

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PIERRE JARRAUD

À propos de G. A. G. R.

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 25, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A16_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

A PROPOS DE G. A. G. R.

par Pierre JARRAUD (*)

Les théorèmes de comparaison entre géométrie algébrique et géométrie analytique établis par SERRE [6] dans le cas d'une variété projective complexe et généralisés par GROTHENDIECK [5] au cas d'un schéma propre sur $\mathbb{C}$ et au cas relatif, restent valables, mutatis mutandis, dans le cas analytique rigide (KÖPF [4]) les techniques du cas complexe se transposant au cas ultramétrique. Cet exposé est un bref résumé, sans démonstration, des principaux résultats de [4] où l'on pourra trouver tous les détails.

1. Hypothèses.

Soit k un corps valué complet ultramétrique (non nécessairement algébrique clos et de caractéristique quelconque).

Soit A une k -algèbre affinoïde.

2. Définitions.

(a) Un espace annelé (en anneaux locaux) est un triplet $(X, \mathcal{C}_X, \mathcal{O}_X)$ où

- X est un espace topologique,
- $\mathcal{C}_X$ est une topologie de Grothendieck sur X ,
- $\mathcal{O}_X$ est un faisceau d'anneaux dont les fibres $\mathcal{O}_{X,x}$ sont des anneaux locaux.

(b) Un morphisme $F : (X, \mathcal{C}_X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{C}_Y, \mathcal{O}_Y)$ d'espaces annelés est la donnée d'un couple $(f, f^\#)$ où $f : X \rightarrow Y$ est une application continue telle que l'image réciproque d'un ouvert (resp. d'un recouvrement ouvert) admissible en est un et où $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ est un morphisme de faisceaux (avec $f^\#_{f(x)} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$).

(c) Un espace annelé $(X, \mathcal{C}_X, \mathcal{O}_X)$ est un

schéma (algébrique) sur A

espace analytique (rigide) sur A

s'il existe un recouvrement admissible $\{X_i\}_{i \in I}$ tel que pour tout $i \in I$ le triplet $(X_i, \mathcal{C}_{X|X_i}, \mathcal{O}_{X|X_i})$ est

le schéma affine associé à une A -algèbre A_i (i. e. : $X_i = \text{Spec } A_i$, avec la

l'espace analytique affinoïde associé à une A -algèbre affinoïde A_i (i. e.

(*) Pierre JARRAUD, 5 avenue Porte de Villiers, 75017 PARIS.

topologie de Zariski et $\mathcal{O}_X|_{X_i}$ le faisceau structural)

X est localement de type fini (en abrégé : loc. t. f.) si pour tout i , A_i est une A -algèbre de type fini.

$X_i = \text{Sp } A_i$, $\mathcal{O}_X|_{X_i}$ sous ensembles admissibles : les rationnels, recouvrements admissibles : les finis et $\mathcal{O}_X|_{X_i}$: le faisceau structural).

(d) Un faisceau $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$ -modules sur un espace annelé X est dit cohérent si $\mathcal{F}$ est de type fini et si pour tout ouvert U admissible, tout entier $n > 0$ et tout homomorphisme $u : \mathcal{O}_X^n \rightarrow \mathcal{F}_U$ le noyau de u est de type fini (pour des traductions concrètes voir [2] p. 111 et [1] p. 108).

3. Existence de X^{an} et premières propriétés.

PROPOSITION. ([4] § 1 et § 2). - Pour tout schéma X loc. t. f. sur A il existe un espace analytique sur A , X^{an} et un morphisme $a : X^{\text{an}} \rightarrow X$ solutions du problème universel : "pour tout Z espace analytique (rigide) sur A et tout morphisme $f : Z \rightarrow X$ il existe un unique morphisme $g : Z \rightarrow X^{\text{an}}$ tel que $f = a \circ g$ ". De plus la construction est fonctorielle : si on a un morphisme $f : X \rightarrow Y$, il existe $f^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$ tel que $a \circ f = f^{\text{an}} \circ a$.

Remarques.

La construction se faisant localement, on étudie d'abord $X = \text{Spec } A_i$, on passe à $\text{Max Spec } A_i$ qu'on recouvre par une union croissante d'affinoïdes (cf. [1] p. 102).

Le cas où X est une variété projective est très simple (surtout si on suppose $A = k$ algébriquement clos).

Soit $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ une variété projective définie par s polynômes homogènes $f_1, \dots, f_s$ de $k[Z_0, \dots, Z_n]$

$$X = \bigcup_{i=0}^n X_i$$

$$\text{où } X_i = \text{Spec } \frac{k[Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i]}{((f_j(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i))_{j=1, \dots, s})}$$

$$\text{alors } X_i \cap X_j =$$

$$\text{Max Spec } \frac{k[Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i, (Z_j/Z_i)^{-1}]}{(f_\ell(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i))_{\ell=1, \dots, s}}$$

$$X^{\text{an}} = \{x \in \mathbb{P}^n ; f_i(x) = 0 \text{ } i = 1, \dots, s\}$$

$$X^{\text{an}} = \bigcup_{i=0}^n X_i'$$

$$X_i' = \text{Sp } \frac{k\langle Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i \rangle}{((f_j(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i))_{j=1, \dots, s})}$$

$$X_i' \cap X_j' = \text{Sp } \frac{k\langle Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i, (Z_j/Z_i)^{-1} \rangle}{(f_\ell(Z_0/Z_i, \dots, Z_n/Z_i))_{\ell=1, \dots, s}}$$

