Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Marie-Claude Sarmant-Durix

# Prolongement d'une série entière dont le disque de convergence est fermé

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 11 (1983-1984), exp. nº 22, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A14_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
11e année, 1983/84, n° 22, 15 p.



14 mai 1984

# PROLONGEMENT D'UNE SÉRIE ENTIÈRE DONT LE DISQUE DE CONVERGENCE EST FERMÉ

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)

## 1. Introduction.

Soit $(K , |.|)$ un corps valué ultramétrique complet, algébriquement clos. Nous nous proposons de chercher un prolongement analytique à une série de Taylor $f \in K[[X]]$ convergente dans un disque circonférencié $D(0 , R)$ (problème évoqué notamment par P. ROBBA dans [R] ch. 15).

Rappelons que pour tout ensemble $D$ de $K$ on note $H(D)$ l'ensemble des éléments analytiques sur $D$, c'est-à-dire le complété pour la convergence uniforme sur $D$ de l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle dans $D$.

Nous allons construire un ensemble $D$ admettant un T-filtre décroissant dont la plage est le disque de convergence de $f$, ainsi qu'un élément $\bar{f} \in H(D)$ qui se confond avec $f$ dans son disque de convergence. Nous utiliserons notamment une matrice infinie de Vandermonde et montrerons son inversibilité grâce au T-filtre considéré.

Notations.

$$\forall\ r \in \underset{\sim}{R}^+ \quad D(0 , r^-) = \{x \in K ; |x| < r\}$$

$$D(0 , r) = \{x \in K ; |x| \leqslant r\}$$

$$D(\infty , r^+) = \{x \in K ; |x| > r\}.$$

Soit $\mathcal{B} = (b_i)_{i \in \underset{\sim}{N}^*}$ une T-suite de $D(\infty , r^+)$ [S 1].

$\forall\ \rho \in \underset{\sim}{R}^+$ , on pose

$$\Lambda_\rho(\mathcal{B}) = K \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} D(b_i , \rho^-) .$$

Soit $\mathcal{B}' = (\beta_i)_{i \in \underset{\sim}{N}^*}$ une T-suite de $D(0 , r^-)$ .

$\forall\ \rho \in \underset{\sim}{R}^+$ , on pose

$$\Delta_\rho(\mathcal{B}') = K \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} D(\beta_i , \rho^-) .$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$ une série de Taylor de $K[[X]]$ , on notera [A]

$$v(f , \mu) = \inf_{n \in \underset{\sim}{N}} (v(\lambda_n) + n\mu)$$

---

(*) Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

si $\mu = |x|$ , avec $x$ dans le disque de convergence de $f$ .

Enfin, on notera $\overline{\lim}_{n\to+\infty}(u_n)$ la limite supérieure d'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ , et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n$ sa limite inférieure.

Nous allons donc démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME.

1. - <u>Soit</u> $f$ <u>une série de Taylor à coefficients dans</u> $K$ <u>de disque de convergence</u> $D(0\ ,\ R)$ . <u>Soit</u> $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ <u>une</u> T-<u>suite de</u> $D(\infty\ ,\ R^+)$ . <u>La série</u> $f$ <u>se prolonge en une fonction analytique</u> $\overline{f}$ <u>sur</u> $K \setminus \mathcal{B}$ , <u>dont la restriction</u> $\overline{f}_\rho$ <u>à</u> $\Lambda_\rho(\mathcal{B})$ <u>est un élément analytique</u>.

2. - <u>En outre</u>, $\Lambda\rho(\mathcal{B})$ <u>admet un</u> T-<u>filtre croissant</u> $\mathfrak{F}$ <u>de centre</u> 0 , <u>de diamètre</u> $R$ , <u>et pour tout</u> $\overline{h} \in H(\Lambda_\rho(\mathcal{B}))$ <u>strictement annulé par</u> $\mathfrak{F}$ , $\overline{f} + \overline{h}$ <u>est un autre prolongement de</u> $f$ <u>en un élément de</u> $H(\Lambda_\rho(\mathcal{B}))$ .

