Groupe de travail
d'analyse ultramétrique

Michel Emsalem

Une remarque sur la conjecture de Léopoldt

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 4, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A2_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'Etude d'analyse ultramétrique (1986/87)
N°4 , 3 pages.

Le 3 novembre 1986

Exposé n° 4

UNE REMARQUE SUR LA CONJECTURE DE LEOPOLDT

par Michel EMSALEM

J.Ax avait proposé une méthode pour démontrer la conjecture de Leopoldt pour des extensions abéliennes de $\mathbb{Q}$ ou d'un corps quadratique imaginaire. Cette méthode qui repose sur l'analyse du groupe des unités d'un corps de nombres k galoisien sur $\mathbb{Q}$ comme représentation de $Gal(k/\mathbb{Q})$ nécessitait un résultat de transcendance alors seulement conjecturé : l'indépendance linéaire sur le corps des nombres algébriques de logarithmes p-adiques de nombres algébriques multiplicativement indépendants [1]. Cet énoncé était démontré par Brumer [2], suivant immédiatement le résultat donné par Baker dans le cas archimédien.

Cet exposé a pour objet la remarque suivante : dans le cas d'une p-extension abélienne de $\mathbb{Q}$ par exemple, on peut se passer du résultat de transcendance pour démontrer la conjecture de Leopoldt en suivant la méthode d'Ax.

Fixons quelque notations. Soit k un corps de nombres et p un nombre premier. Pour chaque place v de k au dessus de p , on note k_v le complété de k en v et U_v le groupe des unités locales en v . Le groupe des unités globales de k sera noté E , et $\overline{E}$ désignera l'adhérence dans $\prod_{v|p} U_v$ de l'image de E par l'application diagonale. On appelle enfin $\hat{k}$ l'extension abélienne maximale de k non ramifiée en dehors de p , et $\tilde{k}$ le compositum des de $Gal(\hat{k}/k)$ par la suite exacte suivante de $Gal(k/\mathbb{Q})$-modules :

$$(*) \qquad 1 \longrightarrow \prod_{v|p} U_v/\overline{E} \longrightarrow Gal(\hat{k}/k) \longrightarrow Cl(k) \longrightarrow 1 \quad ,$$

où $Cl(k)$ désigne le groupe des classes de k . Le groupe $Gal(\hat{k}/k)$ est le produit de $Gal(\tilde{k}/k)$ et d'un groupe abélien fini. De la suite exacte précédente on déduit l'isomorphisme suivant de $\mathbb{Q}_p[Gal(k/\mathbb{Q})]$-modules

$$Gal(\tilde{k}/k) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \cong \prod_{v|p} k_v /\mathcal{E}$$

où $\mathcal{E}$ désigne le produit tensoriel sur $\mathbb{Z}_p$ de $\mathbb{Q}_p$ et de la p-partie de $\overline{E}$

La *conjecture de Leopoldt* pour k équivaut à l'énoncé suivant :

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{E} = rg_{\mathbb{Z}} E$$

PROPOSITION : Soit k une extension galoisienne finie de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois G . On suppose que les caractères des représentations irréductibles de G définies sur $\mathbb{Q}_p$ et intervenant dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$ sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et ont une multiplicité inférieure ou égale à 1 dans la décomposition de $E\otimes\mathbb{Q}_p$. Alors la conjecture de Leopoldt est vérifiée pour k .

