GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

JOSEPH CHACRON

Treillis des idempotents centraux d'un anneau

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 5, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A5_0>

Groupe d'étude d'ALGÈBRE
(Marie-Paule MALLIAVIN)
2e année, 1976/77, n° 5, 11 p.

18 avril 1977

TREILLIS DES IDEMPOTENTS CENTRAUX D'UN ANNEAU

par Joseph CHACRON

Les notations et les définitions générales sont comme dans [5] : A désigne dans toute la suite un anneau non nécessairement commutatif, ni unitaire ; l'ensemble de ses idempotents centraux pour l'ordre induit par la relation habituelle entre idempotents ($e \leqslant f$ si $e = ef = fe$) est, on le sait, ([5], chap. IX, § 3) un treillis distributif où

$$e \wedge f = ef \quad \text{et} \quad e \vee f = e + f - ef ,$$

l'anneau A est dit semi-simple si le radical de Jacobson de A est nul, et simple si $A^2 \neq 0$ et si les seuls idéaux de A sont A et 0 ; pour tout idempotent central e de A , l'idéal eA est un facteur direct dont un complément est, par exemple, l'ensemble des $x - ex$ lorsque x parcourt A , idéal que nous noterons $A - eA$. Nous résumons dans la proposition suivante des résultats que l'on peut établir aisément, et que nous utiliserons dans la suite.

PROPOSITION 1.

1° Si e est un idempotent central, et f un idempotent quelconque, on a $e \leqslant f$ si, et seulement si, $eA \subseteq fA$.

2° Tout idéal d'un facteur direct de A est un idéal de A .

3° Tout idempotent central dans un facteur direct de A est central dans A .

4° Si $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est une suite d'idempotents centraux orthogonaux deux à deux ($e_i e_j = 0$ si $i \neq j$), alors

$$\bigvee_{i=1}^{n} e_i = e_1 + e_2 + \dots + e_n .$$

5° Dans les mêmes conditions qu'au 4°, on a

$$A - (e_1 + \dots + e_n)A = \bigcap_{i=1}^{n} (A - e_i A) .$$

6° Dans les mêmes conditions qu'au 4°, pour tout idéal I de A , on a

$$I \cap (e_1 A + e_2 A + \dots + e_n A) = (I \cap e_1 A) + \dots + (I \cap e_n A) .$$

1. Idempotents centralement primitifs.

Définition 1.

1° L'anneau A est dit centralement unipotent (resp. bipotent) si le seul idempotent central de A est 0 (resp. A admet deux idempotents centraux, et deux seulement).

2° Un idéal I de A est dit E-centralement maximal si le treillis de ses idem-

potents centraux est un idéal maximal de celui de A.

3° Un idempotent e de A est dit centralement primitif s'il est un point dans le treillis des idempotents centraux de A, autrement dit si $e \neq 0$ et si, pour tout idempotent central $f \neq 0$ tel que $f \leqslant e$, on a $e = f$.

La proposition suivante caractérise un idempotent centralement primitif d'un anneau quelconque.

PROPOSITION 2. - Soit e un idempotent central de A. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° L'idempotent e est centralement primitif.

2° L'idéal eA est centralement bipotent.

3° L'idéal $A - eA$ est E-centralement maximal.

Démonstration.

1° entraîne 2° : Il est évident que les idempotents 0 et e sont centraux dans eA. Pour tout idempotent central f dans eA et différent de 0, il existe $x \in A$ tel que $f = ex$, et par conséquent

$$f = ef \quad \text{et} \quad f \neq 0 ,$$

ce qui entraîne que $e = f$ puisque f est central dans A (proposition 1 (3°)) et que e est centralement primitif.

