

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVETTE AMICE

Prolongement analytique des sommes de Gauss, I

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 13, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A7_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES SOMMES DE GAUSS, I

par Yvette AMICE (*)

(Université Paris-7)

Introduction. - Soit χ un caractère de Dirichlet modulo f , et θ un caractère (additif) de $\underline{\mathbb{Z}}$ d'ordre f , nous noterons

$$(1) \quad g(\chi, \theta) = \frac{1}{f} \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) \theta(a) = G(\chi, \theta)/f.$$

La somme de Gauss ainsi définie est aussi, pour toute période N commune à χ et θ :

$$g(\chi, \theta) = \frac{1}{N} \sum_{a=0}^{N-1} \chi(a) \theta(a).$$

Soit p un nombre premier, m premier à p , et χ un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^e$, $e \geq 1$. On sait que χ admet un unique prolongement continu (localement constant) à l'anneau

$$\underline{\mathbb{Z}}_p(m) = \varprojlim_k (\underline{\mathbb{Z}}/mp^k \underline{\mathbb{Z}}) \simeq (\underline{\mathbb{Z}}/m\underline{\mathbb{Z}}) \times \underline{\mathbb{Z}}_p,$$

dont la restriction au groupe $U_p(m)$ des unités de $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$ est un caractère continu de ce groupe, et qui est nul sur $\underline{\mathbb{Z}}_p(m) \setminus U_p(m)$.

De même, si θ est un caractère additif de $\underline{\mathbb{Z}}$ d'ordre $f = mp^e$, il admet un unique prolongement continu en un caractère du groupe additif de $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$.

Notations-conventions. - Soit $\underline{\mathbb{C}}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\underline{\mathbb{Q}}_p$: on fixe une fois pour toutes un **plongement du corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques** dans $\underline{\mathbb{C}}_p$.

Soit G un groupe topologique abélien, on note $\hat{G} = \text{Hom cont}(G, \underline{\mathbb{C}}_p^*)$ le groupe topologique de ses morphismes continus dans $\underline{\mathbb{C}}_p^*$, c'est-à-dire le groupe des caractères p -adiques de G . Lorsque G est compact, \hat{G} est muni de la métrique de la convergence uniforme sur G .

On convient de dire que χ est un caractère de Dirichlet modulo f , s'il est de période f et si $\chi(n) = 0 \iff (n, f) \neq 1$. Si χ et χ' sont deux caractères de Dirichlet modulo f , leur produit $\chi\chi'$ est, par convention, encore un caractère

(*) Texte reçu le 4 octobre 1982.

Yvette AMICE, UER Mathématiques, Université Paris-7, Tour 45-55, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

modulo f (et non le caractère primitif associé). En particulier le produit de χ et de son inverse $\bar{\chi}$ est le caractère unité modulo f .

Avec ces conventions, le sous-groupe $\hat{U}_p(m)_{\text{tors}}$ des éléments de torsion de $\hat{U}_p(m)$ est constitué des prolongements continus à $U_p(m)$ des caractères de Dirichlet modulo mp^e pour $e \geq 1$.

De même, $\hat{Z}_p(m)_{\text{tors}}$ est constitué des prolongements à $Z_p(m)$ des caractères θ de Z dont l'ordre divise mp^h pour h assez grand.

Comme $\hat{Z}_p(m)$ et $\hat{U}_p(m)$ ont les structures naturelles d'espaces analytiques (cf. § 2), il est raisonnable d'essayer de prolonger la définition (1) des sommes de Gauss à des couples de caractères p -adiques continus $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, de façon que la fonction $g(\chi, \theta)$ obtenue soit analytique.

On montre au § 1 que, pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, la limite

$$(2) \quad g(\chi, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{mp^k} \sum_{a=0}^{mp^k-1} \chi(a) \theta(a) \right)$$

existe. Il est alors clair que, si χ et θ sont de torsion, elle coïncide avec la valeur (1). Au § 2 on montre que cette fonction est analytique en χ et θ , et qu'elle a, aux bords des disques constituant les espaces analytiques $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{Z}_p(m)$, une croissance logarithmique.

Au § 3, on montre quelle relation il y a entre $g(\chi, 1)$ et la fonction $\text{Log } \Gamma_\chi$ [4], pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$. On montre aussi que si $\chi = \chi_0$ est de torsion, et si $\chi_s = \chi_0 \langle \rangle^s$, on a

$$(3) \quad g(\chi_s, 1) = -sL_p(1-s, \chi_0).$$

On donne enfin une expression explicite de $g(\chi_0, \theta)$ lorsque χ_0 est de torsion et θ quelconque dans $\hat{Z}_p(m)$.

