structure algébrique et son support — où M est un ensemble, $.$ une opération binaire partielle sur M , \otimes une opération binaire sur M , e et e_0 deux éléments distingués de M ; et qui vérifie les axiomes suivants :

M1. $\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}$, il existe une partie M_q^p de M appelée *fibres* $p-q$ de M . Les fibres de M sont disjointes deux à deux et M est la réunion de toutes ses fibres.

Autrement dit, M est un ensemble bigradué. Tout élément de M_q^p sera dit de *degré supérieur* p et de *degré inférieur* q .

M2. $\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}, \forall p' \in \mathbf{N}, \forall q' \in \mathbf{N}, \forall m \in M_q^p, \forall m' \in M_{q'}^{p'}, m . m'$, est défini ssi $q = p'$. On a alors $m . m' \in M_q^{p'}$.

Cette opération \cdot est appelée *produit de composition*.

M'2. Le produit de composition est associatif.

Plus précisément soient $m \in M_q^p, m' \in M_{q'}^{p'}, m'' \in M_{q''}^{p''}$. D'après M2, $(m \cdot m') \cdot m''$ est défini ssi $q = p'$ et $q' = p''$ et $m \cdot (m' \cdot m'')$ est défini ssi $q = p'$ et $q' = p''$. Si l'une des deux quantités $m \cdot (m' \cdot m'')$ et $(m \cdot m') \cdot m''$ est définie, l'autre l'est aussi et alors elles sont égales.

M3. $\forall p \in \mathbf{N}, \forall q \in \mathbf{N}, \forall p' \in \mathbf{N}, \forall q' \in \mathbf{N}, \forall m \in M_q^p, \forall m' \in M_{q'}^{p'}, m \otimes m' \in M_{q+q'}^{p+p'}$.

Cette opération \otimes est appelée *produit tensoriel*.

M'3. Le produit tensoriel est associatif.

M4. $\forall m_1, m_2, m'_1, m'_2 \in M$, si $(m_1 \cdot m_2) \otimes (m'_1 \cdot m'_2)$ est défini, alors cette quantité est égale à $(m_1 \otimes m'_1) \cdot (m_2 \otimes m'_2)$.

Si $(m_1 \cdot m_2) \otimes (m'_1 \cdot m'_2)$ est défini, alors d'après M2, $m_1 \in M_q^p, m_2 \in M_{q'}^{p'}, m'_1 \in M_{q_1}^{p_1}, m'_2 \in M_{q_2}^{p_2}$ et $(m_1 \otimes m'_1) \cdot (m_2 \otimes m'_2)$ est défini puisque $m_1 \otimes m'_1 \in M_{q+q_1}^{p+p_1}$ et $m_2 \otimes m'_2 \in M_{q'+q_2}^{p'+p_2}$. La réciproque n'est pas vraie : si $m_1 \in M_2^2, m'_1 \in M_1^1, m_2 \in M_1^1, m'_2 \in M_2^2$ alors $m_1 \otimes m'_1$ et $m_2 \otimes m'_2$ appartiennent à M_3^3 et donc $(m_1 \otimes m'_1) \cdot (m_2 \otimes m'_2)$ est défini; par contre ni $m_1 \cdot m_2$ ni $m'_1 \cdot m'_2$ ne sont définis.

M5. $e \in M_1^1; e_0 \in M_0^0$. En posant, pour $p > 0, e_p = \underbrace{e \otimes \dots \otimes e}_{p \text{ fois}} \in M_p^p$ (et donc $e_1 = e$) on a $\forall m \in M_q^p, e_p \cdot m = m$ et $\forall m \in M_p^q, m \cdot e_p = m$.

De plus $\forall m \in M_q^p, e_0 \otimes m = m \otimes e_0 = m$.

Les éléments e_p sont donc neutres pour la composition; e_0 est également neutre pour le produit tensoriel.

Il est facile de montrer que ces éléments neutres sont uniques.

Remarquons que pour tout entier n , l'ensemble M_n^n muni du seul produit de composition est un monoïde dont l'élément neutre est e_n .

3. Exemples de magmoïdes

Il est clair que $T(\Sigma)$ muni des deux produits est un magmoïde dont les éléments neutres sont les éléments Id_p .

On trouvera dans [4] plusieurs exemples de magmoïdes. Nous allons n'en donner ici que deux qui joueront un très grand rôle par la suite.

3.1. Le magmoïde Θ des torsions

Posons d'abord, pour tout entier $p \in \mathbf{N}$,

$$[p] = \{ n \in \mathbf{N} \mid 1 \leq n \text{ et } n \leq p \}.$$

En d'autres termes $[0] = \emptyset$ et pour $p \geq 1, [p] = \{ 1, \dots, p \}$.

Posons Θ_q^p égal à l'ensemble des applications de $[p]$ dans $[q]$. Il faut remarquer que comme il n'existe aucune application d'un ensemble non vide dans l'ensemble vide, si p est différent de 0 alors Θ_0^p est un ensemble vide. D'autre part, comme il existe une seule application de l'ensemble vide dans un ensemble non vide, quel que soit l'entier p , Θ_p^0 contient un seul élément qui sera noté O_p .

On définit le produit de composition comme le produit de composition des applications i. e. si $\theta \in \Theta_q^p$ et $\theta' \in \Theta_r^q$, $\theta \cdot \theta'$ est l'application de $[p]$ dans $[r]$ égale à $\theta' \circ \theta$.

On définit le produit tensoriel par : si $\theta \in \Theta_q^p$ et $\theta' \in \Theta_{q'}^{p'}$ alors $\theta \otimes \theta'$ est l'application de $[p+p']$ dans $[q+q']$ qui vaut

$$\begin{cases} \theta(i) & \text{si } i \leq p, \\ q + \theta'(i-p) & \text{si } p < i \leq p+p'. \end{cases}$$

On pose $e \in \Theta_1^1$ comme l'unique application de $[1]$ dans $[1]$; c'est donc l'application identique de $[1]$ dans $[1]$ qu'on écrira aussi Id_1 .

On pose $e_0 = O_0$ l'unique élément de Θ_0^0 qu'on écrira aussi Id_0

D'après la définition du produit tensoriel $e_p \in \Theta_p^p$ est l'application identique de $[p]$ dans $[p]$ qu'on notera aussi Id_p .