2° entraîne 3° : L'idéal $A - eA$ est un facteur direct de A et ne contient pas l'idempotent central e, de sorte que l'ensemble T de ses idempotents centraux est évidemment un idéal propre du treillis R des idempotents centraux de A dont nous allons démontrer la maximalité : supposons à cet effet que $T \subseteq T'$, où T' est un idéal propre de R, et soit $f \in T'$. Si $ef = 0$, alors $f = f - ef$, et est donc un élément de T. Si $ef \neq 0$, l'idempotent central non nul ef est dans eA, et comme eA est centralement bipotent, $ef = e$; comme T' est un idéal de R, il vient $e \in T'$. Mais alors, pour tout idempotent central g de A, on peut écrire que $g = eg + (g - eg)$, ce qui montre que $T' = R$, et que T est un idéal maximal de R.

3° entraîne 1° : Soit f un idempotent central de A non nul et tel que $f \leqslant e$. Désignons par S l'idéal engendré par f dans R, c'est-à-dire l'ensemble des idempotents centraux de A inférieurs ou égaux à f. Avec les mêmes notations que précédemment et d'après la maximalité de T, on doit avoir $T \vee S = T$ ou $T \vee S = R$ Dans le premier cas, f est un idempotent dans $A - eA$, et l'on aurait $ef = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse que $f \neq 0$ et $f \leqslant e$. Par conséquent, $T \vee S = R$, et par suite,

$$e = g \vee h , \quad g \leqslant f \quad \text{et} \quad h = x - ex \quad \text{pour un} \quad x \in A ,$$

ce qui entraîne que $e = ge$ et par suite $e \leqslant g \leqslant f$, soit $e \leqslant f$ et $e = f$.

PROPOSITION 3. - Soit A un anneau birégulier ([5], ch. IX, § 4). Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° L'idempotent e est centralement primitif.

2° L'idéal eA est un anneau simple.

Démonstration.

1° entraîne 2° : Il est évident que $(eA)^2 \neq 0$ et, si I est un idéal de eA, pour un élément a de I, l'idéal principal (a) engendré par a dans A est contenu dans I du fait que I est aussi un idéal de A (l'idéal eA est en effet un facteur direct de A). Mais, par définition, il existe un idempotent central f tel que $(a) = (f)$ et, si $a \neq 0$, l'idempotent central f est, d'après la proposition 2, égal à e. Par conséquent, $(e) = (f) \subseteq I$, soit $eA \subseteq I$, et $I = eA$ si $I \neq 0$.

2° entraîne 1° : Soit en effet f un idempotent central non nul tel que $f < e$. Il est clair que $f \in eA$, et par suite $fA \subseteq eA$. Comme eA est simple, il vient $fA = eA$ et $e = f$.

2. Finitude du treillis des idempotents centraux.

Nous nous proposons de donner ici des conditions suffisantes pour que le treillis des idempotents centraux d'un anneau soit fini ; nous rappelons à cet effet un résultat général que l'on établit pour un treillis de Boole ([2], ch. X, § 5).

PROPOSITION 4. - Soit T un treillis de Boole. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° T est isomorphe au treillis des parties d'un ensemble fini.

2° T vérifie la condition de chaîne ascendante.

3° T vérifie la condition de chaine descendante.

THÉORÈME 1. - Tout anneau vérifiant la condition de chaine ascendante a un nombre fini d'idempotents centraux qui est toujours une puissance de 2.

Démonstration. - Considérons à cet effet l'ensemble des idéaux eA lorsque e est un idempotent central de A ; comme A vérifie la condition de chaîne ascendante, cet ensemble d'idéaux admet un élément maximal que nous notons uA, et il est évident, d'après la proposition 1 (1°) que l'idempotent central u est un élément maximal du treillis des idempotents centraux de A, et est par conséquent un élément maximum de ce treillis. Pour tout idempotent central e, on a alors :

$$e \wedge (u - e) = e(u - e) = e - e = 0 ,$$

$$e \vee (u - e) = e + (u - e) - e(u - e) = u ,$$

ce qui montre que le treillis des idempotents centraux de A est distributif et complémenté. La proposition 1 (1°) montre que ce treillis vérifie aussi la condition de chaîne ascendante, la proposition 4 donne le résultat à montrer.

