

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JACQUES TILOUINE

**Théorie d'Iwasawa de l'algèbre de Hecke ordinaire et
théorie d'Iwasawa classique**

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 13 (1985-1986), p. 99-112

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1985-1986__13__99_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEORIE D'IWASAWA DE L'ALGEBRE DE HECKE ORDINAIRE ET THEORIE D'IWASAWA CLASSIQUE

Jacques Tilouine

1 - Nombre du type Hurwitz et critère d'irrégularité.

Soit M un corps quadratique imaginaire d'anneau des entiers O , de discriminant $-D$, de nombre de classes h , de conjugaison complexe ρ . Soit λ un Grössencharakter de M de type $(\nu, 0)$, $\nu \geq 1$, de conducteur f , i.e. $\lambda((\alpha)) = \alpha^\nu$ si $\alpha \in M^\times$, $\alpha \equiv 1 \pmod{f}$. On note $\lambda^{[\rho]}$ le Grössencharakter de M de type $(\nu, 0)$ et conducteur f^ρ , défini par $\lambda^{[\rho]}(a) = \lambda(a^\rho)$ si $(a, f^\rho) = 1$.

Hecke et Shimura (voir [4] et [13]) ont montré que $\theta(\lambda) = \sum_{(a, f)=1} \lambda(a) q^{Na}$ ($q = e^{2\pi i z}$) est une forme parabolique de poids k et $\Gamma_1(N)$ -modulaire ($k = \nu + 1$, $N = D \cdot Nf$) qui est propre pour tous les opérateurs de Hecke et vérifie $\theta(\lambda)|_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ N & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \cdot \theta(\lambda^{[\rho]})$, où $\epsilon \in \mathbb{C}^\times$ est de module 1. Elle est donc primitive au sens d'Atkin-Lehner-W.Li.

On peut attacher à cette forme des périodes U_λ et $U^\lambda \in \mathbb{C}^\times$ commensurables au carré de Petersson $\langle \theta(\lambda), \theta(\lambda) \rangle$ (cf. [7]) et on montre que le nombre

$$H(\lambda) = \frac{L(\lambda^{[\rho]}, k)}{\pi^k (U_\lambda U^\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

est algébrique et en fait que $H(\lambda)^2$ est dans le corps de nombres M_λ engendré par M et les valeurs de λ . Expliquons rapidement la définition de U_λ, U^λ dans le cas où $\nu = 1$: soit $X = X_1(N)$; les 1-formes $\omega_\lambda = \theta(\lambda) dz$ et $\bar{\omega}_\lambda$ définissent des classes de cohomologie dans $H^1(X, \mathbb{C})$. Soit W_λ le $\mathbb{C}$ -sous-espace engendré par $B_\lambda = \{\omega_\lambda, \bar{\omega}_\lambda\}$. Soit $\mathcal{O}_{M_\lambda}$ l'anneau des entiers de M_λ ; $L = H^1(X, \mathcal{O}_{M_\lambda})$ est un réseau de $H^1(X, \mathbb{C})$ et $L = L \cap W_\lambda$ est un réseau de W_λ ainsi que $L^\lambda = 1_\lambda L$, où 1_λ est la projection sur W_λ orthogonale relativement au cup-produit de $H^1(X, \mathbb{C})$. En première approximation, on prend pour U_λ , resp. U^λ , le déterminant de la matrice de passage de B_λ à "un" système $\mathcal{O}_{M_\lambda}$ -libré de L_λ , resp. L^λ . Une définition plus rigoureuse pour U_λ (resp. U^λ) est le sous- $\mathcal{O}_{M_\lambda}$ -module de $\mathbb{C}$ engendré par tous les déterminants de ce type. Ces modules sont projectifs de rang 1 et $H(\lambda)^2$ est un idéal fractionnaire de M_λ . La définition serait analogue pour $\nu > 1$ mais ferait interve-

nir l'espace de cohomologie $H^1(X, F_k)$ où F_k est un faisceau localement constant non constant.

Soit maintenant p premier, $p \nmid 6hNp(N)$, et P une place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de p .

Proposition 1. $H(\lambda)$ est entier en P .

On utilise ce nombre dans les critères suivants :

A. Critère de congruences : Soient $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$ des formes dans $S_k(\Gamma_1(M))$ propres et normalisées ($a_1 = b_1 = 1$). Leurs coefficients sont des entiers algébriques (Shimura [13] 8.4). On note $f \equiv g \pmod{P}$ la famille de congruences $a_n \equiv b_n \pmod{P}, \forall n \geq 1$.

Proposition 2. (Ribet-Hida). $P | H(\lambda) \iff (\exists g \text{ propre normalisée} \in S_k(\Gamma_1(Np)), g \neq \theta(\lambda)^\sigma \text{ pour tout } \sigma \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ et } g \equiv \theta(\lambda) \pmod{P})$.

B. Critère Kummérien : Il y a un lien de $H(\lambda)$ avec l'arithmétique de M . Ce critère dû à Hida ([5] Théorème 0.1) s'énonce comme suit :

Faisons les hypothèses :

D est impair, $v > 1$, $(f, f^D) = 1$, $p \nmid 6Np(N)h$ $p > k$ et p décomposé en $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}^D$ dans M .

