

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THIERRY LEVASSEUR

Algèbres localement polynomiales

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 4, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A4_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRES LOCALEMENT POLYNOMIALES

par Thierry LEVASSEUR

(d'après H. BASS, E. H. CONNELL et D. L. WRIGHT)

0. Introduction.

On envisage ici le problème suivant.

Soient K un anneau commutatif, et A une algèbre sur K . Supposons que $A_{\mathfrak{M}}$ soit isomorphe à une $K_{\mathfrak{M}}$ -algèbre de polynômes en un nombre fini d'indéterminées pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de K ; dans quel cas peut-on dire que A est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un K -module de type fini, projectif?

Dans toute la suite K sera un anneau commutatif, unitaire.

1. Notations et résultats préliminaires. Axiome Q.

A moins qu'on ne le signale, tous les anneaux considérés sont commutatifs et unitaires.

Soient K un anneau, et S une partie multiplicativement stable de K . On notera K_S l'anneau de fractions construit à partir de S et K_S , si

$$S = \{1, s, s^2, \dots, s^n, \dots\} \text{ avec } s \in K.$$

Nous noterons $K\text{-alg}$ (res. groupes) la catégorie des K -algèbres (resp. des groupes).

Soit G un foncteur

$$\begin{array}{ccc} K\text{-alg} & \Longrightarrow & \text{groupes} \\ L & \longrightarrow & G(L) \end{array}$$

(a) Si S est une partie de L multiplicativement stable, il existe un homomorphisme $f : L \longrightarrow L_S$, d'où un homomorphisme $G(f) : G(L) \longrightarrow G(L_S)$. On notera $G(L)_S$ l'image de $G(L)$ par $G(f)$, et u_S l'image d'un élément u de $G(L)$.

(b) Si T est une indéterminée sur la K -algèbre L , et si L' est une L -algèbre, soit $t \in L'$, il existe un homomorphisme :

$$h : \begin{cases} L[T] \longrightarrow L' \\ p(T) \longrightarrow p(t) \end{cases}$$

On en déduit donc $G(h) : G(L[T]) \longrightarrow G(L')$, et nous noterons $u(t)$ l'image par $G(h)$ de $u(T) \in G(L[T])$.

Si $L' = L[T]$ et $s \in L$, en prenant $t = sT$, nous pourrions considérer, avec les notations précédentes, $u(sT)$ si $u(T) \in L[T]$.

Si $L' = L$ et $t = 0$, nous avons

$$h : \begin{cases} L[T] \longrightarrow L \\ p(T) \longrightarrow p(0) . \end{cases}$$

Le noyau de $G(h)$ sera noté

$$G(TL[T]) = \{u(T) \in G(L[T]) , \quad u(0) = 1\}$$

Exemple. - Si G est le foncteur qui attache à une K -algèbre L le groupe des unités de L , $G(TL[T])$ est le sous-groupe des unités de $G(L[T])$ dont le terme constant est 1.

1.1. Définition. - Soit G un foncteur : $K\text{-alg} \Rightarrow \text{groupes}$, nous dirons que G satisfait à l'axiome Q si, pour toute K -algèbre L et $s \in L$, $u(T) \in G(TL_s[T])$, il existe $r \geq 0$, $v(T)$ dans $G(TL[T])$ tels que :

$$u(s^r T) = v(T)_s .$$

1.2. Remarque. - Soient $K' \in K\text{-alg}$, et $L \in K\text{-alg}$, posons $L' = K' \otimes_K L$. Si G est un foncteur de $K\text{-alg}$ dans groupes, et si $s \in L$, nous noterons

$$L'_s = K' \otimes_K L_s \simeq L'_s, \quad \text{où } s' = 1 \otimes s .$$

Si T est une indéterminée

$$L[T]' \simeq L'[T] .$$

Nous pouvons définir un foncteur

$$G' : \begin{aligned} K\text{-alg} &\Rightarrow \text{groupes} \\ L &\longrightarrow G'(L) = G(L') . \end{aligned}$$

Alors si G satisfait à l'axiome Q , G' aussi.

En effet, soient $s \in L$,

$$u(T) \in G'(TL_s[T]) = G(TL'_s[T]) .$$

Il existe $r \geq 0$ et $v(T) \in G(TL'[T]) = G'(TL[T])$ tels que $v(T)_s = u(s^r T)$ en identifiant comme précédemment L'_s avec L'_s .

1.3. Définition. - Pour tout anneau E non nécessairement commutatif, nous noterons son groupe des unités par E^X . Si J est un idéal bilatère de E , nous noterons

$$(1 + J)^X = \ker(E^X \longrightarrow (E/J)^X)$$

(c'est-à-dire l'ensemble des unités de E telles que $[u + J] = [1]$).

1.4. LEMME. - Soient E un anneau non nécessairement commutatif, s un élément central de E , et T une indéterminée qui commute sur E .

Soit $u(T) \in (1 + TE_s[T])^X$, alors il existe $r \geq 0$ et $v(T)$ dans $(1 + TE[T])^X$, tels que

$$u(s^r T) = v(T)_s .$$

Preuve. - Posons $u(T) = 1 + Tu_1(T)$ et $u(T)^{-1} = 1 + Tu'_1(T)$, avec u_1 et u'_1

dans $E_s[T]$.

On peut trouver r_1 assez grand pour que $s^{r_1} u_1(s^{r_1} T)$ et $s^{r_1} u'_1(s^{r_1} T)$ soient de la forme

$$W_1(T)_s \text{ et } W'_1(T)_s \text{ avec } W_1 \text{ et } W'_1 \text{ dans } E[T].$$

Posons alors $W(T) = 1 + TW_1(T)$ et $W'(T) = 1 + TW'_1(T)$, nous aurons

$$W(T)_s = 1 + TW_1(T)_s = 1 + s^{r_1} Tu_1(s^{r_1} T) = u(s^{r_1} T) \text{ et } W'(T)_s = u(s^{r_1} T)^{-1}.$$

Nous pouvons écrire $W(T)W'(T) = 1 + Tx(T)$ et $W'(T)W(T) = 1 + Ty(T)$, avec $x(T)_s = y(T)_s = 0$, car $W(T)_s W'(T)_s = u(s^{r_1} T)u(s^{r_1} T)^{-1} = 1$. Par conséquent, il existe $r_2 \geq 0$ tel que $s^{r_2} x(T) = 0$ et $s^{r_2} y(T) = 0$, donc aussi

$$s^{r_2} x(s^{r_2} T) = s^{r_2} y(s^{r_2} T) = 0.$$

Posons $V(T) = W(s^{r_2} T)$ et $V'(T) = W'(s^{r_2} T)$. Il faut montrer que $V(0) = V'(0) = 1$ et que $V(T)$ est inversible d'inverse $V'(T)$.