## 2. Utilité des matrices infinies.

Nous pouvons facilement nous ramener au cas $R = 1$ . D'autre part, nous savons [S 2], que si $\overline{f}$ est une fonction analytique sur $K \setminus \mathcal{B}$ dont la restriction $\overline{f}_\rho$ à $\Lambda_\rho(\mathcal{B})$ est un élément analytique, alors, quelle que soit la T-suite $\mathcal{C}$ de $D(\infty\ ,\ R^+)$ , il existe une fonction analytique $\overline{g}$ sur $K \setminus \mathcal{C}$ , dont la restriction $\overline{g}_\rho$ à $\Lambda_\rho(\mathcal{C})$ est un élément analytique, et telle que

$$\lim_{\substack{|x|\to R \\ x\in\Lambda_\rho(\mathcal{B})\cap\Lambda_\rho(\mathcal{C})}} \overline{f}_\rho - \overline{g}_\rho = 0 \quad \forall\ \rho \in \mathbb{R}^+ .$$

Il suffit donc de démontrer l'existence de $\overline{f}$ pour une T-suite $\mathcal{B}$ , commode (et le 2 du théorème est évident).

Nous partons donc de $f \in K[[X]]$ , telle que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{avec} \quad a_n \in K\ , \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1 .$$

Nous cherchons $\overline{f}$ sous la forme donnée par le théorème de Mittag-Löffler

$$\overline{f} = \sum_{i\geq 1} \frac{\epsilon_i}{1 - (x/b_i)}$$

où $\mathcal{B} = (b_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une T-suite de $D(\infty\ ,\ 1^+)$ qu'on choisit idempotente et telle que

$$|b_i| > |b_{i+1}| \quad \forall\ i \in \mathbb{N}^*$$

pour plus de commodité, et où $(\varepsilon_i)_{i\in\underset{\sim}{N}^*}$ est un suite de K , tendant vers 0 quand i devient infini.

Nous voudrions que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{i\geq 1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_i}{1 - (x/b_i)} \quad \forall\, x \in D(0\ ,\ 1^-)$$

ce qui est équivalent à

$$a_n = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i \times (1/b_i^n) \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^*$$

ou encore, en posant $b_i = (1/\beta_i)$ (et alors $(\beta_i)$ est une T-suite idempotente de $D(0\ ,\ 1^-)$ , telle que $|\beta_i| < |\beta_{i+1}|$ )

$$a_n = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i\, \beta_i^n \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Nous voyons donc s'introduire naturellement des matrices infinies [J] , soit, en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \dots \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_i & \dots \\ \vdots & & & & \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \dots & \beta_i^n & \dots \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

le système d'égalités que nous cherchons à satisfaire est identique à l'équation matricielle

$$A = B.E\ .$$

Pour résoudre ce système, c'est-à-dire pour obtenir E connaissant A et B , il suffit donc en principe d'inverser B , c'est-à-dire de trouver une matrice B' telle que

$$BB' = B'\,B = I$$

$$B[B'\,A] = [BB']\,A = A$$

ce qui entraîne

$$B'\,A = E\ .$$

Nous allons donc, après avoir rappelé les propriétés utiles des matrices infinies, chercher B' telle que BB' = B' B = I pour B matrice de Vandermonde donnée, puis montrer qu'il existe une matrice de Vandermonde B telle que

$$B[B'\,A] = [BB']\,A\ ,$$

la matrice colonne E = B' A ayant son terme général $\varepsilon_i$ qui tend vers 0 lorsque i devient infini.

## 3. Rappels sur les matrices infinies.

Définition 3.1. – Nous appellerons matrice infinie une famille $A=((a_{i,j}))_{i\in\mathbb{N}^*, j\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $K$, que nous noterons

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} ; & \cdots ; & a_{1,j} ; & \cdots \\ a_{2,1} ; & \cdots ; & a_{i,j} ; & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{i,1} ; & \cdots ; & a_{i,j} ; & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} .$$