Soit P place de $\overline{\mathbb{Q}}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$, ceci détermine un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}_p$. Notons K l'adhérence de M_λ dans $\mathbb{C}_p$, $\mathcal{O}_K$ son anneau des entiers, $\tilde{\mathcal{O}}_K$ sa réduction. Soit $\tilde{\lambda} = G_M \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$ (resp. $\tilde{\lambda} : G \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_K^\times$ sa réduction), le caractère de Weil attaché à λ (cf. [16]), où G_L est le groupe de Galois absolu du corps L .

Théorème 3. Si $P | H(\lambda)$, il existe $\pi : G_M \longrightarrow GL_2(\tilde{\mathcal{O}}_K)$ telle que

- (i) $\pi(\sigma) = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}(\sigma) & a(\sigma) \\ 0 & \tilde{\lambda}_D(\sigma) \end{pmatrix}$
- (ii) π est non-semi-simple (i.e. $a(G_M) \neq 0$)
- (iii) π est non-ramifié hors de $\mathfrak{p}$ sur le corps $M_{Nf.p}$ des rayons de conducteur $f.p$.

Pour formuler en corollaire un résultat d'arithmétique de M , on introduit l'extension abélienne d'exposant p non-ramifiée hors de $\mathfrak{p}$ maximale de $M_{Nf.p}$, soit N_0 . Notons $X_0 = \text{Gal}(N_0/M_{Nf.p})$ et $\Delta = \text{Gal}(M_{Nf.p}/M)$. Considérons le caractère $\kappa = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}^D} : \Delta \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_K^\times$ et $X_0^{(\kappa)}$ la partie de $X_0 \otimes_{\mathbb{F}_p} \tilde{\mathcal{O}}_K$ sur laquelle Δ agit via le caractère κ . C'est alors un exercice facile de déduire du théorème 3 le

Corollaire 4. $P | H(\lambda) \iff X_0^{(\kappa)} \neq 0$.

On se propose de généraliser ce critère à la $\mathbb{Z}_p$ -extension anticyclotomique de $M_{Nf.p}$. L'ingrédient pour ça est la théorie d'Iwasawa de l'algèbre de Hecke ordinaire

édifiée par H. Hida dans [6] et [7]. On en rappelle les principaux résultats dans le paragraphe suivant.

2 - Théorie d'Iwasawa de l'algèbre de Hecke ordinaire.

Soit $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[T]]$.

Soit $\ell \geq 1, r \geq 1$. On a une injection $\mathbb{C}$ -linéaire $S(\Gamma_1(Np^r)) \longrightarrow \mathbb{C}[[q]]$ donnée par le q -développement à l'infini. Soit $S_\ell(\Gamma_1(Np^r), \mathbb{Z})$ l'image réciproque de $\mathbb{Z}[[q]]$. C'est un $\mathbb{Z}$ -module libre de rang $\dim_{\mathbb{C}} S_\ell(\Gamma_1(Np^r))$. On pose

$$S_{\ell,r} = S_\ell(\Gamma_1(Np^r)) \otimes \mathcal{O}_K$$

Soit $r \geq 1$ fixé et $S_{\infty,r} = \mathcal{O}_K[[q]] \cap \bigcap_{\ell \geq 0} (S_{\ell,r} \otimes K)$ (où $S_{0,r} = \mathcal{O}_K$). On munit $\mathcal{O}_K[[q]]$ de la topologie de la valeur absolue $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n| = \sup_{n \geq 1} |a_n|_p$. N. Katz (cf. [8]) a montré que les inclusions $S_{\infty,r} \subset S_{\infty,r'}$ (pour $r \leq r'$) donnent des égalités par passage à l'adhérence dans la topologie induite par celle de $\mathcal{O}_K[[q]]$: $\overline{S}_{\infty,r} = \overline{S}_{\infty,r'}$. On note $\overline{S}$ la valeur commune de ces espaces. On l'appelle espace des formes modulaires paraboliques p -adiques. Pour $\ell \geq 1, r \geq 1$ fixés, on a donc $S_{\ell,r} \subset \overline{S}$. Posons alors :

$$S_{\ell,\infty} = \bigcup_{r \geq 0} S_{\ell,r}$$

Un théorème de Ohta (cf. [10]) montre en fait que $S_{\ell,\infty}$ est dense dans $\overline{S}$, nous n'en aurons cependant pas usage car nous nous cantonnerons aux parties ordinaires de ces modules sur lesquelles on a des résultats plus précis.

$$\text{Soit } Z = \varprojlim_r (\mathbb{Z}/Np^r \mathbb{Z})^\times = Z_1 \times \Gamma \text{ où } \begin{cases} Z_1 \text{ est le facteur } \simeq (\mathbb{Z}/Np \mathbb{Z}) \\ \Gamma \text{ est le facteur } \simeq \mathbb{Z}_p^+ \end{cases}$$

On définit une action de Z sur $S_{\infty,r} \otimes K$ comme suit : Soit $z = (z_1, z_2)$ dans Z et $f \in S_{\ell,r} \otimes K$, soit $\sigma_z \in \Gamma_0(Np^r)$ telle que $\sigma_z \equiv \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \pmod{Np^r}$, alors $f| \langle z \rangle_0 = z_2^\ell \times f|_{\sigma_z}$. Katz a montré que cette action laisse stables $S_{\ell,r}$ et $S_{\infty,r}$. Par continuité on a donc une action de Z sur $\overline{S}$ (dite diamant de poids 0). On sait que les opérateurs de Hecke laissent stables les $S_{\ell,r} \otimes K$. Or pour q premier, $f = \sum_{n \geq 1} a(n, f) q^n \in S_{\ell,r} \otimes K$.