1. Convolution sur $Z_p(m)$.

On convient que, si une fonction f est définie sur \mathbb{N} et prolongeable en une fonction continue sur $Z_p(m)$, on dira, par abus de langage, que $f \in \mathcal{C}(Z_p(m), \mathbb{C}_p)$, et on notera encore f son prolongement à $Z_p(m)$.

D'autre part, pour $g \in \mathcal{C}(U_p(m), \mathbb{C}_p)$ on convient de prolonger g à $Z_p(m)$ en posant $g(x) = 0$ si $x \notin U_p(m)$. On désignera en général par la même lettre la fonction définie sur $U_p(m)$ et son prolongement standard à $Z_p(m)$.

Rappelons d'abord la définition de la convolution sur $Z_p(m)$ [4].

PROPOSITION 1.1. - Soient f et g deux fonctions continues sur $Z_p(m)$ et à

valeurs dans $\underline{\mathbb{C}}_p$, et, pour $n \geq 0$, posons

$$f * g(n) = \sum_{i=0}^n f(i) g(n-i),$$

alors $f * g \in \mathcal{C}(\underline{\mathbb{Z}}_p(n), \underline{\mathbb{C}}_p)$.

Exemple. - Soient χ et θ des caractères de torsion dans $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$ respectivement, et soit \mathfrak{m}_p^h une de leurs périodes communes, la définition (1) peut se lire

$$g(\chi, \theta) = \frac{1}{\mathfrak{m}_p^h} (\chi\theta * 1)(\mathfrak{m}_p^h - 1).$$

Parmi les propriétés de la convolution, signalons la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2.

(i) Pour toutes f et g continues sur $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$, $f * g(-1) = 0$, et, si f est continue, il existe g telle que $f = g * 1$ (i. e. $f(1+x) - f(x) = g(x)$) à la condition nécessaire et suffisante que $f(-1) = 0$.

(ii) La convolution munit $\mathcal{C}(\underline{\mathbb{Z}}_p(m), \underline{\mathbb{C}}_p)$ d'une structure d'algèbre de Banach, non unitaire à norme multiplicative.

(iii) Chaque espace $\mathcal{C}_u^k(\underline{\mathbb{Z}}_p(m), \underline{\mathbb{C}}_p)$, espace des fonctions k -fois continuellement et uniformément dérivables sur $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$ (cf. [5] ou [3]) est, pour la convolution, une algèbre de Banach (pour la norme naturelle de ces espaces).

(iv) L'espace $\text{Loc an} = \text{Loc an}(\underline{\mathbb{Z}}_p(m), \underline{\mathbb{C}}_p)$ des fonctions localement analytiques sur $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$ est une algèbre pour la convolution et, si $g \in \text{Loc an}$ est fixée, $f \rightarrow f * g$ est un opérateur continu sur Loc an muni de sa topologie naturelle (pour cette topologie cf. [1] ou [3] par exemple).

Ces diverses propriétés se déduisent de la caractérisation suivante.

On note $\Delta_m = \{t \in \underline{\mathbb{P}}^1(\underline{\mathbb{C}}_p) ; |t^m - 1| \geq 1\}$, $\Delta_{m,r} = \{t \in \underline{\mathbb{P}}^1(\underline{\mathbb{C}}_p) ; |t^m - 1| \geq r\}$, et $H_0(\Delta_m)$ (resp. $H_0(\Delta_{m,r})$) l'espace des éléments analytiques sur Δ_m (resp. $\Delta_{m,r}$) et nuls à l'infini.

PROPOSITION 1.3 [2]. - Soit f une fonction définie sur $\underline{\mathbb{N}}$ et à valeurs dans $\underline{\mathbb{C}}_p$, et soit F_f sa fonction génératrice

$$F_f(T) = \sum_{n \geq 0} f(n) T^n.$$

(i) f est prolongeable en une fonction continue sur $\underline{\mathbb{Z}}_p(m)$ à la condition nécessaire et suffisante que F_f soit la série de Taylor à l'origine d'un élément $F_f \in H_0(\Delta_m)$.

(ii) f est localement analytique sur $\mathbb{Z}_p(m)$ à la condition nécessaire et suffisante qu'il existe $r < 1$ tel que $F_f \in H_0(\Delta_{m,r})$.