De même, nous appellerons ligne infinie (resp. colonne infinie) une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $K$ notée

$$U = (u_1 , u_2 , \ldots , u_n , \ldots)$$

(resp. une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $K$ notée

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

On voit que le produit matriciel

$$U\ V = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ v_n$$

existe si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\ v_n = 0 .$$

De même, le produit matriciel $A\ V$ existe et est égal à la colonne infinie

$$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{\infty} a_{1,j}\ v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\ v_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

si et seulement si

$$\lim_{j\to+\infty} a_{i,j}\ v_j = 0 \quad \forall\ j \in \mathbb{N}^* .$$

Le produit matriciel $U\ A$ existe et est égal à la ligne infinie

$$(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\ a_{i,1} , \ldots , \sum_{i=1}^{\infty} u_i\ a_{i,j} , \ldots)$$

si et seulement si

$$\lim_{i\to\infty} (u_i\, a_{i,j}) = 0 \quad \forall\, j \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Si $B = ((b_{i,j}))_{i\in \underset{\sim}{N}^*,\, j\in \underset{\sim}{N}^*}$ est une autre matrice infinie, le produit matriciel $AB$ existe et est égal à la matrice infinie

$$((\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j}\, b_{j,k}))_{i\in \underset{\sim}{N}^*,\, k\in \underset{\sim}{N}^*}$$

si et seulement si, pour tous $i$ et $k$ fixés, on a

$$\lim_{j\to\infty} a_{i,j}\, b_{j,k} = 0 .$$

Définition 3.2. -

(i) Nous dirons qu'une ligne infinie (resp. une colonne infinie) $(u_n)_{n\in \underset{\sim}{N}^*}$ est évanescente si $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ .

(ii) Nous dirons qu'une matrice infinie $A = ((a_{i,j}))_{i\in \underset{\sim}{N}^*,\, j\in \underset{\sim}{N}^*}$ est évanescente en ligne (resp. en colonne) si chacune de ses lignes infinies (resp. de ses colonnes infinies) est évanescente.

(iii) Nous dirons que $A$ est globalement évanescente si

$$\forall\, \varepsilon > 0 , \quad \exists\, N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad i + j \geqslant N(\varepsilon) \Longrightarrow |a_{i,j}| \leqslant \varepsilon .$$

Le lemme 3.1 est immédiat en analyse ultramétrique

LEMME 3.1. - Soit $A = ((a_{i,j}))_{i\in \underset{\sim}{N}^*,\, j\in \underset{\sim}{N}^*}$ une matrice infinie globalement évanescente. Alors la famille $(a_{i,j})$ est sommable suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\underset{\sim}{N}^* \times \underset{\sim}{N}^*$ .

COROLLAIRE. - Si une matrice infinie $A = ((a_{i,j}))$ est évanescente, alors les séries $\sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j})$ et $\sum_{j=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j})$ convergent et ont même somme.

Remarques.

1. - Le produit de matrices infinies n'est pas associatif ; nous aurons besoin de ce lemme pour montrer ici que $B(B'A) = (BB')A$ .

2. - Nos notations utilisent l'indice 0 pour les éléments des colonnes, ce qui ne change rien à la théorie.

## 4. Inverse d'une matrice infinie de Vandermonde.

LEMME 4.1. - Soit $(\beta_i)_{i\in \underset{\sim}{N}^*}$ une T-suite idempotente de valeur absolue strictement croissante de $C(0 , 1^{-})$ .

Soit $B$ la matrice infinie correspondante

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_i & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \beta_1^n & \beta_2^n & \cdots & \beta_i^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

<u>Supposons qu'il existe une série</u> $\varphi(x) \in K[[X]]$ <u>dont les seuls zéros soient les</u> $\beta_i$ . <u>Posons</u>

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - (x/\beta_i)}$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{i,n}\, x^n .$$

<u>Alors la matrice infinie</u> $B' = ((\lambda_{i,n}))_{i \in \underset{\sim}{N}^*,\, n \in \underset{\sim}{N}^*}$ <u>vérifie</u> : $BB' = B'B = I$ .

<u>Démonstration</u>

(a) $B'B = I$ .

L'élément courant d'indices $(i , k)$ de $B'B$ , obtenu en multipliant la ligne d'ordre $i$ par la colonne d'ordre $k$ , est égal à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n}\, \beta_k^n = \varphi_i(\beta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

(b) $BB' = I$ .

