Yvette Feneyrol-Perrin

Fonctions analytiques sur les corps valués de rang supérieur a 1

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 3 (1981-1982), exp. nº J7, p. J1-J3

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_3_A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, fasc. 3, n° J7, 3 p.
Journée d'Analyse p-adique
[1982. Marseille-Luminy]

septembre 1982

FONCTIONS ANALYTIQUES SUR LES CORPS VALUÉS DE RANG SUPÉRIEUR À 1

par Yvette FENEYROL-PERRIN (*)
[Université de Clermont-Ferrand-II]

L'analyse ultramétrique "classique" se fait sur des corps valués dont le groupe des valeurs totalement ordonné est archimédien. Or il existe des corps valués plus généraux, dits corps hypervalués ou corps valués de Krull, dont le groupe des valeurs est un groupe totalement ordonné quelconque. Ces corps peuvent être munis, par l'intermédiaire de leur valuation, d'une structure uniforme, et l'on peut donc y envisager une analyse. C'est l'objet de notre conférence. Pour que cette analyse ne soit ni triviale ni une simple généralisation de l'analyse ultramétrique classique, il faut que la charpente du groupe des valeurs (quotient de ce groupe par la relation d'équivalence associée au préordre de comparabilité) ait une suite cofinale dénombrable.

Nous nous plaçons dans cette hypothèse.

Ces corps hypervalués représentent une notion très concrète puisqu'elle s'applique par exemple aux corps engendrés par une famille dénombrable de fonctions de $\underset{\sim}{R}$ dans $\underset{\sim}{R}$, deux quelconques d'entre elles ayant des ordres de croissance différents (quand $x \to +\infty$), l'hypervaluation représentant en quelque sorte l'ordre de croissance des fonctions de ce corps.

Nous nous proposons de construire une théorie des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables à partir d'éléments analytiques tels que Marc KRASNER les a définis en analyse ultramétrique classique.

Nous supposons que le corps hypervalué K est complet et algébriquement clos (tout corps hypervalué possède une extension complète et algébriquement close de même rang).

Une partie D de K^n est appelée ensemble analytique si elle vérifie la propriété suivante : toute limite uniforme sur D de suites de fractions rationnelles qui s'annule sur un ouvert contenu dans D s'annule sur D tout entier.

D étant un ensemble analytique, une fonction $f : D \to K$ est appelée élément analytique si f est limite uniforme sur D d'une suite de fractions rationnelles sans pôle dans D.

Si l'intersection de deux ensembles analytiques est encore un ensemble analytique,

(*) Yvette FENEYROL-PERRIN, UER de Mathématiques pures, Université de Clermont-Ferrand-II, Complexe scientifique des Cézeaux, B. P. 45, 63170 AUBIÈRE.

il est possible de définir une prolongement analytique non trivial dont "les briques" sont les éléments analytiques.

Dans notre cas, nous montrons que tout ouvert de K^n est un ensemble analytique. Ceci nous permet donc de définir un prolongement analytique au moyen d'éléments analytiques sur des ouverts, et nous conduit à la notion de fonction analytique : une fonction $f : D \longrightarrow K^n$ est une fonction analytique s'il existe une famille enchaînée d'ouverts $(\theta_i)_i$ dont la réunion est D, et telle que la restriction de f à chaque θ_i soit un élément analytique sur θ_i.

Ce prolongement analytique ainsi défini conduit en fait à des fonctions globalement uniformes. Ceci nous amène à étudier le domaine d'existence d'une fonction analytique c'est-à-dire l'ouvert maximal sur lequel une telle fonction peut être prolongée. Si le corps K est fortement valué, c'est-à-dire si son corps résiduel est non dénombrable, ou si la charpente du groupe des valeurs a une partie cofinale non dénombrable, le domaine d'existence d'une fonction analytique d'une variable est un ouvert dense. Dans tous les cas, il est de la forme $K \setminus \bar{P}$, où P est une partie au plus dénombrable de K.

Une fonction analytique sur un ouvert D de K^n n'est, en général, nulle part localement développable en série de Taylor. Nous avons démontré qu'elle admet cependant des dérivées partielles de tous ordres, et que ces dérivées sont des fonctions analytiques sur D.

L'analyticité des fonctions est également conservée par les opérations rationnelles, ainsi que par la substitution.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - Algèbre d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Indagationes Mathematicae, Amsterdam, t. 36, 1974, p. 339-351.

[2] FENEYROL—PERRIN (Y.). - Fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables sur certains corps valués au sens de Krull , Thèse de Doctorat d'Etat, Université Paris-VI, 1980.

[3] FENEYROL-PERRIN (Y.). - Fonctions analytiques dans les corps valués de rang supérieur à un, Compositio Math. (à paraître).

[4] HOBEIKA (R.). - Séries de Taylor, séries de Laurent dans certains corps valués au sens de Krull, Thèse 3e cycle, Université Paris-VI, 1976.

[5] KRASNER (M.). - Rapport sur le prolongement analytique dans les corps valués complets par la méthode des éléments analytiques quasi connexes, Table ronde d'Analyse non archimédienne [1972. Paris], p. 131-254, Bull. Soc. math. France Mémoire 39-40, 1974.

[6] LAZARD (M.). - Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1963 (Institut des hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 14, p. 47-76).

[7] MOTZKIN (E.) et ROBBA (P.). - Ensemble d'analyticité en analyse p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, série A, 1969, p. 450-453.

[8] RIBENBOIM (P.). - Théorie des valuations. - Les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (Séminaire de Mathématiques supérieures, 9).

[9] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétrique", Astérisque n° 10, 1973, p. 109-220.

[10] ROBBA (P.). - Prolongement analytique pour les fonctions de plusieurs variables sur un corps valué complet, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 193-217.