$$\text{on a : } a(n, f|T(q)) = \begin{cases} a(nq, f) + q^{-1} a(n/q, f| \langle q \rangle_0) & \text{si } q \nmid Np \\ a(nq, f) & \text{si } q | Np. \end{cases}$$

Par conséquent, les $T(q)$ laissent stables $S_{\ell,r}$ et $S_{\infty,r}$ et opèrent donc sur $\bar{S}$. On note $h_{\ell,r}$ (resp. $h = h_{\infty,r}$, pour $r \geq 1$) la $\mathcal{O}_K$ -algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke vus comme endomorphismes de $S_{\ell,r}$ (resp. de $\bar{S}$). On a la

Proposition 5.

$$\bar{S} \times h \longrightarrow \mathcal{O}_K$$

$$(f, T) \longmapsto \langle f, T \rangle = a(1, f|T)$$

est un accouplement $\mathcal{O}_K$ -linéaire parfait tel que $\langle f|T, T' \rangle = \langle f, TT' \rangle$ induisant donc un isomorphisme de h -modules :

$$h \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\bar{S}, \mathcal{O}_K)$$

$$T \longmapsto (f \longmapsto \langle f, T \rangle)$$

Remarquons de plus que h contient l'image de Z par $z \longmapsto \langle z \rangle_0$. En particulier, h est un $\mathcal{O}_K[[\Gamma]]$ -module compact, donc est un $\mathcal{O}_K[[\Gamma]]$ -module. On identifie $\mathcal{O}_K[[\Gamma]]$ avec $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[T]]$ par $\langle 1+Np \rangle_0 \longrightarrow 1+T$. On notera $u = 1+Np$. Pour ℓ et r fixés, $h_{\ell,r}$ est finie et plate sur $\mathcal{O}_K$ donc est semi-locale. Comme $\mathcal{O}_K$ est complet, elle est produit de ses localisées aux idéaux maximaux. Soit $h_{\ell,r}^0$ le produit des composantes locales dans lesquelles $T(p)$ est inversible. Soit $e_{\ell,r}$ son élément unité, on l'appelle l'idempotent ordinaire de $h_{\ell,r}$. On définit de manière analogue l'idempotent ordinaire e de h et on note $h^0 = e.h$.

Théorème 6. h^0 est une $\mathcal{O}_K$ -algèbre finie et plate.

De plus comme $\bar{S}_{\ell,\infty} \subset \bar{S}$ et que les opérateurs de Hecke laissent stable $S_{\ell,\infty}$, donc opèrent sur $\bar{S}_{\ell,\infty}$, en notant $h_{\ell,\infty}$ la $\mathcal{O}_K$ -algèbre engendrée par tous les opérateurs de Hecke $T(q)$, q premier, on a un morphisme surjectif de Λ_K -algèbres : $h \xrightarrow{\alpha} h_{\ell,\infty}$ (c'est l'identité en utilisant Ohta). En utilisant des techniques élémentaires (du style du chapitre 8 de [13]), Hida [7] montre que α induit un isomorphisme

Théorème 7. $eh \xrightarrow{\alpha} eh_{\ell,\infty}$.

On note h^0 cette algèbre de Hecke.

Soit $\ell \geq 2$, ϵ un caractère de Γ de conducteur divisant p^r ($r \geq 0$) et posons

$$S_{\ell,r}(\epsilon) = \{f \in S_{\ell,r}; \forall \gamma \in \Gamma, f| \langle \gamma \rangle_0 = \epsilon(\gamma).f\}$$

$h_{\ell,\epsilon} = \mathcal{O}_K$ -algèbre engendrée par les opérateurs de Hecke comme endomorphismes de $S_{\ell,r}(\epsilon)$.

Remarquons que $S_{\ell,r} \otimes K = \bigoplus_{\text{Cond}(\epsilon) | p^r} S_{\ell,r}(\epsilon) \otimes K$ et $h_{\ell,r} \otimes K = \prod_{\text{Cond}(\epsilon) | p^r} h_{\ell,\epsilon} \otimes K$.

Posons $P_{\ell,\epsilon} = 1+T-\epsilon(u)u^\ell$.

Théorème 8. (de contrôle) : L'inclusion $eS_{\ell,r}(\epsilon) \subset e\bar{S}$ fournit un morphisme de O_K -algèbres surjectif évident

$$h^0/p_{\ell,\epsilon} h^0 \longrightarrow h_{\ell,\epsilon}^0.$$

C'est un isomorphisme.

Corollaire 9. Soit $\omega_{\ell,r} = (1+T)^p - u^{\ell p^{r-1}}$ si $r \geq 1$ l'inclusion $eS_{\ell,r} \subset e\bar{S}$ fournit un morphisme surjectif évident de O_K -algèbres :

$$h^0/\omega_{\ell,r} h^0 \longrightarrow h_{\ell,r}^0.$$

C'est un isomorphisme.

3 - Module de congruences adapté à notre situation.