Le fait que Θ est un magmoïde se vérifie aisément. Montrons à titre d'exemple que l'axiome M4 est vérifié. Soit $\theta_1 \in \Theta_q^p$, $\theta_2 \in \Theta_r^q$, $\theta'_1 \in \Theta_{q'}^{p'}$, $\theta'_2 \in \Theta_{r'}^{q'}$. Calculons $\theta_1 \cdot \theta_2 \otimes \theta'_1 \cdot \theta'_2 (i)$ et $(\theta_1 \otimes \theta'_1) \cdot (\theta_2 \otimes \theta'_2) (i)$ pour $i \in [p+p']$:

$$\begin{aligned} \theta_1 \cdot \theta_2 \otimes \theta'_1 \cdot \theta'_2 (i) &= \begin{cases} \theta_2(\theta_1(i)) & \text{si } i \leq p, \\ r + \theta_2(\theta_1(i-p)) & \text{sinon,} \end{cases} \\ (\theta_1 \otimes \theta'_1) \cdot (\theta_2 \otimes \theta'_2) (i) &= \theta_2 \otimes \theta'_2 (\theta_1 \otimes \theta'_1 (i)). \end{aligned}$$

Or si $i \leq p$,

$$\theta_1 \otimes \theta'_1 (i) = \theta_1 (i) \leq q;$$

d'où

$$\theta_2 \otimes \theta'_2 (\theta_1 \otimes \theta'_1 (i)) = \theta_2 (\theta_1 (i)).$$

Si par contre $p < i \leq p+p'$, alors

$$\theta_1 \otimes \theta'_1 (i) = q + \theta'_1 (p-i)$$

et

$$\theta_2 \otimes \theta'_2 (q + \theta'_1 (p-i)) = r + \theta'_2 (\theta'_1 (p-i)).$$

Parmi les torsions nous avons déjà signalé les Id_p et les O_p . Nous allons en isoler d'autres qui nous seront utiles par la suite.

Pour tout $n > 0$ et $i \in [n]$, π_n^i , appelée *projection* est l'élément de Θ_n^1 qui à 1, unique élément de [1] associe $i \in [n]$.

On montre aisément que :

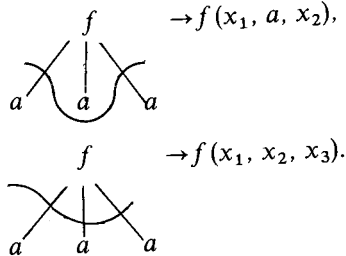
PROPOSITION 5 :

$$\begin{aligned} \forall p > 0, \quad \forall i \in [p], \quad \pi_p^i &= O_{i-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{p-i}, \\ \forall p > 0, \quad \forall i \in [p], \quad \forall \theta \in \Theta_q^p, \quad \pi_p^i \cdot \theta &= \pi_q^{\theta(i)}. \end{aligned}$$

3.2. *Le magmoïde $\tilde{T}(\Sigma)$*

Parmi tous les arbres (et séquences d'arbres) indexés nous nous intéressons maintenant à ceux que nous appelons *arbres initiaux*. Ce sont ceux dont les variables sont numérotées dans l'ordre croissant de gauche à droite. Si par exemple f est une lettre de degré 3 et a une lettre de degré 0, $f(x_1, a, x_2)$, $f(a, a, a)$, $f(x_1, x_2, a)$ sont des arbres initiaux, alors que $f(x_1, x_1, x_2)$, $f(x_1, x_3, x_2)$, $f(a, a, x_2)$ n'en sont pas.

La dénomination d'arbre initial provient de ceci : si on considère un arbre sans variables — i. e. de T_Σ — et qu'on le « coupe », on obtient un sous-arbre initial en numérotant les branches coupées comme le montre la figure suivante :



Autrement dit, dans un arbre initial, le rôle des variables est seulement d'indiquer les branches coupées; les indices des variables n'ont alors pas de signification pertinente. Plus précisément l'apparition d'une variable comme feuille d'un arbre joue un double rôle : d'abord indiquer simplement qu'une branche est coupée, ensuite préciser au moyen de son indice ce qu'on va y greffer dans l'opération de greffe. La notion d'arbre initial a pour but de mettre en évidence le premier de ces rôles joués par les variables.

Nous allons maintenant donner une définition formelle de $\tilde{T}(\Sigma)$.

Soit Φ l'application qui à tout élément u de $T(\Sigma)$ associe le mot de X^* obtenu en prenant les variables de u de gauche à droite. Formellement Φ est défini inductivement par :

(i) Si $u = \langle q; t_1, \dots, t_p \rangle \in T(\Sigma)_q^p$, $\Phi(u) = \Phi(t_1) \times \dots \times \Phi(t_p)$ où \times est la multiplication dans le monoïde X^* ; et si $u = \langle q \rangle \in T(\Sigma)_q^0$, $\Phi(u) = \Lambda$ où Λ est l'élément neutre de X^* ;

(ii) si $t \in T_\Sigma(X_q)$ alors :

si $t \in \Sigma_0$,

$$\Phi(t) = \Lambda,$$

si $t = x_i \in X_q \subset T_\Sigma(X_q)$,

$$\Phi(t) = x_i,$$

si $t = f(t_1, \dots, t_m)$,

$$\Phi(t) = \Phi(t_1) \times \dots \times \Phi(t_m).$$

On définit alors $\tilde{T}(\Sigma)$ par $\tilde{T}(\Sigma)_q^p = \{ u \in \tilde{T}(\Sigma)_q^p / \Phi(u) = x_1 \dots x_q \}$.

Dans le cas où $q = 0$, pour que u appartienne à $\tilde{T}(\Sigma)$ il faut donc que $\Phi(u) = \Lambda$.

D'après la définition de Φ , $\Phi(\langle p; x_1, \dots, x_p \rangle) = x_1 \dots x_p$ et donc $\text{Id}_p = \langle p, x_1, \dots, x_p \rangle \in \tilde{T}(\Sigma)_q^p$.

D'autre part il est clair que $\tilde{T}(\Sigma)$ est fermé par produit de composition et produit tensoriel (cf. [4]) d'où :

PROPOSITION 6 : $\tilde{T}(\Sigma)$ est un sous-magmoïde de $T(\Sigma)$.

A partir de maintenant nous considérerons que Σ est une partie de $\tilde{T}(\Sigma)$ en identifiant le symbole f de Σ_p à l'élément $\langle p; f(x_1, \dots, x_p) \rangle$ de $\tilde{T}(\Sigma)_p^1$.

4. Les magmoïdes libres

Pour terminer cette partie nous allons montrer que $\tilde{T}(\Sigma)$ est le magmoïde libre engendré par Σ , c'est-à-dire que toute application ϕ de Σ dans un magmoïde quelconque M qui « respecte la graduation » — i.e. $\phi(\Sigma_p) \subset M_p^1$ — s'étend de manière unique en un homomorphisme de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M . Ceci nécessite de définir d'abord les morphismes de magmoïdes.

Remarquons dès maintenant que, puisque $\tilde{T}(\Sigma)$ est le magmoïde libre engendré par Σ , il doit nécessairement exister des propriétés que possède le magmoïde $T(\Sigma)$ et qui ne découlent pas des axiomes du magmoïde. Ce sera l'objet de la partie suivante où nous définirons les magmoïdes projetables.