THÉORÈME 2. - Tout anneau vérifiant la condition de chaîne descendante a un nombre fini d'idempotents centraux qui est toujours une puissance de 2.

Démonstration.

1° Le treillis des idempotents centralement primitifs de A est fini. Supposons en effet qu'il existe une suite injective (e_n) d'idempotents centralement primitifs, et considérons la suite (I_n) d'idéaux définis par

$$I_n = A - (e_1 + e_2 + \dots + e_n)A ,$$

qui, d'après la proposition 1 (5°) est une suite décroissante d'idéaux de A. Comme A vérifie la condition de chaîne descendante, il existe un entier n_0 tel que $I_{n_0+1} = I_{n_0}$, ce qui revient à dire que

$$A - (e_1 + e_2 + \dots + e_n)A = A - (e_1 + e_2 + \dots + e_{n_0} + e_{n_0+1})A ,$$

et par conséquent

$$A = (e_1 + e_2 + \dots + e_{n_0})A + (A - (e_1 + e_2 + \dots + e_{n_0} + e_{n_0+1})A) .$$

ce qui entraîne que

$$e_{n_0+1} = (e_1 + \dots + e_{n_0})x + (y - (e_1 + \dots + e_{n_0+1})y) ,$$

soit en multipliant les deux membres de l'égalité par e_{n_0+1} il vient $e_{n_0+1} = 0$, ce qui est contraire à la définition des e_i.

2° Tout idempotent central de A est une union d'idempotents centralement primitifs. Considérons à cet effet un idempotent central e. Comme le treillis des idempotents centraux de A vérifie le condition de chaine descendante (proposition 1 (1°)), il existe un idempotent centralement primitif e_1 tel que $e_1 \leqslant e$. Définissons alors la suite f_i par

$$f_1 = e - e_1 , \quad f_{i+1} = e - (e_1 + \dots + e_{i+1}) ,$$

si e_{i+1} est un idempotent centralement primitif contenu dans f_i, et $f_{i+1} = f_i$ si f_i est un idempotent centralement primitif. Il est évident que la suite (f_i) est une suite d'idempotents centraux décroissante, et par conséquent il existe un entier n tel que f_n soit centralement primitif, soit encore $e = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ et que e est une union d'idempotents centralement primitifs.

D'après 1° et 2°, on voit que l'union des idempotents centralement primitifs de A est un élément maximum du treillis des idempotents centraux de A qui est par conséquent un treillis de Boole qui vérifie la condition de chaîne descendante et qui, d'après la proposition 4, est fini.

3. Décomposition d'un anneau en fonction des idempotents centraux.

Définition 2. - Un anneau est dit E-centralement fini si le treillis de ses idempotents centraux est fini.

Il est évident que si A est E-centralement fini, tout facteur direct de A est

E-centralement fini, et tout produit fini d'anneaux E-centralement finis est E-centralement fini, mais un idéal de A n'est pas à priori E-centralement fini ou de la même manière une image homomorphe de A, ce qui nous amène à poser la question suivante :

Question 1. - Tout idéal ou toute image homomorphe d'un anneau E-centralement fini sont-ils E-centralement finis ?

THÉORÈME 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est E-centralemement fini,

2° A est décomposable d'une, et une seule, manière en somme directe d'idéaux dont tous sont des anneaux unitaires centralement bipotents, sauf un qui est centralement unipotent.

Démonstration.