Notons $C\ell_{f\mathfrak{p}^r}$ le groupe des classes de rayons de M de conducteur $f\mathfrak{p}^r$ pour $r \geq 1$ fixé. Soit $C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty} = \varprojlim_r C\ell_{f\mathfrak{p}^r}$; comme $p \nmid h$, ce groupe profini admet une décomposition naturelle en produit de deux groupes :

$$\begin{aligned} C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty} &\xrightarrow{\sim} C\ell_{f\mathfrak{p}} \times (1+f\hat{\mathfrak{p}}) \\ x &\longmapsto (x_1, x_2) \end{aligned}$$

où $1+f\hat{\mathfrak{p}} = \varprojlim_r (1+f\mathfrak{p})/(1+f\mathfrak{p}^r)$.

Il est clair de plus que l'ensemble I des idéaux de O premiers à $f\mathfrak{p}$ s'injecte dans $C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty}$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \theta : C(C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty}, O_K) &\longrightarrow \bar{S} \\ \varphi &\longmapsto \sum_{a \in I} \varphi(a) q^{Na} \in O_K[[q]] \end{aligned}$$

où $C(C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty}, O_K)$ désigne le O_K -module des applications continues du groupe profini $C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty}$ vers O_K . L'image de θ est dans $\bar{S}$ car le O_K -module engendré par les prolongements par continuité des Grössencharakter $I \rightarrow M_\lambda$ de conducteur $f\mathfrak{p}$ et de type $(v', 0)$ ($v', 0$) $v' = 1, 2, \dots$ est dense dans $C(C\ell_{f\mathfrak{p}^\infty}, O_K)$ et le théorème de Hecke et Shimura cité au paragraphe 1 montre que son image est dans $\bar{S}$. Par dualité O_K -linéaire et application de la Proposition 5 et du Théorème de Mahler [9], on obtient un morphisme de O_K -algèbres :

$$\begin{aligned} \theta^* : h &\longrightarrow \mathcal{O}_K[[\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}^\infty]] \\ T(q) &\longmapsto \begin{cases} [Q] + [Q^D] & \text{si } q \text{ est décomposé en } QQ^D \text{ et } (q, \mathfrak{f}\mathfrak{p}) = 1 \\ 0 & \text{si } q \text{ est inerte} \\ [Q] & \text{si } q \text{ est ramifié ou décomposé en } Q, Q^D \text{ et } Q^D | \mathfrak{f}\mathfrak{p}. \end{cases} \end{aligned}$$

En outre $\theta^*(\langle q \rangle_0) = \left(\frac{-D}{q}\right).q.[(q)]$. Notons de plus que $\theta^*(T(p)) = [p^D]$ qui est inversible.

Considérons le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \eta : \mathcal{O}_K[[\mathcal{C}\ell_{\mathfrak{f}\mathfrak{p}}^\infty]] &\longrightarrow \Lambda_K \\ z = (z_1, z_2) &\longmapsto \hat{\lambda}(z_1)z_2^{-1}(1+T)^\alpha \\ z_2 &= u^\alpha \end{aligned}$$

Posons $\chi = \eta \circ \theta^*$. On a $\chi(T(p)) = \eta([p^D]) \in \Lambda_K^\times$. Or, l'algèbre h^0 jouit de la propriété universelle suivante (très facile à vérifier en utilisant la définition de h comme limite projective de $\mathcal{O}_K$ -algèbres finies) pour toute $\mathcal{O}_K$ -algèbre locale et tout morphisme α de $\mathcal{O}_K$ -algèbres $\alpha : h \longrightarrow A$ tel que $\alpha(T(p)) \in A^\times$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_K$ -algèbres $\alpha^0 : h^0 \longrightarrow A$ tel que $\alpha = \alpha^0 \circ e$, e désignant le morphisme $h \longrightarrow h^0$ de multiplication par l'idempotent ordinaire e . On applique ceci à $\alpha = \chi$ et on a en fait le résultat plus précis (où l'on note encore $\alpha^0 = \chi : h^0 \longrightarrow \Lambda_K$) :

Proposition 10. $\chi : h^0 \longrightarrow \Lambda_K$ est un morphisme de Λ_K -algèbres. Si L_K est le corps des fractions de Λ_K , on a $h^0 \otimes L_K \simeq L_K \otimes A$, la première projection s'identifiant à χ .

Comme d'autre part h^0 est une algèbre finie sur l'anneau local complet Λ_K , elle est semi-locale, produit de ses localisées aux idéaux maximaux. Soit R la composante locale à travers laquelle χ se factorise.

Il est clair que R est finie et plate et $R \otimes L_K \simeq L_K \otimes B$.

Notation 11. Soient

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{Im} \left(R \xrightarrow{\text{pr}_1} L_K \right) \\ \mathfrak{c}_1 &= \text{Ker} \left(R \xrightarrow{\text{pr}_2} B \right) \\ R_2 &= \text{Im} \left(R \xrightarrow{\text{pr}_2} B \right) \\ \mathfrak{c}_2 &= \text{Ker} \left(R \xrightarrow{\text{pr}_1} L_K \right). \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_1 \otimes \mathfrak{c}_2$ et $R^* = R_1 \otimes R_2$. Remarquons que $\text{pr}_1 \times \text{pr}_2$ fournit une inclusion $R \hookrightarrow R_1 \otimes R_2 = R^*$.