L'élément courant d'indices $(i , k)$ de $BB'$ est égal à

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n\, \lambda_{i,k} .$$

C'est là le coefficient de $x^k$ dans le développement en série de

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n\, \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_{i,k}\, x^k\right) .$$

Or $(\beta_i)$ étant une T-suite idempotente, on sait que [R]

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{\substack{|x|\to 1 \\ x \in \Delta_\rho}} \varphi(x) = +\infty \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{\varphi(x)} \in H(\Delta_\rho) \end{array}\right\} \forall\, \rho \in \underset{\sim}{R}^+ .$$

Donc $(x^n/\varphi(x)) \in H(\Delta_\rho)$ $\forall\, \rho \in \underset{\sim}{R}^+$ , et $(x^n/\varphi(x))$ admet un développement de

Mittag-Löffler dans $\Delta_\rho$ , de la forme

$$\frac{x^n}{\varphi(x)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \left[\frac{1-(x/\beta_i)}{\varphi(x)}\right]_{x=\beta_i} \frac{1}{1-(x/\beta_i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta_i^n}{\psi_i(\beta_i)} \frac{1}{1-(x/\beta_i)}$$

$$x^n = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\beta_i^n}{\psi_i(\beta_i)} \frac{\varphi(x)}{1-(x/\beta_i)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \varphi_i(x) .$$

Le coefficient de $x^k$ dans le développement en série entière de $\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^n \varphi_i(x)$ est donc

$$1 \text{ si } k = n \text{ et } 0 \text{ si } k \neq n .$$

Remarques. - Nous n'avons pas utilisé dans le (a) le fait que $(\beta_i)$ est une T-suite ; $B'$ existe et $B' B = I$ , du moment que $\varphi$ existe.

Au lieu de prendre

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} ,$$

on peut prendre

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} + \Lambda_i(x) \varphi(x)$$

où $\Lambda_i(x)$ est une série de Taylor convergente sur $C(0 , 1^-)$ telle que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\Lambda_i(x)}{1 - x \beta_i} = 0 \quad \forall x \text{ tel que } |x| < 1 .$$

La matrice $B$ a donc une infinité d'inverses ; toutefois, nous n'avons besoin ici que de la forme indiquée dans le lemme 4.1.

## 5. Existence d'une suite $(\beta_i)$ telle que $B' A$ existe et $B(B' A) = A$ .

Nous aurons besoin de deux lemmes préparatoires au lemme 5.3.

LEMME 5.1. - *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $K$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1 .$$

*Il existe une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $K$ telle que*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |\lambda_n|^{1/n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = + \infty$$

$$\left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right| < \left|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}}\right| \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n\, a_n = 0 \;.$$

Ce lemme est équivalent au lemme 5.1 (bis) obtenu en posant $u_n = v(a_n)$ et $v_n = v(\lambda_n)$..

LEMME 5.1 (bis). - <u>Soit</u> $(u_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>une suite de réels telle que</u>

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0 \;.$$

<u>Il existe une suite</u> $(v_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ <u>de réels telle que</u>

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n = -\infty$$

$$v_{n+1} - v_{n+2} < v_n - v_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n + u_n = +\infty \;.$$

<u>Démonstration</u>. - Soit $(u_{q_n})_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite extraite de $(u_n)$ définie par

$$u_{q_n} = \inf\{u_i \;;\; i > q_{n-1}\}$$

$(u_{q_n})_{n\in \underset{\sim}{N}}$ est une suite croissante.

$$\lim_{q_n\to+\infty} u_{q_n} = +\infty$$

$$\underline{\lim}_{q_n\to+\infty} \frac{u_{q_n}}{q_n} = 0 \;.$$

Nous pouvons encore extraire de la suite $(u_{q_n})$ une suite $(u_{q_{n_t}})$ telle que

$$\lim_{t\to+\infty} u_{q_{n_t}} = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u_{q_{n_t}}}{q_{n_t}} = 0 \;.$$

A partir d'un certain $q_{n_t}$ , la suite de terme général

$$\frac{u_{q_{n_{t+1}}} - u_{q_{n_t}}}{q_{n_{t+1}} - q_{n_t}}$$

sera alors strictement décroissante et tendra vers $0$ .