1° entraîne 2° : Désignons par $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ la suite nécessairement finie des idempotents centralement primitifs de A, et par u l'idempotent somme des e_i. Il est évident que

$$A = uA + (A - uA) = e_1 A + e_2 A + \dots + e_n A + (A - uA) ,$$

est une décomposition de A en somme directe dont chaque facteur $e_i A$ est, d'après la proposition 2, centralement bipotent. Le facteur $(A - uA)$ est centralement unipotent car, si f est un idempotent central dans $(A - uA)$, l'idempotent f est central dans A, et est donc dans uA, et par suite égal à 0. Démontrons maintenant l'unicité d'une telle décompcsition : Supposons que la décompcsition suivante

$$A = I_1 + I_2 + \dots + I_m + J$$

réalise les conditions de l'hypothèse. Il est évident que, pour tout $i = 1, \dots, m$, l'idempotent central f_i de I_i non nul est central dans A. Démontrons sa primitivité : si à cet effet g est un idempotent central non nul de A, tel que $g \leqslant f_i$, alors $g = gf_i$, et est donc dans I_i et par suite égal f_i. Par conséquent, $m \leqslant n$. Réciproquement, si e est un idempotent centralement primitif, on doit avoir

$$e = x_1 + x_2 + \dots + x_m + y ,$$

où les x_i sont évidemment des idempotents centraux dans I_i, et de même y dans Y (et par conséquent nul). Donc il existe un, et un seul, indice i tel que $e \in I_i$, et par conséquent $n \leqslant m$, et $n = m$. Si maintenant i est un indice quelconque, il existe un indice $j(i)$ tel que

$$e_i \in I_{j(i)} ,$$

par conséquent, e_i est l'unité de l'anneau $I_{j(i)}$ et $e_i A = I_{j(i)}$. Ainsi, à l'ordre près, les I_i sont les $e_i A$. Par conséquent,

$$A = uA + (A - uA) = uA + J .$$

Pour tout $z \in J$, il existe $x, y \in A$ tels que

$$z = ux + (y - uy) ,$$

et par suite $uz = ux$, et $uz \in J \cap uA$, soit $uz = 0 = ux$, et $z \in A - uA$.

Si réciproquement $x - ux$ est donné, on peut écrire que

$$x - ux = uy + z , \text{ pour un } z \in J ,$$

et par suite $u(x - ux) = 0 = uy + uz$, soit $uy = 0$, et $x - ux \in J$. Ce qui montre que $J = A - uA$, et achève la démonstration.

2° entraîne 1° : Car tout idempotent central dans A est une somme d'idempotents centraux des composantes centralement bipotentes ou unipotentes de A.

Les théorèmes 1, 2 et 3 nous donnent le théorème suivant.

THÉORÈME 4. - Tout anneau vérifiant la condition de chaîne ascendante (resp. descendante) est décomposable d'une, et une seule manière comme somme directe d'anneaux tous centralement bipotents sauf un qui est centralement unipotent vérifiant tous la condition de chaîne ascendante (resp. descendante).

Nous allons voir ce que donne la décomposition définie par le théorème 3 dans le cas d'un anneau vérifiant les conditions du théorème de Wedderburn-Artin.

PROPOSITION 5. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est semisimple, et vérifie la condition de chaîne descendante à droite (ou à gauche).

2° A est unitaire, E-centralement fini et, pour tout idempotent centralement primitif e, l'idéal eA est simple, et vérifie la condition de chaîne descendante à droite (ou à gauche).

Démonstration.

1° entraîne 2° : On sait en effet ([5], ch. III, § 3) que A est unitaire et, d'après le théorème 2, que A est E-centralement fini. En outre, le théorème de Wedderburn-Artin nous permet d'écrire que

$$A = S_1 + S_2 + \ldots + S_n ,$$

où les S_i sont des idéaux de A anneaux simples et unitaires et par conséquent des anneaux centralement bipotents. Le théorème 3 nous montre alors que les S_i sont exactement les $e_i A$, où les e_i sont les idempotents centralement primitifs de A : les $e_i A$ sont donc simples, et vérifient la condition de chaîne envisagée.

2° entraîne 1° : En effet, le théorème 3 nous montre que A est somme directe d'anneaux simples, unitaires et vérifiant la condition de chaîne descendante à droite qui sont par conséquent semi-simples avec la même condition de chaîne, de sorte que A est semi-simple avec la même condition.