4.1. Les morphismes de magmoïdes

Soient $\langle M, \cdot, \otimes, e, e_0 \rangle$ et $\langle M', \cdot, \otimes, e', e'_0 \rangle$ deux magmoïdes. Une application ϕ de M dans M' sera appelée *morphisme de magmoïde* si :

- A1. ϕ conserve les degrés, i.e., $\forall m \in M_q^p, \phi(m) \in M_q^p$.
- A2. ϕ préserve les éléments neutres, i.e. $\phi(e) = e'$ et $\phi(e_0) = e'_0$.
- A3. ϕ est compatible avec les opérations, i.e. $\phi(m \cdot m') = \phi(m) \cdot \phi(m')$ et $\phi(m \otimes m') = \phi(m) \otimes \phi(m')$.

Remarquons que la condition A1 assure que si $m \cdot m'$ est défini alors $\phi(m) \cdot \phi(m')$ l'est aussi. D'autre part il découle de A2 et A3 que $\phi(e_p) = e'_p$.

Exemple 4 : Soit Θ le magmoïde des torsions. Considérons l'application v de Θ dans $T(\Sigma)$ définie par :

- si $\theta = O_q$, unique élément de Θ_q^0 , $v(O_q) = \langle q \rangle$, unique élément de $T(\Sigma)_q^0$;
- si $\theta \in \Theta_q^p$ avec $p \neq 0$, et donc $q \neq 0$, $v(\theta) = \langle q; x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(p)} \rangle \in T(\Sigma)_q^p$.

On a donc bien $v(e_0) = \text{Id}_0$ et $v(e) = \langle 1; x_1 \rangle$ qui est l'élément neutre de $T(\Sigma)_1^1$.

Si $\theta \in \Theta_q^p$ et $\theta' \in \Theta_{q'}^{p'}$,

$$\begin{aligned} v(\theta \otimes \theta') &= \langle q + q'; x_{\theta \otimes \theta'(1)}, \dots, x_{\theta \otimes \theta'(p)}, x_{\theta \otimes \theta'(p+1)}, \dots, x_{\theta \otimes \theta'(p+p)} \rangle \\ &= \langle q + q'; x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(p)}, x_{q+\theta'(1)}, \dots, x_{q+\theta'(p')} \rangle \\ &= \langle q \cdot x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(p)} \rangle \otimes \langle q'; x_{\theta'(1)}, \dots, x_{\theta'(p')} \rangle \\ &= v(\theta) \otimes v(\theta'). \end{aligned}$$

L'application v est donc bien un morphisme de magmoïde. De plus, d'après sa définition, il est clair que c'est un morphisme injectif.

4.2. Le magmoïde libre $\tilde{T}(\Sigma)$

Pour démontrer que $T_\Sigma(X_p)$ est la Σ -magma libre engendrée par X_p , on utilise la propriété que tout élément t de $T_\Sigma(X_p) - X_p$ s'écrit de façon unique $f(t_1, \dots, t_q)$ avec $f \in \Sigma$, $q = d(f)$ et pour $i \in [q]$, $t_i \in T_\Sigma(X_p)$. Cette propriété va nous permettre de démontrer que tout élément de $\tilde{T}(\Sigma)$ admet aussi une décomposition unique.

LEMME 1 : Soit $u \in \tilde{T}(\Sigma)_q^p$ avec $p \geq 2$; alors pour chaque $i \in [p]$ il existe un entier q_i et un élément u_i de $\tilde{T}(\Sigma)_{q_i}^1$ tels que $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p$. Cette décomposition est unique.

Soit $u \in \tilde{T}(\Sigma)_q^1$. Si $u \neq \langle 1; x_1 \rangle$ il existe $p \geq 0$, $f \in \Sigma_p$ et $v \in \tilde{T}(\Sigma)_q^p$ tels que $u = \langle p; f(x_1, \dots, x_p) \rangle \cdot v$. Cette décomposition est unique.

La preuve complète se trouve dans [4]. Elle s'appuie sur la propriété de décomposition unique des éléments de $T_\Sigma(X_p)$ indiquée plus haut et sur la remarque suivante si $t = \langle q, t_1, \dots, t_p \rangle$ tel que $\Phi(t) = x_1 \dots x_q$, alors en posant r_i égal à la longueur de $\Phi(t_i)$, t peut s'écrire $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p$ avec $u_i \in \tilde{T}(\Sigma)_{r_i}^1$.

On étend alors toute application φ de Σ dans un magmoïde M en une application $\bar{\varphi}$ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M par :

- si $u = \langle 1; x_1 \rangle$, $\bar{\varphi}(u) = e$;
- si $u = u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p$, $\bar{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(u_1) \otimes \dots \otimes \bar{\varphi}(u_p)$;
- si $u = \langle p; f(x_1, \dots, x_p) \rangle \cdot v$, $\bar{\varphi}(u) = \varphi(f) \cdot \bar{\varphi}(v)$.

Si $\bar{\varphi}$ est un morphisme de magmoïde, c'est bien la seule extension homomorphe de φ . Il reste donc à montrer que $\bar{\varphi}$ est bien un morphisme de magmoïde, et, plus simplement, qu'il est compatible avec les produits.

En ce qui concerne le produit tensoriel ce résultat est immédiat puisque si u s'écrit de façon unique $u_1 \otimes u_2 \otimes \dots \otimes u_p$ et v s'écrit $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q$, alors $u \otimes v$ s'écrit $u_1 \otimes \dots \otimes u_p \otimes v_1 \otimes \dots \otimes v_q$ et

$$\bar{\varphi}(u \otimes v) = \bar{\varphi}(u_1) \otimes \dots \otimes \bar{\varphi}(u_p) \otimes \bar{\varphi}(v_1) \otimes \dots \otimes \bar{\varphi}(v_q) = \bar{\varphi}(u) \otimes \bar{\varphi}(v).$$

Pour le produit de composition, il suffit de remarquer que si $\bar{\varphi}(v \cdot w) = \bar{\varphi}(v) \cdot \bar{\varphi}(w)$ alors si $u = f \cdot v$ on aura

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(u \cdot w) &= \bar{\varphi}(f \cdot v \cdot w) = \bar{\varphi}(f) \cdot \bar{\varphi}(v \cdot w) \\ &= \bar{\varphi}(f) \cdot \bar{\varphi}(v) \cdot \bar{\varphi}(w) = \bar{\varphi}(f \cdot v) \bar{\varphi}(w) = \bar{\varphi}(u) \cdot \bar{\varphi}(w). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

THÉOREME 1 : $\tilde{T}(\Sigma)$ est le magmoïde libre engendré par Σ .

Exemple 5 : Considérons le magmoïde $B(3)$ suivant :

$B(3)_q^p$ est l'ensemble des matrices booléennes de dimension $(3^p, 3^q)$.