Lemme 12. L'idéal $\mathfrak{c}$ est le conducteur de l'ordre R^* dans R et on a des isomorphismes naturels de Λ_K -modules déduits des inclusions $R_1 \xrightarrow{i_1} R^* \xleftarrow{i_2} R_2$ et des

$$\begin{array}{ccccccc} \text{projections} & R_1 & \xleftarrow{pr_1} & R & \xrightarrow{pr_2} & R_2 & : \\ & & \xrightarrow{\sim pr_1} & & \xrightarrow{\sim i_1} & & \\ & R/\mathfrak{C} & & R_1/\mathfrak{C}_1 & & R^*/R & \xleftarrow{\sim i_2} R_2/\mathfrak{C}_2 \xleftarrow{\sim pr_2} R/\mathfrak{C}. \end{array}$$

Définition fondamentale. Le Λ_K -module décrit par les isomorphismes ci-dessus est appelé le module de congruences attaché au couple (λ, p) et noté C .

Proposition 13. Le Λ_K -module C est de type fini de torsion et est isomorphe à $\Lambda_K/H\Lambda_K$. Il n'a donc pas de sous-module-pseudo-nul non nul.

Preuve. On a $R_1 = \Lambda_K$ donc $\mathfrak{C}_1$ est un idéal de Λ_K . Or, $\mathfrak{C}_1 = L_K \cap R$ c'est donc l'intersection d'un sous-espace vectoriel de $R \otimes L_K$ avec un Λ_K -module réflexif : il est réflexif et donc libre sur l'anneau Λ_K régulier de dimension 2. Donc $\mathfrak{C}_1 = H\Lambda_K$.

Un élément H comme dans la proposition 13 est une série caractéristique de C . La série H satisfait les propriétés faibles d'interpolation suivantes (faibles car elles ne donnent que l'égalité des valuations p -adiques des deux membres). Si ϵ est un caractère de Dirichlet de M de conducteur p^r et d'exposant p -primaire, on peut l'évaluer sur $u = 1 + Np$ vu comme générateur du p -Sylow de $C\mathbb{Z}_{p^r}$, et on a

Théorème 14 ([7] Théo. III).

(i) Si ϵ est non trivial,

$$(*) \quad H(\epsilon(u)u^{k-1}) \sim p^{2r-1} \frac{L(\lambda\lambda^{[\rho]}_{\epsilon\epsilon}[\rho], k)}{\pi^k (U_{\lambda\epsilon} U^{\lambda\epsilon})^{\frac{1}{2}}}$$

où le tilde signifie "différer par une unité p -adique" et où les périodes $U_{\lambda\epsilon} U^{\lambda\epsilon}$ ont une définition analogue à celle de U_λ, U^λ en remplaçant $\theta(\lambda)$ par $\theta(\lambda\epsilon)$, et où en appelant $H(\lambda\epsilon)$ le second membre de (*), on a : $H(\lambda\epsilon)^2 \in M_{\lambda\epsilon}$ engendré par M et les valeurs de $\lambda\epsilon$.

(ii) Si ϵ est trivial

$$H(u^k-1) \sim H(\lambda).$$

Remarques : 1) On a évidemment, pour $P_{k,\epsilon} = 1 + T - \epsilon(u)u^k$,

$$(C : P_{k,\epsilon}C)^2 \sim N_{K_\epsilon/\mathbb{Q}_p} H(\lambda\epsilon)^2$$

où K_ϵ est l'adhérence p -adique de $M_{\lambda\epsilon}$ et le tilde signifie "diffère par une unité p -adique de".

2) En fait $C/P_{k,\epsilon}C$ s'identifie au "module de congruences" attaché à $\theta(\lambda\epsilon) \in S_k(\Gamma_1(Np^r), K)$ comme dans Doi-Ohta [3]. Le Λ_K -module C interpole donc les

groupes de congruences des $\theta(\lambda_\epsilon)$, ϵ variant. La proposition suivante explique alors en quel sens ce module généralise la Proposition 2 à la famille $\{\theta(\lambda_\epsilon)\}_\epsilon$:

Proposition 15.

$$\begin{aligned} & (\forall \epsilon, \exists g_\epsilon \text{ propre normalisée dans } S_k(\Gamma_1(Np^r)) \text{ t.q.}) \\ P|H(\lambda) \iff C \neq 0 \iff P|H(\lambda_\epsilon), \forall \epsilon \iff \\ & (\ g_\epsilon \neq \theta(\lambda_\epsilon)^\sigma \ \forall \sigma \in \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}) \text{ et } g_\epsilon \equiv \theta(\lambda_\epsilon) \pmod{P} \) \end{aligned}$$

Remarque : On doit considérer le couple (C, H) comme un analogue du couple (Y, G) où Y est le module analytique de Coates-Wiles-Yager, i.e.

(unités semi-locales en p)
(adhérence des unités elliptiques), spécialisé à la $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique du corps des rayons $M_{Nf.p}$ et G est la spécialisation à la variable anticyclotomique de la série L p -adique à deux variables de Katz-Yager (cf. [2], [17]). L'étude des périodes de U_{λ_ϵ} , U^{λ_ϵ} et de leur lien avec celles de Katz-Yager doit permettre de montrer au moins que les invariants λ et μ d'Iwasawa des séries H et G coïncident. L'objet du présent travail est d'exposer le résultat exprimant le lien du couple (C, H) et d'un couple (X, F) constitué d'un module d'Iwasawa galoisien lié à M et de sa série caractéristique définis au paragraphe suivant.

4 - Théorie d'Iwasawa classique.

Soit $\Delta = \text{Gal}(M_{Nf.p}/M)$, $\kappa : \hat{\Delta} \longrightarrow \mathcal{O}_K^\times$.