Dans les deux cas l'isomorphisme de recollement $\rho_{ij} : X_i \cap X_j \rightarrow X_j \cap X_i$ est donné par

$$\rho_{ij} \left(\frac{Z_k}{Z_i} \right) = \frac{Z_k}{Z_j} \times \left(\frac{Z_i}{Z_j} \right)^{-1}.$$

Remarque fondamentale. - Si $x \in X$ est un point fermé de X , par passage aux fibres a induit un morphisme d'anneaux locaux $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{X^{an},x}$ qui induit un isomorphisme des complétés (le long des idéaux maximaux).

PROPOSITION. - Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X on peut lui associer un faisceau $\mathcal{F}^{an}$ sur X^{an} qui est cohérent.

(Ou bien on suit [4] § 3 ou bien on pose $\mathcal{F}^{an} = a^* \mathcal{F}$ au sens de EGA 0 (4.3.1) ou de [2] p. 110 et EGA 0 (5.3.11) montre que $\mathcal{F}^{an}$ est cohérent si $\mathcal{F}$ l'est.)

4. Propriété.

Un morphisme $f: X \rightarrow Y$ de schémas est propre s'il est séparé, de type fini et universellement fermé.

Un morphisme d'espaces analytiques rigides est propre s'il l'est au sens de Kiehl [3] § 2.

Remarque. - Un morphisme propre au sens analytique n'est pas forcément propre au sens topologique (contrairement au cas complexe).

PROPOSITION. - Si $f: X \rightarrow Y$ est propre, alors $f^{an}: X^{an} \rightarrow Y^{an}$ est propre.

5. Les théorèmes de comparaison.

Soit X un schéma propre sur A (algèbre affinoïde sur k).

(a) Pour tout faisceau (algébrique) cohérent $\mathcal{F}$ sur X , l'application induite par $a: H^q(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X^{an}, \mathcal{F}^{an})$ est un isomorphisme pour tout entier $q \geq 0$.

(b) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux faisceaux cohérents sur X alors la flèche $f \mapsto f^{an}: \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X^{an}}}(\mathcal{F}^{an}, \mathcal{G}^{an})$ est un isomorphisme.

(c) Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X^{an} , il existe un (unique à isomorphisme près) faisceau $\mathcal{F}$ cohérent sur X tel que $\mathcal{F}^{an} \sim \mathcal{F}$.

Variante relative. - Soient X et Y deux schémas loc. t. f. sur A et $f: X \rightarrow Y$ un morphisme propre, alors pour tout entier $q \geq 0$ et tout $\mathcal{O}_Y$ -module cohérent $\mathcal{F}$ la flèche naturelle

$$(R^q f_* \mathcal{F})^{an} \rightarrow R^q f_*^{an} \mathcal{F}^{an} \text{ est un isomorphisme.}$$

6. Les conséquences.

Elles sont les mêmes que dans le cas complexe.

(a) (Théorème de Chow) : tout sous ensemble analytique (rigide) de l'espace projectif est algébrique.

(b) Si X est un schéma propre sur A on a des équivalences de catégories :

$$\begin{aligned}
 &\{\text{fibrés vectoriels (algébriques) sur } X\} \longrightarrow \{\text{fibrés vectoriels analytiques sur } X^{\text{an}}\} \\
 &\left\{ \begin{array}{l} \text{faisceaux localement libres} \\ \text{(algébriques) sur } X \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{faisceaux localement libres} \\ \text{(analytiques) sur } X^{\text{an}} \end{array} \right\} \\
 &\{\text{modules à connexion sur } X\} \longrightarrow \{\text{modules à connexion sur } X^{\text{an}}\} .
 \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] FRESNEL (Jean) et VAN DER PUT (Marius). - Géométrie analytique rigide et applications. - Boston, Basel, Stuttgart, Birkhäuser, 1981 (Progress in Mathematics, 18).
- [2] HARTSHORNE (Robin). - Algebraic geometry. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Graduate Texts in Mathematics, 52).
- [3] KIEHL (Reinhardt). - Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie, Invent. Math., t. 2, 1967, p. 191-214.
- [4] KÖPF (Ulrich). - Über eigentliche Familien algebraischen Varietäten über affinoiden Räumen, Schriftenreihe des mathematischen Institut der Univ. Münster, 2.Serie, Heft 7, 1974, IV + 72 p.
- [5] RAYNAUD (Michèle). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, SGA 1 ; "Revêtements étales et Groupe fondamental". - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 224).
- [6] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955/56, p. 1-42.
- [EGA] GROTHENDIECK (Alexandre). - Eléments de géométrie algébrique. - Paris, Presses universitaires de France, 1960 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications Mathématiques, 4).

N.-B. - Ajouté en novembre 1984 : une référence en français est maintenant disponible :

FRESNEL (J.). - Géométrie analytique rigide, cours à l'Université de Bordeaux, 1984 (Notes multigraphiées).