Démonstration. Soit χ un caractère de G défini sur $\mathbb{Q}_p$ et intervenant dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$. Soit $c_\chi = 1/IGI(\Sigma_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\sigma)$ l'idempotent associé à χ . D'après notre hypothèse, c_χ appartient à $\mathbb{Q}_p[G]$. Donc

$$c_\chi.(E\otimes\mathbb{Q}_p) = (c_\chi.E\otimes\mathbb{Q})\otimes\mathbb{Q}_p = E_\chi\otimes\mathbb{Q}_p ,$$

où l'on a posé $E_\chi = c_\chi.(E\otimes\mathbb{Q})$. La χ-composante $\mathcal{E}_\chi$ de $\mathcal{E}$ est l'espace engendré sur $\mathbb{Q}_p$ par l'image de E_χ dans l'homomorphisme injectif $E\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}\longrightarrow\mathcal{E}$. $\mathcal{E}_\chi$ est donc non nulle si E_χ est non nulle, c'est à dire si χ intervient dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$ et $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{E}_\chi = \dim_{\mathbb{Q}}E_\chi$, ce qui achève la démonstration.

Exemples :

(1) Si k est une p-extension abélienne de $\mathbb{Q}$, k vérifie la conjecture de Leopoldt. C'est une conséquence de la proposition et du lemme suivant.

LEMME : Soit G un p-groupe fini. Tout caractère d'une représentation de G définie sur $\mathbb{Q}_p$ est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soit χ le caractère d'une représentation de G définie sur $\mathbb{Q}_p$. Les valeurs prises par χ sont dans $\mathbb{Q}_p\cap\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ où ζ_{p^n} est une racine primitive p^n-ième de 1 , et où p^n est l'ordre de G . Le caractère χ est donc à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

Remarque : si G est un p-groupe abélien, toute représentation de G définie sur $\mathbb{Q}_p$ est en fait définissable sur $\mathbb{Q}$.

(2). La proposition s'applique aussi aux extensions abéliennes k de $\mathbb{Q}$, telle que l'ordre g de $Gal(k/\mathbb{Q})$ vérifie $\mathbb{Q}_p\cap\mathbb{Q}(\zeta_g) = \mathbb{Q}$ c'est à dire chaque fois qu'il existe une unique place v de $\mathbb{Q}(\zeta_g)$ au dessus de p .

(3) Supposons que k soit une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ telle que $Gal(k/\mathbb{Q}) = A_4$ le groupe alterné à quatre lettres. Tous les caractères absolument irréductibles de A_4 sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et ils interviennent

dans $E\otimes\bar{\mathbb{Q}}$ avec multiplicité 1 (cf [3] pour un tableau des caractères de A_4). Le corps k vérifie donc la conjecture de Leopoldt.

(4) On suppose maintenant que le corps k est une extension galoisienne imaginaire de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $G = D_n$ le groupe dihédral dont une présentation est $[r,s;\ r^n=1,\ srs^{-1}=r^{-1}]$. On suppose de plus que la classe de conjugaison dans G de la conjugaison complexe sur k est la classe de conjugaison de s et que n et p vérifient $\mathbb{Q}_p\cap\mathbb{Q}(\zeta_n)=\mathbb{Q}$ (n est, par exemple, une puissance de p). Le groupe D_n a alors des caractères de degrés 1 et 2 sur $\bar{\mathbb{Q}}$ et ces caractères interviennent avec une multiplicité au plus 1 dans $E\otimes\bar{\mathbb{Q}}$ (cf [3] pour un tableau de ces caractères). Il s'ensuit que les caractères des représentations de G définies sur $\mathbb{Q}_p$, qui sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, ont aussi une multiplicité au plus 1 dans $E\otimes\mathbb{Q}_p$. La proposition s'applique donc et le corps k vérifie donc la conjecture de Leopoldt.

COROLLAIRE. Si k est un corps quadratique imaginaire la conjecture de Leopoldt est vérifiée à tous les étages de la $\mathbb{Z}_p$-extension anticyclotomique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **J. AX** : *On the units of algebraic number field*, Illinois Journal of Math., (1965).

[2] **A. BRUMER** : *On the units of algebraic number field*, Mathematika, 14, (1967), 121-124.

[3] **J.P. SERRE** : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, troisième édition (1978).

Université Paris 7
UFR de Mathématiques et UA 212
2 place Jussieu
75251 Paris Cedex 05