

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Un calcul d'invariant λ

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 1, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A1_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

10 octobre 1983

UN CALCUL D'INVARIANT λ

par Daniel BARSKY (*)

Résumé. - On montre comment retrouver des valeurs de l'invariant λ d'Iwasawa, données par G. GRAS et K. RIBET, à l'aide de la construction de Kubota-Leopoldt des fonctions L p-adiques.

Introduction. - Soit p un nombre premier, $m \in \mathbb{N}$, $(m, p) = 1$, $m \geq 1$. Soit ϵ le caractère trivial sur $\mathbb{Z}$, ϵ_m le caractère trivial sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ étendu à $\mathbb{Z}$. Soit ψ un caractère de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ d'ordre une puissance de p , pair. On reprend les notations de [2]. On note $\sum_a^{(m,k,h)}$, $0 \leq k \leq p^h - 1$, une sommation sur les entiers a tels que :

$$(i) \quad 0 \leq a \leq mp^h - 1, \quad (a, p) = (a, m) = 1$$

$$(ii) \quad \left| \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1 + mq)} - k \right| \leq p^{-h}$$

où $q = p$ si $p \neq 2$, $q = 4$ si $p = 2$. On note ω le caractère de Teichmüller sur $\mathbb{Z}_p$, alors $\langle a \rangle = \frac{a}{\omega(a)}$, $||$ est la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$ et $\log$ est le logarithme p-adique.

On a d'après [2] la proposition suivante.

PROPOSITION 1. - Soit ψ un caractère de Dirichlet pair sur $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. On note $I_\psi(T)$ la série d'Iwasawa associée à $L_p(s, \psi)$. On a

$$I_\psi(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \psi(a) \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}.$$

Une formule pour $\lambda\psi$. - Remarquons que, par construction,

$$\left| \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h} \right| \leq 1.$$

Si ψ est d'ordre une puissance de p , alors si $(a, m) = 1$, on a

$$|\psi(a) - 1| = p^{-\alpha} < 1.$$

(*) Daniel BARSKY, Université Paris-7, LA 212, UER Math. et Inform., 2 place Jussieu 75251 PARIS CEDEX 05.

Donc

$$(1) \quad I_{\psi}(T) \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mq^h} \pmod{\mathfrak{M}_p[[T]]}$$

où $\mathfrak{M}_p$ est l'idéal maximal de $\mathbb{C}_p$.

On a aussi dans [2] la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Soit

$$\alpha(p) = \frac{(1+q)(\log(1+q))(p-1)}{p}.$$

Si ϵ est le caractère trivial primitif on a :

$$(2) \quad I_{\epsilon}(T) = \frac{\alpha(p)}{T-q} + \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{h-1} (1+T)^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a \rangle - (1+q)^{-k}}{q^h}.$$

On obtient alors en comparant (1) et (2) :

PROPOSITION 3. - On a avec les notations précédentes, ψ est d'ordre une puissance de p

$$(T-q) I_{\psi}((T+1)(1+q)(1+mq) - 1) \\ \equiv I_{\epsilon}(T)(T-q) \prod_{\lambda|m, \lambda \text{ premier}} (1 - (1+T)^{-(\log \langle \lambda \rangle / \log(1+mq))}) \pmod{\mathfrak{M}_p[[T]]}.$$

La démonstration est immédiate.

PROPOSITION 4. - [Cf. [3] ou [4]]. On a

$$\lambda_{\psi} = -1 + \sum_{\lambda|m, \lambda \text{ premier}} p^{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda)$ est défini par $\langle \lambda \rangle = 1 + qp^{n(\lambda)}$ u avec $u \in \mathbb{Z}_p^*$.

Preuve. - Rappelons, [2], que λ_{ψ} est le nombre de zéros de $I_{\psi}(T)$ dans le disque unité.

Par ailleurs il découle immédiatement de la proposition 2 que $(T-q) I_{\epsilon}(T)$ est sans zéro dans le disque unité (en utilisant la théorie du polygone de Newton [1]). Enfin en utilisant la théorie du polygone de Newton, il est immédiat que $\lambda_{\psi} + 1$ est égal au nombre de zéros de

$$\prod_{\lambda|m, \lambda \text{ premier}} (1 - (1+T)^{-(\log \langle \lambda \rangle / \log(1+mq))})$$

qui se calcule aisément.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Les nombres p -adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection Sup, "Le Mathématicien, 14).
 - [2] BARSKY (Daniel). - Sur la norme de certaines séries d'Iwasawa, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 13, 44 p.
 - [3] GRAS (Georges). - Canonical divisibilities of values of p -adic L -functions, "Journées arithmétiques, 1980" edited by J. V. Armitage, p. 291-299. - Cambridge, London, New York, Cambridge University Press, 1982 (London mathematical Society Lecture Note Series, 56).
 - [4] RIBET (Kenneth A.). - p -adic L -functions attached to characters of p -power order, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des Nombres, 19e année, 1977/78, n° 9, 8 p.
-