Prenons comme produit de composition le produit usuel de matrices et comme produit tensoriel le produit de Kronecker (le produit de Kronecker d'une matrice A de dimension (p, q) et d'une matrice B de dimension (p', q') est la matrice C de dimension $(p \cdot p', q \cdot q')$ définie par $C_{\langle i, i' \rangle, \langle j, j' \rangle} = A_{i, j} \times B_{i', j'}$. Il est facile de vérifier que $B(3)$ est un magmoïde.

Soit maintenant l'alphabet $\Sigma = \{f, a\}$ avec $d(f) = 2$ et $d(a) = 0$. Soit φ l'application de Σ dans $B(3)$ qui à f associe la matrice

$$F = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

de dimension $(3, 3^2)$ et au symbole a la matrice

$$A = \begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{array} \text{ de dimension } (3, 3^0).$$

Soit $\bar{\varphi}$ l'extension homomorphe de φ à $T(\Sigma)$.

Cette application $\bar{\varphi}$ peut être considérée comme une généralisation au cas du magmoïde libre de la représentation matricielle des automates d'états finis dans le cas du monoïde libre; et de fait il est possible de représenter les automates d'arbres par des morphismes de magmoïdes prenant leur valeur dans des magmoïdes particuliers [2].

CHAPITRE II

LES MAGMOÏDES PROJETABLES

1. Les torsions de $T(\Sigma)$

Puisque $\tilde{T}(\Sigma)$ est le magmoïde libre engendré par Σ et que $\tilde{T}(\Sigma)$, les axiomes de magmoïde sont insuffisants pour caractériser entièrement $T(\Sigma)$. Nous allons donc donner sous forme d'axiomes, des propriétés supplémentaires qui permettront de caractériser entièrement $T(\Sigma)$.

Dans l'exemple 4 nous avons montré que $T(\Sigma)$ contenait un sous-magmoïde isomorphe au magmoïde Θ des torsions. Soit $\nu(\Theta)$ ce sous-magmoïde, dont les éléments seront appelés les *torsions* de $T(\Sigma)$. Tous ses éléments sont de la forme $\langle q; x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(q)} \rangle$ où θ est une application de $[p]$ dans $[q]$. Réciproquement soit $u = \langle q; x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \rangle \in T(\Sigma)_q^p$; comme pour tout $j \in [p]$, $x_{i_j} \in T_\Sigma(x_q)$, nous avons $x_{i_j} \in X_q$ et donc $i_j \in [q]$; nous pouvons donc définir l'application θ de $[p]$ dans $[q]$ par $\theta(j) = i_j$ et nous avons $u = \nu(\theta)$. Le sous-magmoïde $\nu(\theta)$ est donc formé de tous les éléments de $T(\Sigma)$ de la forme $\langle q; x_{i_1}, \dots, x_{i_p} \rangle$.

Soit $\theta \in \Theta_q^p$. Pour que $\nu(\theta)$ appartienne à $\tilde{T}(\Sigma)$ il faudrait que l'on ait $\Phi(\nu(\theta)) = x_1 \dots x_q$. Or $\Phi(\nu(\theta)) = x_{\theta(1)} \dots x_{\theta(p)}$ et donc $\nu(\theta) \in \tilde{T}(\Sigma)$ ssi $p = q$ et θ est l'identité.

On obtient donc une première propriété qui différencie $T(\Sigma)$ de $\tilde{T}(\Sigma)$: le premier de ces deux magmoïdes contient un sous-magmoïde isomorphe à Θ .

Nous allons montrer maintenant que tout élément de $T(\Sigma)$ peut s'exprimer en fonction d'un élément de $\tilde{T}(\Sigma)$ et d'une torsion.

PROPOSITION 5 : *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $u \in T(\Sigma)_q^p$, il existe un entier r , un élément \tilde{u} de $\tilde{T}(\Sigma)_q^r$, un élément θ de Θ_q^r tels que $u = \tilde{u} \cdot \nu(\theta)$. Cette décomposition est unique.*

Démonstration : Notons $|w|$ la longueur du mot w de X^* .

Soit $u = \langle q; t_1, \dots, t_p \rangle \in T(\Sigma)_q^p$ et posons $r = |\Phi(u)|$. $\Phi(u)$ s'écrit donc $x_{i_1} \dots x_{i_r}$, avec, pour tout $j \in [r]$, $i_j \in [q]$. Posons alors θ l'application de $[r]$ dans $[q]$ définie par $\theta(j) = i_j$.

Nous formons alors \tilde{u} en renumérotant toutes les variables qui figurent dans u de 1 à r de gauche à droite. Il est immédiat que $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)_r^p$ et que $u = \tilde{u} \cdot v(\theta)$. \square

D'après la définition du produit de composition dans $T(\Sigma)$, si $\theta \in \Theta_q^p$ et $u = \langle r; t_1, \dots, t_q \rangle \in T(\Sigma)_q^p$, alors $v(\theta) \cdot u = \langle r; t_{\theta(1)}, \dots, t_{\theta(p)} \rangle \in T(\Sigma)_r^p$; en particulier si $\theta = \pi_q^i \in \Theta_q^1$, nous obtenons $v(\pi_q^i) \cdot u = \langle r; t_i \rangle$. Il en résulte donc :

PROPOSITION 6 : *Soient $u, u' \in T(\Sigma)_r^q$. Si, pour tout $i \in [q], v(\pi_q^i) \cdot u = v(\pi_q^i) \cdot u'$ alors $u = u'$.*

2. Axiomes du magmoïde projetable

Nous appellerons magmoïde projetable un couple (M, M_θ) où M est un magmoïde et M_θ un sous-magmoïde de M isomorphe à Θ et qui vérifie l'axiome suivant, où on identifie les éléments de Θ à leur image isomorphe dans M_θ .

P1 (axiome des projections) $\forall p, q \in \mathbf{N}, \forall u, u' \in M_q^p$, si $\forall i \in [p], \pi_p^i \cdot u = \pi_p^i \cdot u'$ alors $u = u'$.

Cet axiome signifie que tout élément de M_q^p est entièrement déterminé par ses p « projections ». Il résulte aussi de cet axiome que la fibre M_q^0 ne contient qu'un seul élément qui est l'image isomorphe de la torsion O_q .