4. Anneaux n-simples.

Nous allons donner, moyennant les propriétés des idempotents centralement primitifs, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un anneau soit somme directe d'idéaux simples [1].

Définition 3. - Un anneau est dit n-simple s'il est somme directe de n idéaux simples et unitaires.

D'après le théorème de Wedderburn-Artin tout anneau semi-simple, et vérifiant la condition de chaîne descendante à droite ou à gauche, est n-simple pour un entier n ; le théorème suivant nous fournira divers procédés pour en construire.

THÉORÈME 5. Soit A un anneau unitaire ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est un anneau n-simple,

2° Le treillis des idéaux de A est isomorphe au treillis de toutes les parties d'un ensemble fini à n éléments,

3° A est birégulier et E-centralement fini avec n idempotents centralement primitifs.

Démonstration.

1° entraîne 2° : Comme A est somme directe d'idéaux simples, et comme tout anneau simple est au plus centralement bipotent, A est E-centralement fini ; de sorte que le théorème 3 nous montre que

$$A = e_1 A + e_2 A + \dots + e_n A ,$$

où les e_i sont les idempotents centralement primitifs de A et les idéaux $e_i A$ tous simples. Ceci dit, si I est un idéal de A , d'après la proposition 1 (6°) nous pouvons écrire que

$$I = I \cap A = (I \cap e_1 A) + (I \cap e_2 A) + \dots + (I \cap e_n A) ,$$

où $I \cap e_i A$ est evidemment un idéal de $e_i A$, et est par conséquent nul ou égal à $e_i A$; de sorte que l'on a

$$I = (I \cap e_{i_1} A) + (I \cap e_{i_2} A) + \dots + (I \cap e_{i_k} A) ,$$

où les e_{i_j} sont tels que $I \cap e_{i_j} A = e_{i_j} A$, et par conséquent,

$$I = e_{i_1} A + e_{i_2} A + \dots + e_{i_k} A = (e_{i_1} + e_{i_2} + \dots + e_{i_k})A ,$$

et $I = eA$ pour un idempotent central e . Par conséquent, l'application $e \longrightarrow eA$ du treillis des idempotents centraux de A vers le treillis des idéaux de A qui, d'après la proposition 1 (1°) est injective, est aussi surjective, et est donc un isomorphisme de ces deux ensembles ordonnés ; la proposition 4 donne alors le résultat à montrer.

2° entraîne 3° : Soit I un idéal minimal de A ; montrons qu'il existe un idempotent central e de A tel que $I = eA$: il existe à cet effet un idéal J tel que A soit somme directe de I et J, de sorte que l'élément unité de A se décompose comme la somme de deux idempotents centraux $e \in I$ et $f \in J$, et l'on a $eA \subseteq I$, et par suite $eA = I$. Ceci dit, le treillis des idéaux de A admet n éléments minimaux (I_k) pour lesquels il existe n idempotents centraux e_k tels que $I_k = e_k A$, et qui sont par conséquent centralement primitifs. Ainsi A admet au moins n idempotents centralement primitifs. Si maintenant e est un idempotent centralement primitif dans A, l'idéal eA est minimal, car si I est un idéal contenu dans eA et non nul, l'idéal I contient un idéal minimal de la forme fA, et par suite $f = e$, et $eA \subseteq I$, soit $I = eA$. Ce qui mpntre que A admet exactement n idempotents centralement primitifs. Soit maintenant (a) un idéal principal ; il existe un idéal J tel que A soit somme directe des idéaux (a) et J ; il existe par conséquent un idempotent central e dans (a) et f dans J tels que $1 = e + f$, ce qui prouve que e est l'élément neutre de (a), et par suite $eA \subseteq (a)$ et $(a) \subseteq eA$, et $(a) = (e)$, ce qui achève la démonstration.