Soit M_∞ la $\mathbb{Z}_p$ -extension de M non ramifiée hors de p ,

M_∞^- la $\mathbb{Z}_p$ -extension de M anticyclotomique.

C'est-à-dire que c'est la pro- p -extension abélienne, diédrale sur $\mathbb{Q}$, maximale, de M .

Soit $M_{Nf.p^\infty}$ la réunion des corps de rayons de M de conducteur $Nf.p^r$, $r = 1, 2, \dots$

Soit $M_\infty' = M_\infty M_{Nf.p}$ et $M_\infty'^- = M_\infty^- M_{Nf.p}$. Soit $\Gamma^- = \text{Gal}(M_\infty'^-/M_{Nf.p})$.

Soit N la pro- p -extension abélienne non ramifiée hors de p de $M_\infty'^-$ et $X = \text{Gal}(N/M_\infty'^-)$. Le groupe $\Delta \times \Gamma^-$ opère sur X . Soit $X^{(\kappa)}$ la partie de $X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_K$ sur laquelle Δ opère par κ .

Proposition 16 (B. P.-R. [11]) $X^{(\kappa)}$ est un $\mathcal{O}_K[[\Gamma^-]]$ -module de type fini et de torsion.

On identifie alors $\mathcal{O}_K[[\Gamma^-]]$ avec Λ_K de la manière suivante. Fixons pour générateur topologique de $\text{Gal}(M_\infty'/M_{Nf.p})$ l'élément γ image de $u \in \text{Cl}_{p^\infty}$ par la Loi de Réciprocité d'Artin. Soit τ l'unique élément de $\text{Gal}(M_{Nf.p^\infty}/M_{Nf.p})$ tel que

Théorie d'Iwasawa de l'algèbre de Hecke ordinaire

$\tau^{(1)} = \tau^{-1}$ et $\tau|_{M'_\infty} = \gamma^{\frac{1}{2}}$. On prend $\tau|_{M'_\infty}$ pour générateur topologique et on l'envoie sur $1+T$.

Soit maintenant $F \in \Lambda_K$ une série caractéristique de $\chi^{(\kappa)}$. Le théorème qui nous occupe dans cet exposé est :

Théorème 17. Tout facteur premier de H dans Λ_K divise

$$F(u^{-1}(1+T) - 1).$$

Lien avec le Corollaire 4 : On a $\chi_0^{(\kappa)} = \chi^{(\kappa)}/m\chi^{(\kappa)}$ où m est l'idéal maximal de Λ_K . Donc d'après le théorème 17, $(H \text{ non unité}) \Rightarrow (F \text{ non unité})$, ce qui entraîne le Corollaire 4.

5 - Schéma de la démonstration.

Rappelons que $C \simeq \Lambda_K/H\Lambda_K \longrightarrow R_2/\mathfrak{C}_2$.

L'idéal $\mathfrak{C}_2$ est donc au-dessus de $H\Lambda_K$ via le morphisme fini d'algèbres $\Lambda_K \longrightarrow R_2$. De plus, au-dessus d'un facteur premier P de H , il y a un unique idéal premier $\mathfrak{p}$ et la composante $\mathfrak{p}$ -primaire de $\mathfrak{C}_2$ est donc bien définie (cf. [1] Théorème 4.9). On la note $\mathfrak{Q}$. Pour un tel $P|H$ fixé, on va construire un morphisme de groupes

$$a_P : \text{Gal}(\overline{M}/M_{\text{Nf}, P^\infty}) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^2 \text{ tel que}$$

(i) Pour $\tau \in \text{Gal}(M_{\text{Nf}, P^\infty}/M_{\text{Nf}, P})$ l'élément défini précédemment, et pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\overline{M}/M_{\text{Nf}, P^\infty})$ on a $a_P(\sigma^\tau) = u^{-1}(1+T)a_P(\sigma)$.

Pour tout $\sigma \in \text{Gal}(\overline{M}/M_{\text{Nf}, P^\infty})$ et tout $\delta \in \Delta$

$$a_P(\sigma^\delta) = \kappa(\delta).a_P(\sigma).$$

(ii) $\text{Im } a_P$ n'est pas pseudo-nulle.

(iii) a_P est non-ramifiée hors des places au-dessus de $\mathfrak{p}$.

Noter l'analogie des assertions (i) (ii) (iii) avec les assertions (i) (ii) (iii) du Théorème 3.

Une fois cet homomorphisme construit, on peut le factoriser en un morphisme de Λ_K -algèbres, d'image non pseudo-nulle :

$$\chi^{(\kappa)}(1) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^2.$$

Or la série caractéristique de $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}^2$ est une puissance de P (c'est un quotient de

$C(P)^n$ où $C(P) = C/\mathbb{Q}C = \Lambda_K/p^e \Lambda_K$ si $P^e || H$, tandis que la série caractéristique de $X^{(K)}(1)$ est $F(u^{-1}(1+T)-1)$. Le Théorème 17 résulte donc de l'existence de a_p .

Remarquons encore, concernant la condition (ii) requise pour a_p , que la non-nullité de $\text{Im } a_p$ ne serait pas suffisante pour notre objet car $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_2$ peut contenir des sous R_2 -modules pseudo-nuls non nuls.