Mais cet axiome des projections a aussi pour conséquence le résultat suivant :

PROPOSITION 7 : *Soit (M, M_θ) un magmoïde projetable et φ l'isomorphisme entre Θ et M_θ . Si Ψ est un homomorphisme de Θ dans M alors $\varphi = \Psi$.*

Démonstration :

- si $\theta = O_q$, comme M_q^0 ne contient qu'un seul élément, $\varphi(O_q) = \Psi(O_q)$;
- si $\theta = \text{Id}_1$, alors

$$\varphi(\theta) = \Psi(\theta) = e;$$

- si $\theta = \pi_p^i = O_{i-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{p-i}$ alors :

$$\varphi(\theta) = \varphi(O_{i-1}) \otimes \varphi(\text{Id}_1) \otimes \varphi(O_{p-i}) = \Psi(O_{i-1}) \otimes \Psi(\text{Id}_1) \otimes \Psi(O_{p-i}) = \Psi(\theta);$$

- si θ est un élément quelconque de Θ_q^p avec $p \geq 2$, alors $\pi_p^i \cdot \theta = \pi_q^{\theta(i)}$

d'où

$$\begin{aligned} \varphi(\pi_p^i) \cdot \varphi(\theta) &= \varphi(\pi_p^i \cdot \theta) = \varphi(\pi_q^{\theta(i)}) = \Psi(\pi_q^{\theta(i)}) \\ &= \Psi(\pi_p^i \cdot \theta) = \Psi(\pi_p^i) \cdot \Psi(\theta) = \varphi(\pi_p^i) \cdot \Psi(\theta) \end{aligned}$$

et donc d'après l'axiome des projections, $\varphi(\theta) = \Psi(\theta)$. \square

Il résulte de cette proposition que M_θ est l'unique sous-magmoïde de M soit isomorphe à Θ , et de plus il n'existe qu'un seul isomorphisme entre Θ et M_θ . Il n'est donc plus nécessaire de préciser M_θ dans la donnée d'un magmoïde projetable et nous pourrions parler désormais du magmoïde projetable M . M_θ

qu'on notera aussi $\Theta(M)$ sera appelé le magmoïde des torsions de M . De plus chaque fois qu'il n'y aura pas de risques d'ambiguïté nous identifierons les torsions de M à leurs images isomorphes dans Θ .

Remarquons enfin que puisque $\varphi(\text{Id}_1) = e$, $\varphi(\text{Id}_p) = e_p$, les éléments neutres du magmoïde projectable M sont précisément les torsions identiques.

3. Exemples de magmoïdes projectables

Le magmoïde Θ lui-même et $T(\Sigma)$ sont deux exemples de magmoïdes projectables. Donnons en un troisième.

Soit E un ensemble quelconque, ayant au moins deux éléments. Posons $F(E)_q^p$ égal à l'ensemble des applications de E^q dans E^p .

L'élément neutre e de $F(E)_1^1$ sera l'application identique de E dans E et e_0 sera l'unique application de E^0 dans E^0 .

Si $f \in F(E)_q^p$ et $f' \in F(E)_{q'}^{p'}$, $f \circ f'$ sera l'application $f \circ f'$ de $E^{r'}$ dans E^p .

Si $f \in F(E)_q^p$ et $f' \in F(E)_{q'}^{p'}$, $f \otimes f'$ est l'application de $E^{q+q'}$ dans $E^{p+p'}$ définie par

$$f \otimes f'(x_1, \dots, x_q, x'_1, \dots, x'_{q'}) = (y_1, \dots, y_p, y'_1, \dots, y'_{p'})$$

ssi

$$f(x_1, \dots, x_q) = (y_1, \dots, y_p) \quad \text{et} \quad f'(x'_1, \dots, x'_{q'}) = (y'_1, \dots, y'_{p'}).$$

On vérifie aisément que $F(E)$ est un magmoïde.

Soit maintenant une torsion θ de Θ_q^p . Nous lui associons l'élément $\gamma(\theta)$ de $F(E)_q^p$ défini par : $\gamma(\theta)(x_1, \dots, x_q) = (x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(p)})$. On vérifie aisément que γ est un morphisme de magmoïde. Si E contient au moins deux éléments alors γ est injectif; en effet soient $\theta, \theta' \in \Theta_q^p$; si $\theta \neq \theta'$, il existe $i \in [p]$ tel que $\theta(i) \neq \theta'(i)$. On choisit alors une séquence x_1, \dots, x_q telle que $x_{\theta(i)} \neq x_{\theta'(i)}$, d'où

$$\begin{aligned} \gamma(\theta)(x_1, \dots, x_q) &= (x_{\theta(1)}, \dots, x_{\theta(i)}, \dots, x_{\theta(p)}) \\ &\neq (x_{\theta'(1)}, \dots, x_{\theta'(i)}, \dots, x_{\theta'(p)}) = \gamma(\theta')(x_1, \dots, x_q); \end{aligned}$$

et donc $\gamma(\theta) \neq \gamma(\theta')$.

Pour que le magmoïde $F(E)$ soit projectable, il ne reste plus qu'à vérifier l'axiome P1. Or l'image de π_p^i est la fonction définie par $\gamma(\pi_p^i)(x_1, \dots, x_p) = x_i$. D'où si $f(x_1, \dots, x_q) = (y_1, \dots, y_p)$, $\gamma(\pi_p^i) \cdot f(x_1, \dots, x_q) = y_i$ et la fonction f est bien entièrement déterminée si l'on connaît toutes ses projections.

4. Le produit direct

Dans le cas du Σ -magma libre $T_\Sigma(X_n)$ le produit direct consiste à former à partir des éléments t_1, \dots, t_p de $T_\Sigma(X_n)$ le p -uple $\langle t_1, \dots, t_p \rangle$ de $T_\Sigma(X_n)^p$. En utilisant les notations du magmoïde $T(\Sigma)$ ceci revient à former à partir des

éléments $u_1 = \langle n; t_1 \rangle, \dots, u_p = \langle n; t_p \rangle$ de $T(\Sigma)_n^1$ l'élément $\langle n; t_1, \dots, t_p \rangle$ de $T(\Sigma)_n^p$ que nous noterons $[u_1, \dots, u_p]$. Cet élément est caractérisé par le fait que $\pi_p^i \cdot [u_1, \dots, u_p] = u_i$. En vertu de l'axiome des projections il est le seul à avoir cette propriété.

Nous montrons que cette construction peut se faire dans un magmoïde projectable quelconque :

LEMME 2 : *Soit M un magmoïde projectable. Soient p et q deux entiers avec $p \geq 2$. Soient $q_1, \dots, q_p \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in [p], u_i \in M_q^{q_i}$. Soit r_0, r_1, \dots, r_p la séquence d'entiers définie par $r_0 = 0, r_i = r_{i-1} + q_i$ et posons $r = r_p = q_1 + q_2 + \dots + q_p$. Il existe un et un seul élément u de M_r^r tel que pour tout $i \in [p]$, pour tout j tel que $r_{i-1} < j \leq r_i$ on ait $\pi_r^j \cdot u = \pi_{q_i}^{j-r_{i-1}} \cdot u_i$.*