$$V(0) = W(0) = 1$$

$$V(T)V'(T) = W(s^{r_2} T)W'(s^{r_2} T) = 1 + s^{r_2} Tx(s^{r_2} T) = 1.$$

Montrons que $V(T)_s = u(s^r T)$ pour un $r \geq 0$, et $V(T)$ conviendra.

$$\begin{aligned} V(T)_s &= W(s^{r_2} T)_s = 1 + s^{r_2} TW_1(s^{r_2} T)_s = 1 + s^{r_2} Ts^{r_1} u_1(s^{r_1+r_2} T) \\ &= u(s^{r_1+r_2} T), \text{ donc } r = r_1 + r_2 \text{ convient.} \end{aligned}$$

1.5. PROPOSITION. - Soit E une K -algèbre non nécessairement commutative, soit G le foncteur attachant à chaque K -algèbre L , le groupe $G(L)$ des unités de $L \otimes_K E$, alors G satisfait à l'axiome Q .

Preuve. - Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $L \otimes E$ et $s \otimes 1$, et de traduire les définitions.

1.6. COROLLAIRE. - Soit A une algèbre non nécessairement commutative, et soit M un A -module à gauche de présentation finie. Si GL_M est le foncteur qui attache, à chaque K -algèbre L , le groupe $GL_M(L)$ des automorphismes du $(L \otimes_K A)$ -module, $L \otimes_K M$, alors G satisfait à l'axiome Q .

Preuve. - Soit $E = \text{Hom}_A(M, M) = \text{End}_A(M)$.

On peut définir un L -homomorphisme d'algèbres de $L \otimes_K E$ dans $\text{End}_{L \otimes_K A}(L \otimes_K M)$ qui est un isomorphisme quand L est plat sur K puisque M est de présentation finie.

Nous pouvons identifier GL_M avec le foncteur G de la proposition 1.5. sur la catégorie des K -algèbres plates. En particulier, l'axiome Q est vrai pour $L = K$. Si L est une K -algèbre arbitraire, on peut remplacer M par $L \otimes_K M$, et A par $L \otimes_K A$, puisque L est plat sur L . $GL_{L \otimes_K M}$ vérifie l'axiome Q , mais $G_{L \otimes_K M}(L) \simeq GL_M(L)$, ce qui prouve le résultat.

1.6. Rappels sur les algèbres de présentation finie. - Soit A une algèbre de présentation finie (non nécessairement commutative), si $x = (x_1, \dots, x_p) \in A^p$ est une suite d'éléments engendrant A en tant que K -algèbre, A est isomorphe à $(K\{X_1, \dots, X_p\})/(f_1, \dots, f_q)$, où $(f_1, \dots, f_q)$ est un idéal de type fini de $K\{X_1, \dots, X_p\}$, $X_1, \dots, X_p$ étant des indéterminées qui ne commutent pas nécessairement.

Soit B une K -algèbre non nécessairement commutative, et soit $u: A \rightarrow B$ un homomorphisme de K -algèbres, u est déterminé par $u(x) = (u(x_1), \dots, u(x_p)) \in B^p$. De plus

$$f_j(u(x_1), \dots, u(x_p)) = u f_j(x_1, \dots, x_p) = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, q\}.$$

On a donc une bijection entre $\text{Hom}_{K\text{-alg}}(A, B)$ et $H(A, B)$, où

$$H(A, B) = \{y \in B^p; f_j(y) = 0; j = 1, \dots, q\},$$

définie par u , donne $u(x)$.

1.7. LEMME. - Soient A et B des K -algèbres (non nécessairement commutatives) avec A de présentation finie.

Soit $S \subset K$ multiplicativement stable. L'application canonique

$$(*) \quad \lim_{s \in S} \text{inj}_{s \in S} \text{Hom}_{K_S\text{-alg}}(A_s, B_s) \rightarrow \text{Hom}_{K_S\text{-alg}}(A_s, B_s)$$

est bijective.

Si B est aussi de présentation finie, alors $(*)$ est bijective avec Isom à la place de Hom.

Preuve. - $\{\text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s), s \in S\}$ est un système inductif, et l'application naturelle $(*)$ est définie de la manière suivante : si $u \in \lim_{s \in S} \text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$, u est la classe d'un élément u_s de $\text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$ pour la relation d'équivalence qui définit la limite inductive. En localisant u_s par rapport à S , on obtient ainsi un élément de $S^{-1} \text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s) = \text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$.

Nous pouvons identifier $\text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$ avec $\text{Hom}_K(A, B_s)$, et donc l'identifier avec $H(A, B_s)$, avec les notations précédentes

$$H(A, B_s) = \{y \in B_s^p; f_j(y) = 0, j \in \{1, \dots, q\}\}$$

Injectivité de $(*)$. - Si y et y' sont dans $\lim_{s \in S} \text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$, on peut prendre y et y' dans $\text{Hom}_{K_S}(A_s, B_s)$ pour le même s .

On est donc ramené à prendre y, y' dans $H(A, B_s)$ pour $s \in S$ tels que y_s et y'_s soient égaux dans B_s^p .

Pour montrer que y et y' sont égaux, il suffit de voir qu'il existe $t' = st > s$ (S est ordonné par divisibilité) tel que dans $H(A, B_{st})$ $y_t = y'_t$.

Nous pouvons écrire

$$y = (a_1 s^{-n_1}, \dots, a_p s^{-n_p}) \text{ et } y' = (a'_1 s^{-n'_1}, \dots, a'_p s^{-n'_p})$$

puisque $y_S = y'_S$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ $a_i s^{-n_i} = a'_i s^{-n'_i}$ donc, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe t_i dans S tel que $t_i (s^{n'_i} a_i - s^{n_i} a'_i) = 0$.
 En prenant $t = t_1 \dots t_p$, $y_t = y'_t$ dans B_{St}^p , par suite $y = y'$ dans $H(A, B_{st})$ et $y = y'$ dans $\lim_{s \in S} \text{inj}_{s \in S} H(A, B_s)$.

Surjectivité de (*). - Avec les identifications précédentes, soit $y \in H(A, B_s)$, nous devons trouver $s \in S$ et z dans $H(A, B_s)$ tel que $z_S = y$.
 En réduisant toutes les composantes de y au même dénominateur, il existe t dans S et W dans B_t^p tels que $W_S = y$ dans B_S^p . D'autre part, $f_j(W)_S = f_j(W_S) = 0$, donc il existe t' dans S tel que $t' \cdot f_j(W) = 0$.
 Donc si $s = t \cdot t'$ et $z = W_{t'}$, nous aurons $z \in H(A, B_s)$ et $z_S = y$.