Pour résumer, disons qu'on peut extraire de la suite $(u_n)$ une suite $(u_{r_n})$ croissante telle que

$$\lim_{r_n \to +\infty} u_{r_n} = + \infty$$

$$\lim_{r_n \to +\infty} \frac{u_{r_n}}{r_n} = 0$$

$\left(\frac{u_{r_{n+1}} - u_{r_n}}{r_{n+1} - r_n}\right)_{n \in \underset{\sim}{N}}$ strictement décroissante, de limite nulle.

Posons alors

$$\varphi(t) = u_{r_n} + (t - r_n)\left(\frac{u_{r_{n+1}} - u_{r_n}}{r_{n+1} - r_n}\right) \quad \text{pour} \quad r_n \leqslant t \leqslant r_{n+1} \ .$$

C'est une fonction affine par morceaux et concave, et $\forall\, m \in \underset{\sim}{N}$ , $\varphi(m) \leqslant u_m$ .

Etudions la série

$$g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \mu_m\, x^m \quad \text{où} \quad v(\mu_m) = - \frac{\varphi(m)}{2} \ .$$

Elle est de rayon de convergence $1$ , et

$$\lim_{m \to +\infty} v(\mu_n) = - \infty \ .$$

Si le polygône de Newton de $g(x)$ n'a pas tous ses côtés de projection $1$ sur l'axe des abscisses, il est facile de trouver une série $h(x)$ dont le polygône a tous ses côtés de projection $1$ sur l'axe des abscisses, et une infinité de sommets communs avec celui de $g$ , et qui se trouve au dessus de celui de $g$ .

Posons

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_n\, x^n \quad \text{et} \quad v(\nu_n) = v_n \ .$$

Alors

$$v_{n+1} - v_{n+2} < v_n - v_{n+1} \ ,$$

puisque les côtés du polygône de $h$ sont de projection unité.

De plus

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = + \infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n} = 0 \ .$$

Enfin

$$v_n + \mu_n \geqslant - \frac{\varphi(n)}{2} + \varphi(n) = \frac{u_n}{2} .$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n + u_n = + \infty .$$

LEMME 5.2. - Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$ une série de Taylor convergente dans un disque $D(0 , R^-)$ . L'ensemble des zéros de $f$ est une suite de zéros simples $(\beta_n)$ tels que $|\beta_n| < |\beta_{n+1}|$ $(\forall n \in \underset{\sim}{N}^*)$ si et seulement si

$$|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}| > |\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}| \quad \text{pour tout} \quad n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

On a alors

$$|\beta_n| = |\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}| \quad \forall n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Preuve. - La suite $(\beta_n)$ est une suite de zéros simples telle que $|\beta_n| < |\beta_{n+1}|$ si et seulement si les côtés du polygône de Newton de $f$ sont de projection unité sur l'axe des abscisses. La pente d'un de ces côtés est alors ;

$$v(\lambda_{n+1}) - v(\lambda_n) = v(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n})$$

et la suite des pentes doit être strictement croissante. D'autre part

$$|\beta_n| = |\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}|$$

car

$$v(\beta_n) = - v(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}})$$

( $\beta_n$ correspondant au côté qui joint les points $(n - 1 , v(\lambda_{n-1}))$ et $(n, v(\lambda_n))$ .

LEMME 5.3. - Soit $(\lambda_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ une suite de $K$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = + \infty$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} |\lambda_n|^{1/n} = 1$$

$$|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}| < |\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}}| \quad \forall n \in \underset{\sim}{N} .$$

(a) Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n .$$

Alors les zéros de $\varphi(x)$ sont simples et forment une T-suite idempotente $(\beta_n)$

telle que

$$|\beta_n| = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right| .$$

Pour tout $i \in \underset{\sim}{N}^*$ , posons ;

$$\psi_i(x) = \frac{\dot{\psi}(x)}{1 - (x/\beta_i)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} \, x^n .$$

Alors la suite $(\alpha_{i,n})_{n\in \underset{\sim}{N}}$ vérifie encore

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha_{i,n}| = + \infty$$

$$|\alpha_{i,n}| > |\alpha_{i,n-1}| \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

En outre

$$|\alpha_{i,n}| \leqslant |\lambda_n| \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}$$

et

$$|\psi_i(\beta_i)| = |\lambda_i| \; |\beta_i|^i \quad \forall\, i \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Preuve