Démonstration : Soit γ l'application de $[pq]$ dans $[q]$ définie par $\gamma(q(i-1) + j) = j$. Posons $u = (u_1 \otimes u_2 \dots \otimes u_p) \cdot \gamma$. Soient $i \in [p]$ et j tel que $r_{i-1} < j \leq r_i$ et posons $l = j - r_{i-1}$. La projection π_r^j est égale à $O_{j-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{r-j}$; de même $\pi_{q_i}^l = O_{l-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{q_i-l}$. Mais

$$j-1 = r_{i-1} + l-1 \quad \text{et} \quad r-j = r - r_{i-1} + q_i - j = r - r_i + q_i - l,$$

d'où

$$\pi_r^j = O_{r_{i-1}} \otimes \pi_{q_i}^l \otimes O_{r-r_i}$$

et donc

$$\begin{aligned} \pi_r^j \cdot u &= (O_{r_{i-1}} \otimes \pi_{q_i}^l \otimes O_{r-r_i}) \cdot (u_1 \otimes \dots \otimes u_p) \cdot \gamma \\ &= (O_{r_{i-1}} \cdot (u_1 \otimes \dots \otimes u_{i-1}) \otimes \pi_{q_i}^l \cdot u_i \otimes O_{r-r_i} \cdot (u_{i+1} \otimes \dots \otimes u_p)) \cdot \gamma \\ &= (O_{q(i-1)} \otimes \pi_{q_i}^l \cdot u_i \otimes O_{q(p-i)}) \cdot \gamma. \end{aligned}$$

Or $O_n = O_0 \cdot O_n$ pour tout n , et $\pi_{q_i}^l \cdot u_i = \pi_{q_i}^l \cdot u_i \cdot \text{Id}_q$ d'où

$$\pi_r^j \cdot u = (O_0 \otimes \pi_{q_i}^l \cdot u_i \otimes O_0) \cdot (O_{q(i-1)} \otimes \text{Id}_q \otimes O_{q(p-i)}) \cdot \gamma.$$

Mais

$$O_0 \otimes \pi_{q_i}^l \cdot u_i \otimes O_0 = \pi_{q_i}^l \cdot u_i \quad \text{et} \quad (O_{q(i-1)} \otimes \text{Id}_q \otimes O_{q(p-i)}) \cdot \gamma = \text{Id}_q$$

d'où $\pi_r^j \cdot u = \pi_{q_i}^l \cdot u_i$.

D'après l'axiome des projections, l'élément u qui vérifie cette propriété est unique. \square

Nous noterons $[u_1, \dots, u_p]$ l'unique élément u spécifié dans le lemme 2. Dans le cas particulier où $q_1 = q_2 = \dots = q_p = 1$ nous obtenons bien $\pi_p^i \cdot [u_1, \dots, u_p] = u_i$ pour tout i . Il suit immédiatement de là définition que $[[u_1, \dots, u_p], [u'_1, \dots, u'_p]] = [u_1, \dots, u_p, u'_1, \dots, u'_p]$ et donc l'opération qui à u_1 et u_2 associe $[u_1, u_2]$ peut être considéré comme un produit associatif qu'on appellera *produit direct*.

L'effet d'une torsion sur un produit direct est très facile à décrire :

PROPOSITION 8 : Soit M un magmoïde projetable. Soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et $q \geq 2$. Soient $\theta \in \Theta_q^p$ et pour tout $i \in [q]$ $u_i \in M_r^1$. Alors $\theta \cdot [u_1, \dots, u_q] = [u_{\theta(1)}, \dots, u_{\theta(p)}]$.

Démonstration : Comme pour $i \in [p]$, $\pi_p^i \cdot \theta = \pi_q^{\theta(i)}$, nous avons

$$\pi_p^i \cdot \theta [u_1, \dots, u_q] = \pi_q^{\theta(i)} \cdot [u_1, \dots, u_q] = u_{\theta(i)} = \pi_p^i \cdot [u_{\theta(1)}, \dots, u_{\theta(p)}]. \quad \square$$

Avec les notations du lemme 2 nous avons aussi :

PROPOSITION 9 : $[u_1, \dots, u_p] \cdot v = [u_1 \cdot v, \dots, u_p \cdot v]$.

Démonstration : Pour i, j, r_{i-1} et q_i définis comme dans le lemme 2,

$$\pi_r^j \cdot [u_1, \dots, u_p] \cdot v = \pi_{q_i}^{j-r_{i-1}} \cdot u_i \cdot v = \pi_r^j \cdot [u_1 \cdot v, \dots, u_p \cdot v].$$

L'égalité cherchée découle de l'axiome des projections. \square

5. Les magmoïdes projetables libres

Montrons d'abord que tout morphisme de magmoïde entre deux magmoïdes projetables respecte les torsions.

PROPOSITION 10 : Soient M et M' deux magmoïdes projetables. Soient φ l'isomorphisme entre Θ et $\Theta(M')$ et Ψ l'isomorphisme entre Θ et $\Theta(M')$. Soit ρ un morphisme de magmoïde de M dans M' . Alors $\rho \circ \varphi = \Psi$.

Ceci est un corollaire immédiat de la proposition 7. Comme nous avons identifié $\Theta(M)$ et $\Theta(M')$ à Θ , la proposition 9 signifie que tout morphisme de magmoïdes entre deux magmoïdes projetables est l'identité sur leur sous-magmoïdes de torsion.

De ce résultat et de la proposition 5 nous déduisons que $T(\Sigma)$ est le magmoïde projetable libre engendré par Σ .

Auparavant nous montrons que les morphismes de magmoïde respectent le produit direct.

PROPOSITION 11 : Soient M et M' deux magmoïdes projetables et φ un morphisme de M dans M' . $\forall p \geq 2, \forall q \in \mathbb{N}, \forall r_1, r_2, \dots, r_p \in \mathbb{N}$, si pour tout $i \in [p]$ $u_i \in M_{q_i}^{r_i}$, alors $\varphi([u_1, \dots, u_p]) = [\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)]$.

Ceci est un corollaire immédiat du fait que $\pi_r^i \cdot \varphi(u) = \varphi(\pi_r^i(u))$ et de la définition de $[u_1, \dots, u_p]$.

THÉORÈME 2 : Soit Σ un alphabet gradué. Quel que soit le magmoïde projetable M , toute application φ de Σ dans M qui respecte la graduation s'étend de manière unique en un morphisme $\hat{\varphi}$ de $T(\Sigma)$ dans M .

Démonstration : Comme $\tilde{T}(\Sigma)$ est le magmoïde libre engendré par Σ , φ s'étend de façon unique en un morphisme $\bar{\varphi}$ de $\tilde{T}(\Sigma)$ dans M . Comme d'après la proposition 5 tout élément u de $T(\Sigma)$ s'écrit de façon unique $\tilde{u} \cdot \theta$ avec $\tilde{u} \in \tilde{T}(\Sigma)$ et $\theta \in \Theta$ nous pouvons définir l'application $\hat{\varphi}$ de $T(\Sigma)$ dans M par $\hat{\varphi}(u) = \bar{\varphi}(\tilde{u}) \cdot \theta$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $\hat{\varphi}$ est bien un homomorphisme; pour cela il est suffisant de montrer que $\hat{\varphi}$ est compatible avec les produits, puisque $\hat{\varphi}(\text{Id}_p) = \bar{\varphi}(\text{Id}_p) \cdot \text{Id}_p = \text{Id}_p$.