Pour prouver la dernière assertion, il suffit de montrer que si u est un isomorphisme de A_S sur B_S , il peut être remonté en un isomorphisme V de A_s sur B_s pour un $s \in S$.

Par ce qui précède, il existe t dans S , $W \in \text{Hom}_{K_t}(A_t, B_t)$, $W' \in \text{Hom}_{K_t}(B_t, A_t)$ tels que $W_S = u$ et $W'_S = u^{-1}$.
 Donc $(W \cdot W')_S = \text{id}_{A_S}$, et l'injectivité de (*) dans le cas précédent, appliqué à $\lim_{s \in S} \text{inj}_{s \in S} \text{Hom}_{K_s}(A_s, B_s)$ permet de trouver un t' dans S tel que

$$W_{t'} \cdot W'_{t'} = \text{id}_{A_{tt'}}.$$

On pose alors $V = W_{t'}$, qui convient.

Enonçons sans démonstration le résultat suivant.

1.8. PROPOSITION. - Soit A une algèbre sur K non nécessairement commutative et de présentation finie. Soit G le foncteur qui associe à une K -algèbre L le groupe des L -automorphismes d'algèbre de $L \otimes_K A$. Alors G satisfait à l'axiome Q .

1.9. Rappels sur les algèbres filtrées. - Soit A une K -algèbre non nécessairement équipée d'une filtration descendante $A = A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq \dots$; $A_p A_q \subseteq A_{p+q}$. Pour tout a dans A , nous poserons $\varphi(a) = \sup \{n; a \in A_n\}$.
 La filtration sera dite séparée si $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = 0$ ce qui équivaut à : pour tout $a \in A$, $\varphi(a) < \infty$.

Elle sera dite absolument séparée si, pour tout $L \in K\text{-alg}$, la filtration de la L -algèbre $L \otimes_K A_n$, donnée par les $L \otimes_K A_n$, est séparée.

Pour tout n , nous noterons

$$A'_n = \sum_{p_1 + \dots + p_r \geq n, p_i < n} A_{p_1} \dots A_{p_r} \subseteq A_n.$$

Nous dirons que la filtration est de type fini, s'il existe un sous-ensemble fini X de A tel que

$$A_n = A'_n + \sum_{x \in X \cap A_n} x A \quad \text{pour tout } n > 0.$$

On peut remarquer qu'alors, pour tout $L \in K\text{-alg}$, la filtration induite sur $L \otimes_K A$ est encore de type fini.

$$L \otimes_K A_n = L \otimes_K A'_n + \sum_{x \in X \cap A_n} L \otimes A(1 \otimes x) L \otimes A$$

1.9. Exemple. - Si $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$ est une K -algèbre graduée, elle possède la filtration $A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \dots$, $n \geq 0$. Cette filtration est absolument séparée si, en plus, A est de type fini sur K , elle est de type fini au sens précédent.

1.10. LEMME. - Soit A une K -algèbre non nécessairement commutative, munie d'une filtration de type fini, avec X comme dans 1.9.

Soit B une K -algèbre filtrée non nécessairement commutative, et soit $u : A \rightarrow B$ un homomorphisme de K -algèbres.

(a) Pour que u préserve les filtrations, i. e. $u(A_n) \subset B_n$ pour tout n , il faut et il suffit que $u(x) \in B_{\varphi(x)}$, pour tout $x \in X$ (φ comme dans 1.9.).

(b) Supposons que la filtration de A soit séparée, et soit S un ensemble multiplicativement stable dans K . Supposons que $u_s : A_s \rightarrow B_s$ préserve les filtrations. Alors il existe $s \in S$ tel que $u_s : A_s \rightarrow B_s$ préserve les filtrations.

(c) Gardons les hypothèses de (b) et supposons que A soit une K -algèbre de présentation finie.

L'application canonique :

$$(*) \lim_{\text{inj } s \in S} \text{Hom}_{K_s\text{-alg}}^f(A_s, B_s) \rightarrow \text{Hom}_{K_s\text{-alg}}^f(A_s, B_s)$$

est bijective. (Le Hom^f désigne les homomorphismes préservant les filtrations).

Si l'on suppose de plus que B satisfait à toutes les hypothèses faites sur A , alors (*) est bijective avec Isom^f à la place de Hom^f .

Preuve.

(a) Il est clair que la condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Si $n = 0$, $u(A) \subset B$, procédons par récurrence,

$$u(A_n) \subset u(A'_n) + \sum_{x \in X \cap A_n} Bu(x)B, \text{ si } x \in X \cap A_n, u(x) \in B_n$$

par hypothèse, et

$$u(A'_n) = \sum_{p_1 + \dots + p_r \geq n, p_i < n} u(A_{p_1}) \dots u(A_{p_r}) \subset \sum_{p_1 \dots p_r} B_{p_1} \dots B_{p_r} \subset B_n$$

par récurrence.

(b) Soit $x \neq 0$ dans X , et $\varphi(x) = n < \infty$. Alors $u(x)$ est dans $(B_s)_n = (B_n)_s$, donc il existe $s \in S$ avec $s \cdot u(x) \in B_n$, puisque X est fini nous pouvons choisir un s qui marche pour tous les x de X . Par conséquent, $u' : A \xrightarrow{u} B \rightarrow B_s$ préserve les filtrations par (a) et, par localisation, $u_s : A_s \rightarrow B_s$ aussi. Grâce à (b), l'assertion (c) résulte du lemme 1.7.

Enonçons sans démonstration le résultat suivant.

1.11. PROPOSITION. - Soit A une K -algèbre de présentation finie non nécessairement commutative, munie d'une filtration absolument séparée de type fini. Soit G le foncteur attachant à chaque K -algèbre L le groupe $G(L)$ des automorphismes préservant la filtration de la L -algèbre filtrée $L \otimes_K A$. Alors G satisfait

l'axiome Q.

2. Opérations scalaires sur les foncteurs de groupes.

2.1. Définition. - Soit G un foncteur : $K\text{-alg} \Rightarrow \text{groupes}$, une opération scalaire sur G est la donnée d'une opération $L \times G(L) \rightarrow G(L)$ pour toute K -algèbre L (donc ${}^s 1 = 1$, ${}^1 u = u$, ${}^s ({}^t u) = {}^{st} u$, ${}^s (uv) = {}^s u {}^s v$ pour tout s, t dans L , u, v dans $G(L)$). Cette opération étant naturelle c'est-à-dire :
Si $f : L \rightarrow L'$ est un K -homomorphisme de $K\text{-alg}$, et si

$$G(f) : \begin{cases} G(L) \rightarrow G(L') \\ u \mapsto u' = G(f)(u) \end{cases},$$

on demande $({}^s u)' = f({}^s u')$ pour tout s dans L et u dans $G(L)$.