Il se peut en effet que R_2 ne soit pas normal donc sûrement pas régulier (si B n'est pas un corps, R_2 n'est pas normal) et on a un exemple simple d'extension finie et plate de $\mathbb{Z}_p[[T]]$, normale et non régulière, avec un idéal primaire plat sur Λ_K dont le carré n'est pas plat sur Λ_K et tel que $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_2$ contienne un sous-module pseudo-nul non-nul : $R_2 = \mathbb{Z}_p[[T, X]]/(X^2 - pT)$, $\mathbb{Q} = (T, X)$, $\mathbb{Q}^2 = (T) \cap (p, T, X)^2$, $\mathbb{Q}^{(2)} = (T)$, $\mathbb{Q}^{(2)}$ désignant le carré symbolique de $\mathbb{Q}$ (cf. [1]) et $\mathbb{Q}^{(2)}/\mathbb{Q}_2$ est non-nul et pseudo-nul.

La construction de a_p suit le plan que voici :

Soit $X_r = X_1(Np^r)/\mathbb{Q}$, $J_r = \text{Pic}^0(X_r/\mathbb{Q})$

On introduit le $G_{\mathbb{Q}}$ -module et h -module (les deux actions commutant) :

$$O_K \otimes \mathbb{Z}_p J_r[p^\infty](\overline{\mathbb{Q}}).$$

On prend la R -partie de ce module notée $J_r(R)$. C'est un R et un $G_{\mathbb{Q}}$ -module. Notre point de départ est le module

$$J(R) = \varinjlim_r J_r(R), \text{ la limite étant prise pour les revêtements}$$

$$X_{r'} \longrightarrow X_r \text{ si } r' \geq r, \text{ donnant par application de } \text{Pic}^0 : J_r \longrightarrow J_{r'}.$$

Proposition 18 (cf. [7] et [14]).

- (1) R est de Gorenstein et R_2 est plat sur Λ_K .
- (2) $J(R)$ est colibre de rang 2 sur R .
- (3) Comme R est une Λ_K -algèbre, on peut parler de la $\omega_{2,r}$ -torsion de $J(R)$, où $\omega_{2,r} = (1+T)p^{r-1} - u^2 p^{r-1}$ et on a :

$$\forall r \geq 1, J_r(R) \longrightarrow J(R) \text{ et } J_r(R) = J(R)[\omega_{2,r}]$$

Comme l'assertion 2, entraîne que $J(R)$ est Λ_K -divisible on peut appliquer les idempotents 1_i de R^* , élément unité de R_i . On pose

Définition 19. $A = 1_1 J(R)$, $B = 1_2 J(R)$.

Ce sont des $G_{\mathbb{Q}}$ et des R -modules, on a $A+B = J(R)$.

Notons M^* le dual de Pontryagin du R -module M . On a la

Proposition 20.

$$\begin{aligned} A^* &\simeq \Lambda_K \otimes \Lambda_K \\ B^* &\simeq R_2 \otimes R_2 \\ (A \cap B)^* &\simeq C \otimes C \end{aligned}$$

En particulier $A \cap B = A[H] = B[\mathfrak{C}_2]$.

Cette dernière égalité est cruciale pour notre construction puisqu'elle égale deux morceaux des groupes Λ_K -divisibles A et B qu'on peut qualifier, le premier de type C.M. par M et le second de module sans multiplication complexe par M , au sens de la

Proposition 21.

- (i) $A^* \simeq (\text{Ind}_{\mathbb{Q}}^M \Lambda_K(\phi))'$
 (ii) B^* ne contient pas de vecteur propre non nul pour G_M .

Explication : Soit $\phi : G_M \xrightarrow{\text{Res}} \text{Gal}(M_{\infty}/M) \xrightarrow{\sim} \text{Cl}_{\mathbb{F}_p^{\infty}} \xrightarrow{\eta} \Lambda_K^*$.

$\Lambda_K(\phi)$ désigne le Λ_K -module libre de rang 1 sur lequel G_M opère par ϕ , et $\text{Ind}_{\mathbb{Q}}^M \Lambda_K(\phi) = \Lambda_K G_{\mathbb{Q}} \otimes \Lambda_K G_M \Lambda_K(\phi)$ est le Λ_K -module libre de rang 2 induit de M à $\mathbb{Q}$. Enfin le prime indique le passage à la contragrédiente et l'isomorphisme est $\Lambda_K G_{\mathbb{Q}}$ -linéaire. Un corollaire évident de (i) est que sur G_M on a la décomposition de A^* en somme de deux Λ_K -droites stables avec action par ϕ^{-1} et ϕ^{-p} . Au contraire, (ii) affirme que rien de tel ne se produit pour B . Pour la preuve, voir [15].

On déduit de la Proposition 20 que $B[\mathbb{Q}] = X \otimes Y$ où $X^* \simeq Y^* \simeq C(P)$ comme Λ_K -modules et l'action de G_M sur X (resp. Y) est via ϕ (resp. via ϕ^p défini par $\phi^p(\sigma) = \phi(\rho\sigma\rho)$). Au vu de la Proposition 21, ceci ne saurait durer pour la torsion de B tuée par un idéal plus petit que $\mathbb{Q}$. C'est pourquoi on forme $B^{(1)} = B/Y$.

C'est un $\begin{matrix} G_M\text{-module} \\ R_2 \end{matrix}$ et on a une suite exacte de G_M et R_2 -modules :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow X^{(1)} \longrightarrow B^{(1)}[\mathbb{Q}] \longrightarrow Y^{(1)} \longrightarrow 0$$

où $X^{(1)}$ est l'image isomorphe de X dans $B^{(1)}$ et $Y^{(1)}$ est le quotient défini par (*).