(a) On sait grâce au corollaire du lemme que les zéros de $\varphi$ sont simples et forment une suite $(\beta_n)$ telle que

$$|\beta_n| = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right| \quad \forall\, n \in \underset{\sim}{N}^* .$$

Puisque

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = + \infty$$

on sait que

$$\lim_{\mu\to 0+} v(\varphi \, , \, \mu) = - \infty$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} |\lambda_n| \; |\beta_n|^n = + \infty$$

car

$$v(\varphi \, , \, v(\beta_n)) = v(\lambda_n) + nv(\beta_n) .$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{|\beta_n|^n}{|\beta_1| \, , \, \dots \, , \, |\beta_n|}\right| = + \infty .$$

(b) Les zéros de $\psi_i$ sont ceux de $\psi$ à l'exception de $\beta_i$ , et donc on a réciproquement

$$|\alpha_{i,n}| > |\alpha_{i,n-1}| .$$

D'autre part, on déduit par identification de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = (1 - \frac{x}{\beta_i}) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{i,n} x^n$$

que

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{\beta_i^n} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu \beta_i^\nu = - \frac{1}{\beta_i^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \beta_i^\nu .$$

D'où

$$|\alpha_{i,n}| \leqslant \sup_{\nu\geqslant n+1} |\lambda_\nu| \, |\beta_i|^{\nu-n} < |\lambda_n| .$$

Enfin, puisque $\psi_i$ n'a pas de zéros sur $C(0 , |\beta_i|)$

$$v(\psi_i(\beta_i)) = v(\psi_i , v(\beta_i)| = v(\alpha_{i,i-1}) + (i - 1) v(\beta_i) .$$

Or

$$\alpha_{i,i-1} = \frac{1}{\beta_i^{i-1}} \sum_{\nu=0}^{i-1} \lambda_\nu \beta_i^\nu$$

entraîne

$$v(\alpha_{i,i-1}) = v(\lambda_{i-1}) .$$

Donc

$$v(\psi_i(\beta_i)) = v(\lambda_{i-1}) + (i - 1) v(\beta_i) = v(\lambda_i) + i v(\beta_i)$$

$$|\psi_i(\beta_i)| = |\lambda_i| \, |\beta_i|^i$$

LEMME 5.4. - Soit $f \in K[[X]]$ une série convergente dans le disque fermé $D(0,1)$ qu'on note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

La suite $(a_n)$ vérifie alors les hypothèses du lemme 5.1, et il existe donc une suite $(\lambda_n)$ qui en vérifie les conclusions. Posons

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n .$$

Soit $(\beta_i)$ la suite des zéros de $\varphi$ , et soient

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{1 - (x/\beta_i)}$$

$$\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\psi_i(\beta_i)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} x^n .$$

Alors

(i) <u>la matrice</u> $B' = ((\lambda_{i,n}))$ <u>est évanescente en colonne</u> ;

(ii) <u>la matrice colonne</u> $B'\,A$ , <u>où</u> $A$ <u>est la matrice colonne des</u> $(a_n)$ , <u>existe et est évanescente</u> ;

(iii) $B$ <u>étant la matrice de Vandermonde des</u> $(\beta_i)$ , $B(B'\,A) = A$ .

<u>Preuve.</u>

(i) En utilisant les notations du lemme, on voit que

$$|\lambda_{i,n}| = \frac{|\alpha_{i,n}|}{|\psi_i(\beta_i)|} < \frac{|\lambda_n|}{|\lambda_i|\;|\beta_i|^i} .$$

Et comme

$$\lim_{i\to+\infty} |\lambda_i|\;|\beta_i|^i = +\infty .$$

Alors

$$\lim_{i\to+\infty} |\lambda_{i,n}| = 0 \quad \text{à } n \text{ constant.}$$

(ii) Le terme général de la matrice colonne $B'\,A$ est

$$\epsilon_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n}\, a_n$$

Or

$$|\lambda_{i,n}\, a_n| < \frac{|\lambda_n\, a_n|}{|\psi_i(\beta_i)|} .$$

Comme, d'après le choix des $\lambda_n$ (lemme 5.1),

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n\, a_n = 0$$

on voit que $\epsilon_i$ existe.