En particulier, si dans 2.1. $f : L \rightarrow L_t$, nous aurons $({}^s u)_t = {}^{s/1}(u_t)$ que nous noterons ${}^s u_t$.

Donc, si G est comme dans 2.1., à tout s dans L on peut faire correspondre un endomorphisme de $G(L)$ qui envoie $u \in G(L)$ sur ${}^s u$. En particulier, pour $S = 0$, $u \mapsto {}^0 u$ est un endomorphisme idempotent de $G(L)$ dont l'image sera notée ${}^0 G(L)$, et le noyau $G_0(L)$. Nous aurons ainsi un produit semi-direct :

$$G(L) = G_0(L) \rtimes {}^0 G(L).$$

2.2. Exemple. - Soient A et B deux K -algèbres graduées non nécessairement commutatives, $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $B = \coprod_{n \in \mathbb{N}} B_n$, et

$$\begin{cases} A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \dots \\ B_{(n)} = B_n \oplus B_{n+1} \oplus \dots \end{cases}$$

les $A_{(n)}$ (resp. $B_{(n)}$) munissent A (B) d'une filtration descendante.

Soit $u : A \rightarrow B$ un K -homomorphisme d'algèbres préservant ces filtrations. Alors u peut être décomposé en $u = u_0 + u_1 + \dots$, où u_n est une application K -linéaire de $A \rightarrow B$ avec :

(i) $u_n(A_p) \subset B_{p+n}$ pour tout $p \geq 0$, en particulier, u_0 est homogène de degré 0.

(ii) Si $a \in A$, $u_n(a) = 0$ pour presque tout n .

(Rappel : u_n se définit de la manière suivante : si $a \in A_p$, alors $u(a) \in B_{(p)}$, donc $u(a) = (u(a))_p + (u(a))_{p+1} + \dots + (u(a))_{p+n} + \dots$, on pose $u_n(a) = (u(a))_{p+n}$. Si $a \in A$, $a = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$ avec les a_i presque tous nuls, $a_i \in A_i$, et on pose $u_n(a) = \sum (u(a_i))_{i+n}$).

Le fait que u soit un K -homomorphisme d'algèbres, préservant les filtrations, est alors équivalent à $u = \sum u_i$, u_i K -linéaire pour tout i ,

$$u(1) = u_0(1) = 1 \text{ et } u_n(ab) = \sum_{p+q=n} u_p(a)u_q(b).$$

Définissons, si $s \in K$, ${}^s u$ par $({}^s u)_n = s^n u_n$, donc :

$${}^s u = u_0 + s u_1 + s^2 u_2 + \dots$$

On vérifie alors que

$$s_u(1) = 1$$

et

$$(s_u)_n(ab) = s^n u_n(ab) = s^n \sum_{p+q=n} u_p(a)u_q(b) = \sum_{p+q=n} (s_u)_p(a)(s_u)_q(b).$$

Par suite, s_u est encore un K -homomorphisme préservant les filtrations de A vers B , et il est facile de voir que $1_u = u$ et ${}^t(s_u) = {}^t s_u$. De plus, ${}^0 u = u_0$ qui n'est autre que l'homomorphisme d'algèbres graduées associées aux filtrations.

Supposons que $V : B \rightarrow C$ soit un second isomorphisme préservant les filtrations d'algèbres graduées, on peut vérifier que :

$$(Vu)_n = \sum_{p+q=n} V_p u_q$$

ce qui implique :

$$s(vu)_n = s^n(vu)_n = \sum_{p+q=n} (s_v)_p (s_u)_q$$

d'où $s(vu) = s_v s_u$.

Si u est un isomorphisme et si u^{-1} préserve les filtrations, alors les mêmes propriétés sont vraies pour s_u .

D'autre part, si L est une K -algèbre, $L \otimes_K B$ sont aussi des L -algèbres graduées donc les scalaires de L opèrent comme ci-dessus sur les L -homomorphismes préservant les filtrations.

Si $u : L \otimes_K A \rightarrow L \otimes_K B$ est un de ces homomorphismes, et si $f : L \rightarrow L'$ est un K -homomorphisme d'algèbres, on a le diagramme commutatif suivant pour tout s dans L :

$$\begin{array}{ccc} L \otimes_K A & \xrightarrow{s_u} & L \otimes_K B \\ \downarrow f \otimes_K 1_A & & \downarrow f \otimes_K 1_B \\ L' \otimes_K A & \xrightarrow{f(s)(1_{L'} \otimes u)} & L' \otimes_K B \end{array}$$

Maintenant, pour une K -algèbre graduée fixée A , soit G le foncteur attachant à chaque K -algèbre L , le groupe $G(L)$ des automorphismes de L -algèbre de $L \otimes_K A$ préservant la filtration. La discussion précédente montre alors que les applications $u \mapsto s_u$ pour $s \in L$, $u \in G(L)$, définissent une opération scalaire sur le foncteur G . Par suite, $G(L) = G_0(L) \rtimes {}^0 G(L)$, où ${}^0 G(L)$ est le groupe des $u \in G(L)$ tels que $u = {}^0 V = V_0$ pour un V dans $G(L)$, donc u est un automorphisme d'algèbre graduée. D'autre part, $G_0(L)$ est le sous-groupe de $G(L)$ composé des automorphismes dont l'homomorphisme gradué associé est l'identité.

2.3. LEMME. - Soit $G : K\text{-alg} \Rightarrow \text{groupes}$ un foncteur satisfaisant à l'axiome Q et qui possède une opération scalaire. Soit L une K -algèbre, $s \in L$ et $u \in G(L_s)$, il existe un entier $r \geq 0$ tel que, si a et b sont dans L vérifiant $a \equiv b \pmod{Ls^r}$, on peut trouver V dans $G_0(L)$ tel que $V_s = ({}^a u)({}^b u)^{-1}$.