Pour le produit tensoriel nous avons

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(\tilde{u} \cdot \theta \otimes \tilde{u}' \cdot \theta') &= \hat{\varphi}((\tilde{u} \otimes \tilde{u}') \cdot (\theta \otimes \theta')) = \bar{\varphi}(\tilde{u} \otimes \tilde{u}') \cdot (\theta \otimes \theta') \\ &= (\bar{\varphi}(\tilde{u}) \otimes \bar{\varphi}(\tilde{u}')) \cdot (\theta \otimes \theta') = \bar{\varphi}(\tilde{u}) \cdot \theta \otimes \bar{\varphi}(\tilde{u}') \cdot \theta' \\ &= \hat{\varphi}(\tilde{u} \cdot \theta) \otimes \hat{\varphi}(\tilde{u}' \cdot \theta'). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\hat{\varphi}(u) \cdot \hat{\varphi}(v) = \hat{\varphi}(u \cdot v)$.

Montrons-le d'abord dans le cas où u est une projection. Soient donc $p \geq 2$, $i \in [p]$ et $v \in T(\Sigma)_q^p$. L'élément v s'écrit de façon unique $(\tilde{v}_1 \otimes \tilde{v}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{v}_p) \cdot \theta$ avec $\tilde{v}_j \in \tilde{T}(\Sigma)_r^1$. Posons

$$m = r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1}, \quad n = r_{i+1} + \dots + r_p.$$

Nous obtenons

$$\pi_p^i \cdot v = (0_{i-1} \otimes \text{Id}_1 \otimes O_{p-i}) \cdot v = (O_m \otimes \tilde{v}_i \otimes O_n) \cdot \theta = \tilde{v}_i \cdot (O_m \otimes \text{Id}_r \otimes O_n) \cdot \theta,$$

d'où

$$\hat{\varphi}(\pi_p^i \cdot v) = \bar{\varphi}(\tilde{v}_i) \cdot (O_m \otimes \text{Id}_r \otimes O_n) \cdot \theta.$$

D'autre part

$$\hat{\varphi}(v) = (\bar{\varphi}(\tilde{v}_1) \otimes \dots \otimes \bar{\varphi}(\tilde{v}_p)) \cdot \theta$$

et donc

$$\pi_p^i \cdot \bar{\varphi}(v) = \bar{\varphi}(\tilde{v}_i) \cdot (O_m \otimes \text{Id}_r \otimes O_n) \cdot \theta,$$

le calcul se conduisant comme précédemment.

Considérons maintenant le cas où $u = \theta \in \Theta_p^r$. D'après le point précédent pour tout $i \in [r]$,

$$\pi_r^i \cdot \hat{\varphi}(\theta \cdot v) = \hat{\varphi}(\pi_r^i \cdot \theta \cdot v) \quad \text{et} \quad \pi_p^{\theta(i)} \cdot \hat{\varphi}(v) = \hat{\varphi}(\pi_p^{\theta(i)} \cdot v);$$

d'où

$$\pi_r^i \cdot \hat{\varphi}(\theta \cdot v) = \pi_r^i \cdot \theta \cdot \hat{\varphi}(v)$$

et donc d'après l'axiome des projections $\hat{\varphi}(\theta \cdot v) = \theta \cdot \hat{\varphi}(v)$.

Examinons enfin le cas où $u = \tilde{u} \cdot \theta$. Nous avons alors $\hat{\phi}(u) \cdot \hat{\phi}(v) =$ qui est aussi égal, d'après ce qui précède, à $\bar{\phi}(\tilde{u}) \cdot \hat{\phi}(\theta \cdot v)$. Mais $\theta \cdot v$ s'écrit $\tilde{w} \cdot \theta'$ d'où

$$\hat{\phi}(\theta \cdot v) = \hat{\phi}(\tilde{w} \cdot \theta') = \bar{\phi}(\tilde{w}) \cdot \theta'$$

et donc

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(u) \cdot \hat{\phi}(\theta \cdot v) &= \bar{\phi}(\tilde{u}) \cdot \bar{\phi}(\tilde{w}) \cdot \theta' \\ &= \bar{\phi}(\tilde{u} \cdot \tilde{w}) \cdot \theta' = \hat{\phi}(\tilde{u} \cdot \tilde{w} \cdot \theta') = \hat{\phi}(\tilde{u} \cdot \theta \cdot v) = \hat{\phi}(u \cdot v). \quad \square \end{aligned}$$

Exemple 6: Soient Σ l'alphabet $\{f, g, a\}$ avec $d(f) = d(g) = 2; d(a) = 0$ et Δ l'alphabet $\{h, b\}$ avec $d(h) = 3$ et $d(b) = 0$.

Soit ϕ l'application de Σ dans $T(\Delta)$ définie par

$$\begin{aligned} \phi(f) &= \langle 2; h(x_1, x_2, x_1) \rangle \in T(\Delta)_2^1, \\ \phi(g) &= \langle 2; b \rangle \in T(\Delta)_2^1, \\ \phi(a) &= \langle 0; b \rangle \in T(\Delta)_0^1 \end{aligned}$$

et calculons l'image par l'extension $\hat{\phi}$ de ϕ de l'élément

$$u = \langle 5; f(x_3, g(x_1, a)), f(x_2, a) \rangle \in T(\Sigma)_5^2.$$

Cet élément s'écrit $\tilde{u} \cdot \theta$ avec

$$\tilde{u} = \langle 3; f(x_1, g(x_2, a)), f(x_3, a) \rangle \quad \text{et} \quad \theta = \langle 5; x_3, x_1, x_2 \rangle.$$

Mais

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \langle 2; f(x_1, g(x_2, a)) \rangle \otimes \langle 1; f(x_1, a) \rangle \\ &= (f \cdot (\text{Id}_1 \otimes (g \cdot (\text{Id}_1 \otimes a))) \otimes (f \cdot (\text{Id}_1 \otimes a))) \\ &= (f \otimes f) \cdot (\text{Id}_1 \otimes (g \cdot (\text{Id}_1 \otimes a))) \otimes \text{Id}_1 \otimes a \end{aligned}$$

d'où

$$\hat{\phi}(u) = \bar{\phi}(\tilde{u}) \cdot \theta = (\phi(f) \otimes \phi(f)) \cdot (\text{Id}_1 \otimes (\phi(g) \cdot (\text{Id}_1 \otimes \phi(a)))) \otimes \text{Id}_1 \otimes \phi(a) \cdot \theta.$$