D'autre part

$$\lim_{i\to+\infty} |\epsilon_i| < \lim_{i\to+\infty} \frac{1}{|\psi_i(\beta_i)|} \times \sup_{n\in\underset{\sim}{N}} |\lambda_n\, a_n|$$

et comme

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{1}{|\psi_i(\beta_i)|} = 0 .$$

$$\lim_{i\to+\infty} |\epsilon_i| = 0 .$$

(iii) Pour montrer que $B(B'\,A) = (BB')\,A = A$ , il suffit de montrer que pour chaque ligne de $B$ ;

$$U_k = (\beta_1^k , \ldots , \beta_i^k , \ldots)$$

on a bien

$$U_k(B' A) = (U_k B') A$$

$$U_k(B' A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k \epsilon_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k (\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_{i,n} a_n)$$

$$(U_k B') A = \sum_{n=0}^{+\infty} ( \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^k \lambda_{i,n}) a_n .$$

D'après le corollaire du lemme, il suffit de montrer que

$$\lim_{i+n\to+\infty} \beta_i^k \lambda_{i,n} a_n = 0$$

$$|\beta_i^k \lambda_{i,n} a_n| < \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i| |\beta_i|^i} |\beta_i|^k$$

$$|\beta_i^k \lambda_{i,n} a_n| < \frac{|\lambda_n a_n|}{|\lambda_i| |\beta_i|^i} .$$

Soit

$$M = \sup_{n\in \underset{\sim}{N}} |\lambda_n a_n|$$

$$m = \inf_{n\in \underset{\sim}{N}^*} |\lambda_i| |\beta_i|^i .$$

Soit $\epsilon > 0$ ; il existe

$P \in \underset{\sim}{N}$ tel que $n \geqslant P$ entraîne $|\lambda_n a_n| \leqslant \epsilon m$

$Q \in \underset{\sim}{N}$ tel que $i \geqslant Q$ entraîne $|\lambda_i \beta_i| \geqslant \frac{M}{\epsilon}$

d'où

$$i + n \geqslant P + Q \quad \text{entraîne :} \begin{cases} \text{ou} \quad n \geqslant P : \left|\frac{\lambda_n a_n}{\lambda_i \beta_i^i}\right| \leqslant \frac{\epsilon m}{m} \\ \\ \text{ou} \quad i \geqslant Q : \left|\frac{\lambda_n a_n}{\lambda_i \beta_i^i}\right| < \frac{\epsilon M}{M} \end{cases} .$$

## 6. Récapitulation.

Nous partons d'une série $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, convergente sur $D(0 , 1)$. Nous constatons alors l'existence d'une suite $(\lambda_n)_{n\in \underset{\sim}{N}}$ de $K$ qui vérifie les hypothèses du lemme 5.1, puis d'une T-suite idempotente $(\beta_i)_{i\in I}$ de $D(0 , 1^-)$, constituée des zéros de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n x^n$.

Nous pouvons alors vérifier grâce au lemme 4.1 que la matrice de Vandermonde $B$ associée à la suite $(\beta_i)$ est inversible et a un inverse $B'$, puis grâce au lemme 5.4, l'existence d'une matrice évanescente $E = B' A$, telle que $A = BE$.

L'équation matricielle du 2 est donc vérifiée.

Si on appelle $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ la suite des éléments de $E$ , on a bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{i \geqslant 1} \frac{\epsilon_i}{1 - \beta_i x} \quad \forall x \in D(0 , 1^-) .$$

En revenant à $b_i = \frac{1}{\beta_i}$ , on voit que $f$ est bien prolongée par $\bar{f}$ , élément analytique sur chaque $\Lambda_\rho$ .

BIBLIOGRAPHIE

[A] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques, préface de Ch. Pisot. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).

[J] JÄRVINEN (Richard D.). - Finite and infinite dimensional linear spaces. - New York, Basel, M. Dekker, 1981 (Pure and applied Mathematics. Dekker, 66).

[R] ROBBA (Philippe). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 109-216.

[S 1] SARMANT-DURIX (Marie-Claide). - Décomposition en produit de facteurs de fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, 1981, série 1, p. 127-130.

[S 2] SARMANT-DURIX (Marie-Claude). - Propriétés algébriques des produits infinis, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 10e année, 1982/83, n° 11, 14 p.