Preuve. - Puisque nous avons la suite : $0 \rightarrow L_s \xrightarrow{i} L_s[Y, T] \xrightarrow{p} 0$, où Y et

T sont des indéterminées, nous pouvons identifier, grâce à $G(i)$, $G(L_s)$ avec un sous-groupe de $G(L_s[Y, T])$. Posons alors

$$W = W(Y, T) = ({}^{(Y+T)}u)({}^Y u)^{-1} \in G(L_s[Y, T]).$$

Nous avons :

$$(i) \quad {}^0 W = ({}^0 u)({}^0 u)^{-1} = 1,$$

$$(ii) \quad W(Y, 0) = ({}^Y u)({}^Y u)^{-1} = 1.$$

Le (ii) implique que $W(Y, T) \in G(TL_s[Y][T])$ comme $s \in L[Y]$, et que G satisfait l'axiome Q , il existe $r \geq 0$ et $V(Y, T) \in G(TL[Y, T])$ tel que

$$V_s = V(Y, T)_s = W(Y, s^r T).$$

Comme nous avons $(V({}^0 V)^{-1})_s = V_s$, $({}^0 V)_s^{-1} = V_s$, en remplaçant V par $V({}^0 V)^{-1}$ on peut s'arranger pour que ${}^0 V = 1$.

Par suite, si $a = b + s^r t$ pour un t dans L , nous aurons $V(b, t) \in G_0(L)$ et

$$V(b, t)_s = W(b, s^r t) = ({}^{(b+s^r t)}u)({}^b u)^{-1} = ({}^a u)({}^b u)^{-1}.$$

2.4. LEMME. - Soient GA K -alg $\Rightarrow$ groupes un foncteur qui satisfait l'axiome Q et G un foncteur sous-groupe de GA qui possède des opérations scalaires. Soit L une K -algèbre et $s \in L$. Si $W \in GA(L_s)$ et $u \in G_0(L_s)$, alors il existe $r \geq 0$ tel que, si $a \in Ls^r$, on peut trouver V dans $GA(L)$ tel que $W^{-1} {}^a u W = V_s$.

Preuve. - On identifie, comme dans la preuve du lemme précédent, $G(L_s)$ à un sous-groupe de $G(L_s[T])$ si T est une indéterminée. Posons

$$u'(T) = W^{-1} T u W \in GA(L_s[T]).$$

Puisque ${}^0 u = 1$, $u'(T) \in GA(TL_s[T])$ par l'axiome Q , il existe $r \geq 0$ et $V'(T)$ dans $GA(TL[T])$ tel que $V'(T)_s = u'(s^r T)$.

Supposons $a = s^r t$, $t \in L$ si $V = V'(t) \in GA(L)$, nous aurons

$$V_s = V'(t)_s = u'(s^r t) = u'(a) = W^{-1} {}^a u W.$$

2.5. THÉOREME. - Soit $GA : K\text{-alg} \Rightarrow$ groupes un foncteur satisfaisant à l'axiome Q , soient G et H des foncteurs sous-groupes de GA tels que G satisfasse l'axiome Q et possède des opérations scalaires avec, de plus,

$$GA(L) = G_0(L)H(L) \text{ pour tout } L \in K\text{-alg}.$$

Si s_0 et s_1 sont dans L avec $Ls_0 + Ls_1 = L$, alors

$$GA(L_{s_0 s_1}) = G_0(L_{s_0})_{s_1} H(L_{s_0 s_1}) GA(L_{s_1})_{s_0}$$

Preuve. - Tout élément de $GA(L_{s_0 s_1})$ s'écrit, par hypothèse, $u.w$ avec $u \in G_0(L_{s_0 s_1})$ et $w \in H(L_{s_0 s_1})$.

Si $a \in L$, écrivons $u.w = {}^1 u ({}^a u)^{-1} w.w^{-1} {}^a u w$.

Le lemme 2.3. et le lemme 2.4. fournissent un r (on peut prendre le même pour les deux), de manière que

- si on applique le lemme 2.4. à la localisation $L_{s_1} \longrightarrow L_{s_0 s_1}$, et si $a \in L_{s_0}^r$ (donc $a \in L_{s_1}^{s_0^r}$),

$$W^{-1} a u W = V_1 s_0 \text{ pour } V_1 \in GA(L_{s_1}).$$

- si on applique le lemme 2.3. à G et à la localisation $L_{s_0} \longrightarrow L_{s_0 s_1}$ et si $a \equiv 1 \pmod{L_{s_0}^{s_1^r}}$ (il suffit d'avoir $a \equiv 1 \pmod{L_{s_1}^r}$), alors

$$V_{0s_1} = {}^1u({}^a u)^{-1} \text{ pour un } V_0 \in G_0(L_{s_0}).$$

Puisque $L_{s_0} + L_{s_1} = L$ il est clair que l'on peut trouver a tel que

$$a \in L_{s_0}^r \text{ et } 1 - a \in L_{s_1}^r.$$

Ceci termine la preuve du théorème puisque

$$uW = {}^1u({}^a u)^{-1} \cdot W \cdot W^{-1} a u W = V_{0s_1} W V_{1s_0}.$$

2.6. Exemple d'application. - Soit A l'algèbre symétrique ou tensorielle d'un K -module M de présentation finie.

Nous écrirons $A = \coprod_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

La filtration descendante $A_{(n)} = A_n \oplus A_{n+1} \oplus \dots$ est absolument séparée de type fini (cf. 1.9. exemple).

On peut aussi considérer une filtration ascendante : $A^{(n)} = A_0 \oplus \dots \oplus A_n$.

Nous noterons $GA(L)$ le groupe des automorphismes de L -algèbre de $L \otimes_K A$, si $L \in K\text{-alg}$. GA satisfait à l'axiome Q (prop. 1.8.). Notons $G(L)$ le sous-groupe de $GA(L)$, formé des automorphismes qui préservent la filtration descendante, on définit ainsi un foncteur G qui satisfait l'axiome Q (prop. 1.11.) et possède des opérations scalaires (exemple 2.2.).

Soit enfin $H(L)$ sous-groupe de $GA(L)$ composé des automorphismes qui conservent la filtration ascendante.

Donc le théorème s'appliquera si

$$(**) \quad GA(L) = G_0(L)H(L).$$

Montrons $(**)$ dans le cas où $L = K$, ce qui ne change rien à la généralité.

Remarquons que $G(K) = G_0(K) \rtimes {}^0G(K)$, où ${}^0G(K)$ est le groupe des automorphismes d'algèbre graduée de A , qui peut s'identifier, puisque $A = S(M)$, ou $T(M)$ avec $GL_M(K)$ groupe des automorphismes linéaires de M .

Posons $M^* = \text{Hom}(M, K)$, il existe un plongement $M^* \longrightarrow H(K)$ car si $t \in M^*$ on peut lui associer

$$\bar{t} : x \longmapsto t(x) + x \in A_0 \oplus A_1$$

que l'on prolonge à $S(M)$ ou $T(M)$.