3° entraîne 1° : D'après la proposition 3, les idéaux $e_i A$, où e_i est centralement primitif, sont des anneaux simples ; A étant unitaire, l'idéal $A - uA$, où u est la somme des idempotents centralement primitifs, est nul car 1 est l'élément maximum du treillis des idempotents centraux de A de sorte que le théorème 3 nous donne le résultat à montrer.

5. Anneaux n-commutatifs

Définition 4. - Un anneau est dit n-commutatif s'il vérifie l'identité

$$(ab)^n = a^n b^n = b^n a^n .$$

Il est évident que tout sous-anneau, tout produit ou toute image homomorphe d'anneaux n-commutatifs est n-commutatif ; un anneau n-commutatif n'est pas nécessairement commutatif : il suffit, par exemple, de considérer le produit d'un anneau nilpotent non commutatif par un anneau commutatif non nilpotent pour obtenir un anneau n-commutatif non commutatif et non nilpotent ; il est évident que si A est n-commutatif, pour tout entier k, l'anneau A est aussi kn-commutatif.

Nous allons établir un théorème de décomposition primaire de tout anneau n-commutatif vérifiant la condition de chaîne descendante à droite ou à gauche, et nous aurons besoin de la notion suivante.

Définition 5. - Un anneau est dit hyperprimaire s'il est unitaire et si chaque élément est nilpotent ou inversible.

Nous remarquerons qu'un élément non nul d'un anneau n'est jamais à la fois nilpotent et inversible car si a est un tel élément, et en désignant par m l'index de a (le plus petit entier r tel que $a^r = 0$), il existe x tel que $ax = 1$ et par suite $a^{r-1}(ax) = a^{r-1} = 0$; ceci dit, nous allons situer les anneaux hyperprimaires:

PROPOSITION 6. - Tout anneau hyperprimaire est complétement primaire ([5], ch. III § 9).

Démonstration. - D'après [5] (ch. III, § 9, proposition 1), il suffit de montrer que l'ensemble des nilpotents d'un anneau hyperprimaire est un idéal : soit à cet effet a un nilpotent de A, et x un élément quelconque. Si, par exemple, ax n'est pas nilpotent, ax est inversible, et par conséquent $(ax)y = 1$ pour un y dans A. Si m est l'index de a, on obtient $a^{m-1}(ax)y = a^{m-1} = 0$, ce qui prouve bien que ax est nilpotent ; de la même manière aussi, xa est nilpotent.

Supposons maintenant que a et b soient deux éléments nilpotents. Si $a + b$ n'est pas nilpotent, il existe x dans A tel que $(a + b)x = 1$, et d'après ce qui précède ax et bx seraient nilpotents et tels que $ax = 1 - bx$. Or bx et $1 - bx$ sont permutables, et tous deux nilpotents, leur somme serait donc un nilpotent, ce qui assure la contradiction et que l'ensemble des nilpotents de l'anneau est un idéal.

Il est évident que tout anneau complètement primaire et vérifiant la condition de chaîne descendante à droite est hyperprimaire ; ceci nous amène à poser la question suivante.

Question 2. - Un anneau complètement primaire est-il toujours hyperprimaire ?

Démontrons maintenant le théorème de décomposition hyperprimaire d'un anneau n-commutatif vérifiant une condition de chaîne descendante.

THÉORÈME 6. - Tout anneau n-commutatif, et vérifiant la condition de chaîne descendante à droite (ou à gauche), est somme directe d'une, et une seule, manière d'idéaux qui sont des anneaux n-commutatifs, hyperprimaires, et vérifiant la même condition de chaine et d'un idéal nilpotent.

LEMME 1. - Dans tout anneau n-commutatif, tout idempotent est central.

En effet, deux idempotents sont évidemment permutables et l'on sait alors que tout idempotent est central.

LEMME 2. - Tout anneau n-commutatif, unitaire, centralement bipotent, et vérifiant la condition de chaine descendante à droite (ou à gauche) est hyperprimaire.

