

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ROGER APÉRY

Sur certaines séries entières arithmétiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 16, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A9_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR CERTAINES SÉRIES ENTIÈRES ARITHMÉTIQUES

par Roger APÉRY (*)

[Université de Caen]

r étant un entier > 0 fixé, on considère le monoïde additif constitué par les r -uples (n_1, n_2, \dots, n_r) ; en particulier, on pose $(n, n, \dots, n) = \hat{n}$; on identifie 0 et 0 .

Les r -uples sont munis de la relation d'ordre (partielle)

$$(n_1, n_2, \dots, n_r) \leq (n'_1, n'_2, \dots, n'_r) \iff \forall i, n_i \leq n'_i.$$

Si $n = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, on appelle monôme, et on note x^n , le produit $\prod_i x_i^{n_i}$. Si $r > 1$, x^n n'est pas un monôme et ne doit pas être confondu avec $x^{\hat{n}} = x_1 x_2 \dots x_r$. Les monômes en x munis de la multiplication constituent un monoïde M_x . Les sommes formelles de monômes constituent l'anneau $\mathbb{Z}[[x]]$ des séries formelles à r indéterminées x_1, x_2, \dots, x_r à coefficients entiers. Nous appelons fonction (en toute rigueur "germe" de fonction) tout élément de $\mathbb{Z}[[x]]$ qui converge dans une partie ouverte de \mathbb{C}^r contenant l'origine.

Toute surjection ϕ de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dans l'ensemble $\{y_1 \dots y_s\}$ définit un morphisme injectif de M_y dans M_x qui associe à chaque y_j le produit des images réciproques de y_j par ϕ ; ce morphisme se prolonge en une application linéaire $\tilde{\phi}$ injective de $\mathbb{Z}[[y]]$ dans $\mathbb{Z}[[x]]$. On définit également la contraction ϕ qui est l'application linéaire surjective de $\mathbb{Z}[[x]]$ dans $\mathbb{Z}[[y]]$ qui associe x^n à chaque monôme $\tilde{\phi}(x^n)$ et 0 à chaque monôme qui n'appartient pas à l'image de $\mathbb{Z}[[y]]$ par $\tilde{\phi}$. En particulier, la contraction globale applique $\mathbb{Z}[[x]]$ dans l'anneau des séries formelles à une indéterminée. Le produit d'Hadamard $F(t) * g(t)$ est le contracté du produit, $f(x) \cdot g(y)$.

On appelle fonction de base toute fonction $F(x)$ égale à 1 à l'origine telle que $1/F(x)$ soit un polynôme du premier degré par rapport à chaque indéterminée séparément.

Pour un nombre premier p arbitraire, on appelle p -composantes du r -uple n les r -uples $n_k < \widehat{p-1}$ tels que

$$n = n_0 + pn_1 + \dots + p^k n_k + \dots$$

(*) Texte reçu le 4 octobre 1982.

Roger APÉRY, 552 rue d'Epron, LEBISEY, 14200 HÉROUVILLE SAINT CLAIR.

Nous dirons qu'une série à r indéterminées $\sum a_n x^n$ satisfait à la condition Γ si

$$a_0 = 1 ,$$

$$a_n \equiv \prod_{k \geq 0} a_{n_k} \pmod{p} ,$$

où les n_k sont les p -composantes de n .

La condition (Γ) exprime que

$$f(x) \equiv [P(x)]^{1/(1-p)} \pmod{p} ,$$

où $P(x)$ est un polynôme égal à 1 à l'origine et de degré $\leq p - 1$; en effet,

$$f(x^p) \equiv [f(x)]^p \pmod{p} ,$$

et la condition Γ exprime que

$$f(x) \equiv P(x) f(x^p) \pmod{p} ;$$

les deux facteurs du second membre ont respectivement tous les monômes de degré $\leq p - 1$ et tous les termes de degré multiples de p .

La condition Γ est vérifiée pour les fonctions de base et se conserve par contraction.

Par la contraction $(x_1, x_2) \rightarrow t$ de la fonction de base à deux indéterminées $1/(1 - ax_1 - bx_2 + cx_1 x_2)$, on obtient $1/\sqrt{(1 + ct)^2 - 4abt}$.

On voit déjà dans ce cas que deux fonctions de base distinctes peuvent avoir même contractée.

La fonction $F_2 = 1 + 3t + 19t^2 + 147t^3 \dots$, liée à l'approximation de $\zeta(2)$, s'obtient par contraction globale d'une fonction de base à trois indéterminées par exemple

$$\frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_2 x_3 - x_3 x_1 + x_1 x_2 + x_1 x_2 x_3} \text{ ou } \frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3} .$$

La fonction $1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + \dots$, liée à l'approximation de $\zeta(3)$, s'obtient par contraction globale d'une fonction de base à quatre indéterminées.

La contractée globale de $1/(1 - x_1 - x_2 - x_3 + 4x_1 x_2 x_3)$ a comme coefficients la somme des cubes des coefficients binomiaux.