Montrons que $H(K) = GL_M(K) \rtimes M^*$, pour cela construisons une projection $H(K) \longrightarrow M^*$ de noyau $GL_M(K)$.

Si $u \in H(K)$, u préserve la filtration ascendante, donc $u(M) \subset A_0 \oplus M$ et, si $x \in M$, $u(x) = t(x) + x'$ avec $t(x) \in K$.

Si l'on pose $x' = u_M(x)$, on définit ainsi $t : M \longrightarrow K$ et $u_M \in GL_M(K)$, de plus $u = u_M \circ \bar{t}$.

Nous noterons $H(K)$ par $Af_M(K)$ par analogie avec le groupe affine de M .

Maintenant, si $u \in GA(K)$, pour tout $x \in M$, nous avons :

$$u(x) = t(x) + u_1(x) \text{ avec } t(x) \in K, \quad u_1(x) \in A_{(1)},$$

nous définissons ainsi $t \in M^*$, et si $V = u_0(\bar{-t})$, pour tout x dans M ,

$$V(x) = u(-t(x) + x) = -t(x) + u(x) = u_1(x).$$

Donc V définit un élément de $G(K)$ et $u = V \circ \bar{t} \in G(K)M^*$.

Mais

$$G(K)M^* = G_0(K)GL_M(K)M^* = G_0(K)Af_M(K).$$

Ceci prouve (**) pour $L = K$, pour toute K -algèbre L , la L -algèbre $L \otimes_K A$ hérite toutes les hypothèses faites sur A .

2.7. Codification des notations. - Soient M un K -module de présentation finie, et $A = S(M)$ ou $T(M)$, graduée de manière usuelle. Nous noterons :

$$GA_M(L) = \{L \text{ automorphismes de } L \otimes_K A\},$$

$GA_M^0(L)$: son sous-groupe des automorphismes qui préservent la filtration descendante de $L \otimes_K A$.

$GA_M^!(L)$: les éléments de $GA_M^0(L)$, dont le morphisme gradué associé est l'identité.

$Af_M(L)$: sous-groupe de $GA_M(L)$ des automorphismes conservant la filtration ascendante.

COROLLAIRE. - Soit M un K -module de présentation finie, et soit $A = S(M)$ ou $T(M)$. Pour toute K -algèbre L , on a :

$$(i) \quad GA_M(L) = GA_M^!(L)Af_M(L)$$

$$(ii) \quad \text{Si } Ls_0 + Ls_1 = L,$$

$$GA_M(L_{s_0s_1}) = GA_M^!(L_{s_0})_{s_1} Af_M(L_{s_0s_1})GA_M(L_{s_1})_{s_0}.$$

3. Méthode de récurrence de Quillen.

Soit $Loc K$ l'ensemble des K -algèbres de la forme K_S , où S est un ensemble multiplicatif dans K .

PROPOSITION. Si $P(L)$ est une propriété définie pour les K -algèbres L de $Loc K$ pour que $P(L)$ soit vraie pour tout L dans $Loc(K)$, en particulier pour $L = K$, il suffit que :

1° Spécialisation : $P(L')$ est vraie si $P(L)$ est vraie lorsqu'il existe un K -homomorphisme de L vers L' .

2° Finitude : Si $S \subset K$ est une partie multiplicative, alors si $\overline{P(K_S)}$ est vraie, $P(K_S)$ est vraie pour un $s \in S$.

3° Validité locale : $P(K_{\mathfrak{M}})$ est vraie pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K .

4° Condition de recollement : Si $L \in \text{Loc}(K)$ et si $Ls_0 + Ls_1 = L$, alors si $P(L_{s_0})$ et $P(L_{s_1})$ sont vraies, $P(L)$ est vraie.

Preuve. - Considérons $T = \{s \in K \text{ tel que } P(K_s) \text{ soit vraie}\}$. Si $1 \in S$, nous aurons terminé car, pour tout $L \in \text{Loc } K$, il existe un K -homomorphisme $K \rightarrow L$, donc $P(L)$ sera vraie par spécialisation.

Remarquons que T n'est contenue dans aucun idéal maximal de K , car $P(K_{\mathfrak{M}})$ étant vraie pour tout idéal maximal de K , il existe $s \notin \mathfrak{M}$ tel que $s \in T$, par finitude. Il suffit de montrer que T est un idéal, c'est-à-dire que si s_0, s_1 sont dans T avec $s \in Ks_0 + Ks_1$, alors $s \in T$. Posons $L = K_s$ et t_i l'image de s_i ($i=0,1$) dans L . Nous avons $L = Lt_0 + Lt_1$ et $L_{t_i} = K_{ss_i}$ ($i=0,1$), $P(L_{t_i})$ est donc vraie par spécialisation et, par recollement, $P(L)$ est vraie, donc $s \in T$.

4. Théorème de localisation.

THÉOREME. - Soit A une K -algèbre de présentation finie. Supposons que, pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K , la $K_{\mathfrak{M}}$ -algèbre A soit isomorphe à l'algèbre symétrique d'un $K_{\mathfrak{M}}$ module de présentation finie. Alors A est isomorphe à l'algèbre symétrique $S(M)$ d'un K -module de présentation finie.

4.1. Lemme. - Soient M et N deux K -modules, et $U = S$ ou T , si $U(M)$ et $U(N)$ sont des K -algèbres isomorphes, alors M et N sont des K -modules isomorphes.

Preuve. - Soit $u : U(M) \rightarrow U(N)$ un isomorphisme de K -algèbres. (U désignant l'algèbre symétrique ou l'algèbre tensorielle).

Si $x \in M$, $u(x) = v(x) + t(x)$, avec $t(x) \in K$, et $v(x)$ dans l'idéal d'augmentation $U_+(N)$. Définissons un automorphisme de $U(M)$ en posant

$$\bar{t}(x) = x + t(x) \text{ pour tout } x \text{ dans } M.$$

Alors si $w = u\bar{t}$,

$$w(x) = u(x + t(x)) = u(x) + t(x) = v(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } M.$$

Donc w est un isomorphisme d'algèbres augmentées. Nous aurons ainsi un isomorphisme

$$U_+(M)/U_+(M)^2 \rightarrow V_+(N)/V_+(N)^2$$

où $U_+(M)$ est l'idéal d'augmentation de $U(M)$.

ce qui donne, puisque $(U_+(M))/(U_+(M)^2) \simeq M$ et $(V_+(N))/(V_+(N)^2) \simeq N$, $M \simeq N$.