Cette suite est scindée sur R_2 (facile), mais pas sur G_M (c'est ce qu'on va voir).

$$\begin{aligned} \text{Définissons alors } a_p : G_M &\longrightarrow \text{Hom}_{R_2}(Y^{(1)}, X^{(1)}) \\ \sigma &\longmapsto \text{pr}_{X^{(1)}} \circ \sigma_Y(1) \end{aligned}$$

on a : $a_p(\sigma\sigma') = a_p(\sigma)\phi^p(\sigma') + \phi(\sigma)a_p(\sigma')$ d'où un morphisme de groupes par restriction :

$$a_p : G_{M_{Nf.p^\infty}} \longrightarrow \text{Hom}_{R_2}(Y^{(1)}, X^{(1)})$$

satisfaisant la condition (i) requise pour a_p .

On montre facilement que $\begin{cases} X^{(1)*} \simeq C(P) \\ Y^{(1)*} \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^2 \end{cases}$.

Donc $\text{Hom}_{R_2}(Y^{(1)}, X^{(1)}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Q}^2$ sur R_2 .

On traite alors la non-ramification de a_p hors de p à l'aide du critère de Néron-Ogg-Shafarevitch.

En $\mathbb{P}_0|p^0$, on procède comme dans Ribet [12] en utilisant [14]. C'est ici qu'intervient le 3) de la Proposition 18.

L'assertion 2) enfin utilise la définition de $\mathfrak{C}$ comme conducteur de R^* dans R : Si $\text{Im } a_p$ était pseudo-nulle, on construirait un idéal $\mathfrak{C}$ de R_2 tel que $\mathbb{Q}^2 \subset \mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}/\mathbb{Q}^2$ est pseudo-nul, et un isomorphisme I faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & R_1 & \longrightarrow & R_1/\mathfrak{C} \cap R_1 \\ & \nearrow pr_1 & & & \uparrow S \quad I \\ R & & & & \\ & \searrow pr_2 & R_2 & \longrightarrow & R_2/\mathfrak{C} \end{array}$$

et par définition de $\mathfrak{C}_2$ on aurait $\mathfrak{C}|\mathfrak{C}_2$, ce qui est impossible car $\mathbb{Q}$ est la partie P -primaire de $\mathfrak{C}_2$ donc on aurait dans $R_{2,P} : \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}$ ce qui est impossible par Nakayama.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Atiyah, I. Macdonald.- Notes on Commutative algebra, Math. Oxford Institute, 1966.
- [2] J. Coates, A. Wiles.- On p -adic L functions and elliptic units, J. Austr. Math. Soc. (Series A) vol. 26 (1978), 1-25.
- [3] K. Doi, M. Ohta.- On some congruences between cusp forms on $\Gamma_0(N)$ p. 91-105, in Modular Functions of one variable V, Bonn 1976, Lect. Notes in Math. vol. 601, Springer-Verlag, 1977.
- [4] E. Hecke.- Ueber Moduln Funktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. II. Math. Ann. Bd. 114 (1937), 316-351, reproduit in Math. Werke, p. 672-707, Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht, 1959.
- [5] H. Hida.- Kummer's criterion for the special values of Hecke L -functions of imaginary quadratic fields and congruences among cusp forms, Inv. Math. 66 (1982), 415-459.
- [6] H. Hida.- Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, à paraître dans Ann. Scient. de l'E.N.S.
- [7] H. Hida.- Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, à paraître dans Inv. Math.
- [8] N. Katz.- Higher congruences between modular forms, Ann. of Math. 101 (1975), 332-367.
- [9] S. Lang.- Cyclotomic Fields, G.T.M., Springer-Verlag 1978.
- [10] M. Ohta.- On ℓ -adic representations attached to automorphic forms, Japan. J. Math. 8 (1982), 1-47.
- [11] B. Perrin-Riou.- Thèse d'Etat, Orsay 1984.
- [12] K. Ribet.- A modular construction of unramified extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Inv. Math. 34 (1976), 151-162.
- [13] G. Shimura.- Introduction to the arithmetic Theory of automorphic functions, Princeton University Press, 1971.
- [14] J. Tilouine.- Un sous-groupe p -divisible de la jacobienne de $X_1(Np^r)$ comme module sur l'algèbre de Hecke, à paraître au Bull. de la S.M.F.
- [15] J. Tilouine.- Théorie d'Iwasawa classique et de l'algèbre de Hecke ordinaire, à paraître.
- [16] A. Weil.- On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number field. 1955 c in Oeuvres Scientifiques vol. II, Springer-Verlag, 1980.
- [17] R. Yager.- On p -adic L -functions with two variables, Ann. of Math. 115 (1982), 411-449.

Jacques TILOUINE
 Mathématiques, Bât. 425
 Université Paris-Sud
 91405 ORSAY Cédex

- [16] A. Weil.- On a certain type of characters of the idele-class groupe of an algebraic number field. 1955 c in *Oeuvres Scientifiques* vol. II, Springer-Verlag, 1980.
- [17] R. Yager.- On p-adic L-functions with two variables, *Ann. of Math.* 115 (1982), 411-449.

Jacques Tilouine
Mathématiques, Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 ORSAY CEDEX