Or

$$\begin{aligned} \phi(f) \otimes \phi(f) &= \langle 2; h(x_1, x_2, x_1) \rangle \otimes \langle 2; h(x_1, x_2, x_1) \rangle \\ &= \langle 4; h(x_1, x_2, x_1), h(x_3, x_4, x_3) \rangle; \\ \text{Id}_1 \otimes \phi(a) &= \langle 1; x_1 \rangle \otimes \langle 0; b \rangle = \langle 1; x_1, b \rangle \end{aligned}$$

et

$$\phi(g) \cdot (\text{Id}_1 \otimes \phi(a)) = \langle 2; b \rangle \cdot \langle 1; x_1, b \rangle = \langle 1; b \rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(\bar{u}) \cdot \theta &= \langle 4; h(x_1, x_2, x_1), h(x_3, x_4, x_3) \rangle \cdot \langle \langle 1; x_1 \rangle \otimes \langle 1; b \rangle \otimes \langle 1; x_1, b \rangle \rangle \cdot \theta \\ &= \langle 4; h(x_1, x_2, x_1), h(x_3, x_4, x_3) \rangle \cdot \langle 3; x_1, b, x_3, b \rangle \cdot \theta \\ &= \langle 3; h(x_1, b, x_1), h(x_3, b, x_3) \rangle \cdot \theta = \langle 5; h(x_3, b, x_3), h(x_2, b, x_2) \rangle\end{aligned}$$

En utilisant le produit direct on peut également calculer $\hat{\varphi}(u)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}u &= [f, [\pi_5^3, g, [\pi_5^1, a, O_5], f, [\pi_5^2, a, O_5]], \\ \varphi(f) &= h \cdot [\pi_2^1, \pi_2^2, \pi_2^1], \\ \varphi(g) &= b \cdot O_2; \varphi(a) = b\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi(u) &= [h \cdot [\pi_2^1, \pi_2^2, \pi_2^1] \cdot [\pi_5^3, b \cdot O_2 \cdot [\pi_5^1, b \cdot O_5]], \\ &\quad h \cdot [\pi_2^1, \pi_2^2, \pi_2^1] \cdot [\pi_5^2, b \cdot O_5]].\end{aligned}$$

Or il est immédiat, d'après la définition du produit direct, que $[u_1, \dots, u_p] \cdot v = [u_1 \cdot v, \dots, u_p \cdot v]$ d'où $\varphi(u)$ peut s'écrire aussi

$$[h \cdot [\pi_5^3, b \cdot O_5, \pi_5^3], h(\pi_5^2, b \cdot O_5, \pi_5^2)].$$

C'est bien de cette façon que l'on définit les homomorphismes d'arbres sur les arbres indexés.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. A. ARBIB et Y. GIVE'ON, *Algebra Automata, Information and Control*, vol. 12, 1968, p. 331-370.
2. A. ARNOLD, *Systèmes d'équations dans le magmaïde. Ensembles rationnels et algébriques d'arbres*, Thèse d'État, Lille, 1977. .
3. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Bimorphismes, S-morphismes et bi-S-morphismes*, Publication du Laboratoire de Calcul, n° 59, 1975.
4. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Théorie des magmaïdes*, Publication du Laboratoire de Calcul de Lille, 1977.
5. G. BOUDOL, *Langages polyadiques algébriques. Théorie des schémas de programme : sémantique de l'appel par valeur*, Thèse 3^e cycle, Université Paris-VII, 1975.
6. W. S. BRAINERD, *Tree Generating Regular Systems*, Information and Control, vol. 14, 1969, p. 217-231.
7. P. M. COHN, *Universal Algebra*, Harper and Row, New York, 1965.
8. G. COUSINEAU, *Les arbres à feuilles indicées : un cadre algébrique pour l'étude des structures de contrôle*, Thèse d'État, Université Paris-VII, 1977.
9. M. DAUCHET, *Transductions de forêts. Bimorphismes de magmaïdes*, Thèse d'État, Lille, 1977.

10. P. DOWNEY, *Formal Languages and Recursion Schemes*, Ph. D. Thesis, Harvard University, 1974.
11. S. EILENBERG et J. B. WRIGHT, *Automata in General Algebras*, Information and Control, vol. 11, 1967, p. 217-231.
12. C. C. ELGOT, *Matricial Theories*, J. Alg., vol. 42, 1976, p. 391-421.
13. J. ENGELFRIET et E. M. SCHMIDT, *IO and OI*, Daimi Report PB 47, University of Aarhus, Danemark, 1975.
14. J. A. GOGUEN, J. W. THATCHER, E. G. WAGNER et J. B. WRIGHT, *Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras*, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 24, 1977, p. 68-95.
15. G. JACOB, *Substitution dans les arbres et non-déterminisme. Appel par nom et appel synchrone* in *Les Arbres en Algèbre et en Programmation*, 2nd Colloque de Lille, 1977, p. 162-198.
16. F. W. LAWVERE, *Functorial Semantics of Algebraic Theories*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., vol. 50, 1963, p. 869-872.
17. E. LILIN, *S-transducteurs de forêts*, Publications du Laboratoire de Calcul de Lille, n° 101, 1977.
18. T. S. E. MAIBAUM, *A generalized Approach to Formal Languages*, J. Comput. System Sc., vol. 8, 1974, p. 402-432.
19. M. NIVAT, *Langages algébriques sur le magma libre et sémantique des schémas de programme* in *Automata, Languages and Programming*, 1st colloquium, M. NIVAT, éd., North Holland, 1973, p. 293-307.
20. M. NIVAT, *On the Interpretation of Polyadic Recursive Programs Schemes*, Symposia Mathematica (Rome), vol. 15, 1975, p. 255-281.
21. C. PAIR et A. QUERF, *Définition et étude des bilangages réguliers*, Information and Control, vol. 13, 1968, p. 565-593.
22. B. K. ROSEN, *Tree-Manipulating Systems and Church-Rosser Theorem*, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 20, 1973, p. 160-187.
23. W. C. ROUNDS, *Context-Free Grammars on Trees*, 1st A.C.M. Symp. on Theory of Computing, 1969, p. 143-148.
24. W. C. ROUNDS, *Mappings and grammars on trees*, Math. Systems Theory, vol. 4, 1970, p. 257-287.
25. J. W. THATCHER, *Tree Automata : an Informal Survey in Currents in the Theory of Computing*, A. V. AHO, éd., Prentice Hall, 1973, p. 143-178.
26. J. TIURYN, *Fixed-Points and Algebras with Infinitely Long Expressions*. 1^{re} partie : *Mathematical Foundations of Computer Science*, Lecture Notes in Comput. Science, n° 53, 1977, p. 513-522; 2^e partie : *Fundamentals of Computation Theory*, Lecture Notes in Comput. Science, n° 56, 1977, p. 332-339.