Preuve du théorème. - Nous allons appliquer la méthode de récurrence de Quillen à $\text{Loc } K$ et à la proposition si $L \in \text{Loc } K$:

$P(L)$: La L -algèbre $L \otimes_K A$ est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un L -module de présentation finie.

1° Spécialisation : Si L et L' sont dans $\text{Loc}(K)$, $L = K_S$ et $L' = K_{S'}$. Supposons que $P(L)$ soit vraie, et qu'il existe un K -homomorphisme $K_S \rightarrow K_{S'}$. Alors, il existe un K_S -module de présentation finie tel que

$$K_S \otimes_K A \simeq S(M)$$

d'où

$$K_{S'} \otimes_{K_S} K_S \otimes_K A \simeq S(M) \otimes_{K_S} K_{S'} \simeq S(M \otimes_{K_S} K_{S'})$$

ce qui donne le résultat : $P(L)$ est vraie.

2° Finitude : Supposons que $P(K_S)$ soit vraie, $K_S \in \text{Loc}(K)$. Il existe un K_S -module $M(S)$, de présentation finie, tel que

$$K_S \otimes_K A \simeq S(M(S)).$$

Remarquons que tout K_S -module de présentation finie est la localisation d'un K_S -module de présentation finie pour un $s \in S$.

En effet, $M(S) \simeq K_S^n / (g_1, \dots, g_p)$, où $(g_1, \dots, g_p)$ désigne un K_S -module de type fini, avec $g_i \in K_S$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

En réduisant tous les g_i au même dénominateur, on peut trouver un $s \in S$ tel que $g_i = (h_i)_S$ avec $h_i \in K_s$, $i \in \{1, \dots, p\}$; et nous aurons :

$$M(S) \simeq M_s \otimes_K K_S,$$

où M_s est le K_s -module de présentation finie $K_s^n / (h_1, \dots, h_p)$.

Le lemme 1.7. nous permet alors de relever l'isomorphisme

$$K_S \otimes_K A \simeq S(M(s)) \text{ en un isomorphisme pour } t \in S,$$

$$K_t \otimes_K A \simeq S(M_t) \text{ pour un } M_t, \text{ qui soit un } K_t\text{-module de présentation finie.}$$

3° La validité locale est dans l'hypothèse du théorème.

4° Condition de recollement : Soit $L \in \text{Loc}(K)$ et s_0, s_1 dans L tels que $LS_0 + LS_1 = L$. Il faut montrer que, si $P(L_{S_0})$ et $P(L_{S_1})$ sont vraies, alors $P(L)$ est vraie.

Remarquons qu'il suffit de le montrer pour $L = K$, car $L \otimes_K A$ possède les mêmes propriétés que A en tant que L -algèbre.

Supposons donc $KS_0 + KS_1 = K$, et que nous ayons des K_{s_i} -modules M_i de présentation finie, avec des isomorphismes de K_{s_i} -algèbres $A_{s_i} \rightarrow S(M_i)$ pour $i = 0, 1$. Remarquons que

$$A_{s_0 s_1} \simeq S(M_i) \otimes_{K_{s_i}} K_{s_0 s_1} \simeq S(M_{1-i}) \otimes_{K_{s_{1-i}}} K_{s_0 s_1},$$

donc $S(M_{1s_0}) \simeq S(M_{0s_1})$, et le lemme 4.1. implique $M_{0s_1} \simeq M_{1s_0}$ en tant que $K_{s_0 s_1}$ -modules. Nous aurons alors le diagramme de produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \longrightarrow & M_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_0 & \longrightarrow & M_{0s_1} \simeq M_{1s_0} \end{array}$$

avec

$$M = M_0 \times_{M_{0s_1}} M_{1s_0} \quad M_1 \quad \text{et} \quad M_{s_i} \simeq M_i \quad \text{pour} \quad i = 0, 1.$$

Puisque les M_i sont des K_{s_i} -modules de présentation finie et que $K_{s_0} + K_{s_1} = K$, M sera un K -module de présentation finie. (cf. BOURBAKI, Algèbre, chap. II).

Soit $B = S(M)$; pour toute K -algèbre L , nous noterons $GA_M(L)$ le groupe des L -automorphismes d'algèbre de $L \otimes_K B \simeq S(L \otimes_K M)$. Rappelons que, d'après le corollaire 2.7., et avec ses notations,

$$GA_M(L) = GA'_M(L) Af_M(L)$$

Puisque $P(K_{s_i})$ est vraie, $i = 0, 1$, il existe des K_{s_i} -isomorphismes

$$u_i : B_{s_i} \longrightarrow A_{s_i}, \quad i = 0, 1.$$

Considérons $u = u_{0s_1}^{-1} u_{1s_0}$ qui est un élément de $GA_M(K_{s_0s_1})$.

Le corollaire 2.7. permet d'écrire $u = v_{0s_1} w v_{1s_0}^{-1}$ avec $v_0 \in GA'_M(K_{s_0})$, $w \in Af_M(K_{s_0s_1})$, $v_1 \in GA'_M(K_{s_1})$.

Soit $w_i = u_i v_i : B_{s_i} \xrightarrow{r} A_{s_i}$, $i = 0, 1$.

Alors $w_{0s_1}^{-1} w_{1s_0} = v_{0s_1}^{-1} u_{0s_1}^{-1} u_{1s_0} v_{1s_0} = v_{0s_1}^{-1} u v_{1s_0} = w \in Af_M(K_{s_0s_1})$ (rappelons que $Af_M(K_{s_0s_1})$ est le groupe des automorphismes de $B_{s_0s_1}$ qui conservent la filtration ascendante de $B_{s_0s_1} \simeq S(M_{s_0s_1})$).

Soit $B^{(p)}$ la filtration ascendante sur $B = S(M)$, on peut filtrer les B_{s_i} par les $B_{s_i}^{(p)}$ pour $i = 0, 1$, et $B_{s_0s_1}$ pour les $B_{s_0s_1}^{(p)}$. Nous aurons ainsi une filtration sur A_{s_i} , donnée par $w_i(B_{s_i}^{(p)})$, et sur $A_{s_0s_1}$, une filtration donnée par les $w_{0s_1}(B_{s_0s_1}^{(p)})$ et une autre par les $w_{1s_0}(B_{s_0s_1}^{(p)})$.