Soit à cet effet a un élément non nilpotent de A. Considérons la suite décroissante des idéaux à droite de A définie par $a^m A$ lorsque m est entier naturel. Il existe un multiple r de n tel que $a^r A = a^{r+1} A$, et par conséquent $x \in A$ tel que $a^r = a^{r+1} x$. Par conséquent,

$$a^r x^r = a^{r+1} x^{r+1},$$

et comme A est r-commutatif, il vient

$$(ax)^r = a^r a x x^r .$$

En élevant à la puissance r les deux membres de l'égalité, il vient

$$(ax)^{r^2} = (a^r)^r\, a^r\, x^r (x^r)^r ,$$

et en tenant compte de la r-commutativité,

$$(ax)^{r^2} = (a^r)^r (x^r)^r\, a^r\, x^r = (a^r\, x^r)^r (a^r\, x^r) = (a^r\, x^r)^{(r+1)}$$
$$= (ax)^{(r^2+r)}$$

ce qui prouve que le demi-groupe cyclique engendré par ax est fini ([4], Vol. 1, ch. I, § 6), de sorte qu'il existe un entier q tel que $(ax)^q$ soit un idempotent. Si cet idempotent est nul, on peut écrire que $(ax)^{qn} = 0$, et comme $a^r = a^r(ax)$, il vient

$$(a^r)^{qn} = (a^r)^{qn}(ax)^{qn} = 0 ,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse que a est non nilpotent. Ceci dit, comme A est centralement bipotent, que tout idempotent de A est central d'après le lemme 1, enfin puisque A est unitaire, il vient $(ax)^{qn} = 1$. Ce qui peut encore s'écrire

$$a(a^{qn-1}\, x^{qn}) = 1 = (x^{qn}\, a^{qn-1})a ,$$

et prouver que a est inversible.

LEMME 3. - Tout anneau n-commutatif, centralement unipotent, et vérifiant la condition de chaîne descendante à droite (ou à gauche) est un anneau nilpotent.

Le lemme 2 montre d'une manière analogue que tout élément de A est nilpotent. Comme A vérifie la condition de chaîne descendante, on a ([5], ch. III, § 2) que A est nilpotent.

Le théorème 4 nous donne alors le résultat à montrer. Nous remarquons enfin que la démonstration du lemme 2 reste vraie si l'on suppose que l'anneau est N-regulier à droite par exemple [7], (c'est-à-dire que, pour tout élément a , il existe un entier m tel que $a^m = a^{m+1}\, x$) au lieu de la condition de chaîne descendante à droite ; en effet, en élévant les deux membres de l'égalité à la puissance n , il vient

$$a^{mn} = a^{(m+1)n}\, x^n = a^{mn+1}(a^{n-1}\, x^n) = a^{mn+1}\, y ,$$

ce qui redonne exactement la même forme du début de la démonstration, et nous montre le résultat suivant.

PROPOSITION 7. - Tout anneau n-commutatif, E-centralement fini, et N-régulier à droite, est une somme directe d'idéaux n-commutatifs hyperprimaires et d'un idéal nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARMENDARIZ (E. P.). - Direct and subdirect sums of simple rings with unit, Amer. math. Monthly, t. 75, 1968, p. 746-748.

[2] BIRKHOFF (G.). - Lattice theory. - Providence, American mathematical Society, 1964 (American mathematical Society Colloquium Publications, 25).

[3] BLAIR (R. L.). - Ideal lattices and the structure of rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 75, 1953, p. 136-153.

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[5] JACBSON (N.). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1968 (American mathematical Society Colloquium Publications, 37).

[6] LUH (J.). - A commutativity theorem for primary rings, Acta Math. Acad. Sc. Hungar., t. 22, 1971, p. 211-213.

[7] NITA (C.). - Remarques sur les anneaux N-réguliers, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, 1970, Série A, p. 345-348.

(Texte reçu le 18 avril 1977)

Joseph CHACRON
U.E.R. de Mathématiques
33 rue Saint Leu
80000 AMIENS