Remarquons que puisque

$$w_{0s_1}^{-1} w_{1s_0}(B_{s_0s_1}^{(p)}) = w(B_{s_0s_1}^{(p)})$$

et que w conserve la filtration ascendante de $B_{s_0s_1}$, nous aurons :

$$w_{1s_0}(B_{s_0s_1}^{(p)}) = w_{0s_1}(B_{s_0s_1}^{(p)}).$$

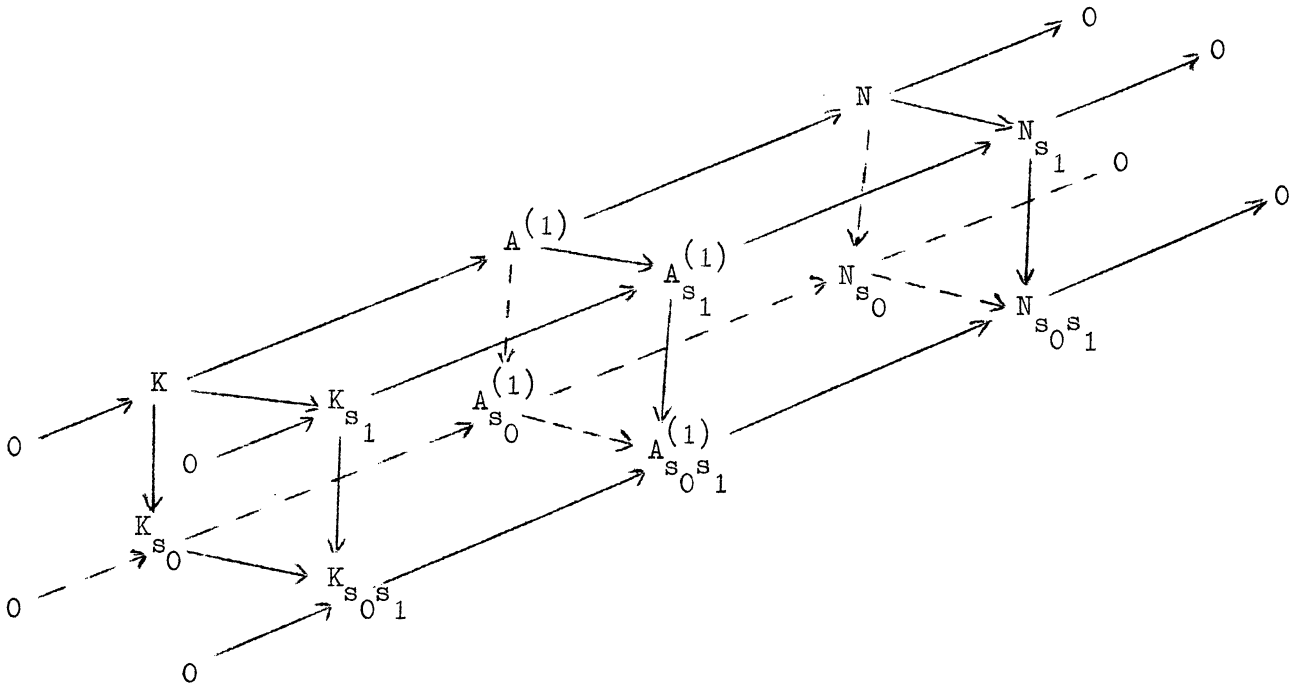
Donc si, sur A , on met la filtration induite par celle de $B_{s_0s_1}^{(p)}$, comme la filtration sur A_{s_i} est induite par celle des $w_{is_{1-i}}(B_{s_0s_1}^{(p)})$ (pour $i = 0, 1$), la filtration de A est induite par celle des A_{s_i} , pour $i = 0, 1$.

Donc si $K = A^{(0)} \subset A^{(1)} \subset \dots$ est cette filtration, les w_i sont des isomorphismes d'algèbres filtrées de B_{s_i} sur A_{s_i} (ils préservent les filtrations ascendantes).

Posons

$$N = \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} = \frac{A^{(1)}}{K}.$$

On a une suite $0 \rightarrow K \rightarrow A^{(1)} \rightarrow N \rightarrow 0$ qui se scinde au-dessus de K_{s_i} , $i = 0, 1$, car $A_{s_i} \simeq S(M_{s_i})$, donc $A_{s_i}^{(1)} = N_{s_i} \oplus K_{s_i}$, d'après ce qui précède. D'où le diagramme :



Avec

$$0 \rightarrow K_{s_i} \rightarrow A_{s_i}^{(1)} \rightarrow N_{s_i} \rightarrow 0 \text{ scindée pour } i = 0, 1$$

$$0 \rightarrow K_{s_0 s_1} \rightarrow A_{s_0 s_1}^{(1)} \rightarrow N_{s_0 s_1} \rightarrow 0.$$

Il est alors facile de construire une rétraction $A^{(1)} \rightarrow K$ qui montre que la suite

$$0 \rightarrow K \rightarrow A^{(1)} \rightarrow N \rightarrow 0$$

est scindée.

Nous pouvons identifier ainsi $A^{(1)}$ avec $K \oplus N$, ce qui donne une injection $N \rightarrow A$; soit t l'homomorphisme induit par cette injection, de $S(N)$ vers A . Puisque

$$w_i^{-1} \circ t_{s_i} : S(N_{s_i}) \rightarrow A_{s_i} \rightarrow B_{s_i} \quad (i = 0, 1)$$

est un isomorphisme

$$(N_{s_i} \simeq \frac{A_{s_i}^{(1)}}{K_{s_i}} \simeq \frac{B_{s_i}^{(1)}}{K_{s_i}} \simeq M_{s_i}),$$

t_{s_i} est un isomorphisme pour $i = 0, 1$. Il est alors facile de voir que t est un isomorphisme.

Ceci donne le résultat cherché, car N est un K -module de présentation finie puisque $W_{s_i} \simeq M_{s_i}$, $i = 0, 1$, et que les M_{s_i} sont des K_{s_i} -modules de présentation finie.

4.2. Remarques.

(i) Le théorème montre que si une K -algèbre A est telle que la $K_{\mathfrak{M}}$ -algèbre $A_{\mathfrak{M}}$ soit un anneau de polynômes sur $K_{\mathfrak{M}}$, en un nombre fini d'indéterminées, pour tout $\mathfrak{M}$ idéal maximal de K , alors A est l'algèbre symétrique d'un module projectif de type fini. Ceci répond au problème posé au § 0.

(ii) On pourrait démontrer un théorème analogue avec l'algèbre tensorielle à la place de l'algèbre symétrique.

(iii) Le module que l'on trouve dans le théorème est déterminé à un isomorphisme près d'après le lemme 4.1.

(texte reçu le 7 mai 1977)

Thierry LEVASSEUR
20 rue du Ruisseau
75018 PARIS