Comme la fonction génératrice de $f * g$ est visiblement $F_f \cdot F_g$, on déduit les propriétés (i) et (iv) de la proposition 1.2 du fait que $H_0(\Delta_m)$ et $H_0(\Delta_{m,r})$ sont des algèbres (pour la multiplication ordinaire), et la propriété (ii) de ce que les normes de f (dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C})$) et F_f (dans $H_0(\Delta_m)$) sont égales. La propriété (iii) utilise la caractérisation des fonctions k -fois uniformément différentiables de D. BARSKY [5] (voir aussi [3]).

COROLLAIRE 1.4. - Pour des caractères continus $\chi \in \hat{U}_p(m)$ et $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, la limite

$$g(\chi, \theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mathfrak{m}_p^k} \sum_{a=0}^{\mathfrak{m}_p^k - 1} \chi(a) \theta(a) \right)$$

existe, et on a

$$(5) \quad g(\chi, \theta) = (\chi\theta * 1)'(-1) .$$

En effet, $\chi\theta * 1(-1) = 0$, on a donc

$$\frac{1}{\mathfrak{m}_p^k} \sum_{a=0}^{\mathfrak{m}_p^k - 1} \chi(a) \theta(a) = \frac{\chi\theta * 1(\mathfrak{m}_p^k - 1) - \chi\theta * 1(-1)}{\mathfrak{m}_p^k} .$$

D'autre part, tous les caractères continus considérés sont des fonctions localement analytiques, donc $\chi\theta * 1$ l'est aussi : le corollaire en résulte.

2. Analyticité des sommes de Gauss.

Rappelons d'abord brièvement une description de la structure analytique des groupes de caractères considérés.

2.1. Caractères additifs : $\hat{Z}_p(m)$.

Soit $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, sa série génératrice est $F_\theta(T) = \sum_{n \geq 0} \theta(n) T^n = 1/(1 - \theta(1)T)$. D'après la proposition 1.3, il s'agit d'un caractère continu à la condition nécessaire et suffisante que $F_\theta \in H_\theta(\Delta_m)$, c'est-à-dire que $\theta(1) \notin \Delta_m$.

Soit $D_m = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \Delta_m = \{t \in \mathbb{C}_p; |t^m - 1| < 1\}$. On voit que $\theta \in \hat{Z}_p(m) \Leftrightarrow \theta(1) \in D_m$, et on vérifie que $\theta \mapsto \theta(1)$ est un isomorphisme de groupes topologiques et une isométrie. Comme $(m, p) = 1$, $D_m = \bigcup_{\zeta} D_\zeta$, où ζ parcourt le groupe μ_m des racines m -ièmes de l'unité, et $D_\zeta = \{t \in \mathbb{C}_p; |t - \zeta| < 1\}$. Une fonction analytique sur $\hat{Z}_p(m)$ est alors une fonction dont l'image sur D_m est analytique sur chacun des disques constituant D_m . Par exemple, comme θ est un caractère du groupe additif, θ'/θ est une constante : en fait, $\theta'/\theta = \text{Log}(\theta(1)) = (\text{Log}(\theta(m)))/m$. On notera $\text{Log } \theta = \theta'/\theta$: c'est une fonction analytique sur D_m .

2.2. Caractères multiplicatifs : $\hat{U}_p(m)$.

L'isomorphisme canonique $\underline{Z}/m^h \underline{Z} \simeq \underline{Z}/m\underline{Z} \times (\underline{Z}/p^h \underline{Z})$ définit par passage à la limite un isomorphisme canonique $\underline{Z}_p(m) \simeq (\underline{Z}/m\underline{Z}) \times \underline{Z}_p$. Pour $x \in \underline{Z}_p(m)$, on notera $x \simeq (x_0, x_1)$, $x_0 \in (\underline{Z}/m\underline{Z})$, $x_1 \in \underline{Z}_p$, l'image canonique de x dans $(\underline{Z}/m\underline{Z}) \times \underline{Z}_p$, et on écrira parfois $x = (x_0, x_1)$. On rappelle que si $x_1 \in \underline{Z}_p$, $\omega(x_1)$ est défini par $\omega(x_1) \equiv x_1 \pmod{p}$, et $\omega(x_1)^p = \omega(x_1)$. C'est un caractère modulo p . Pour $x \in \underline{Z}_p(m)$, on pose

$$\omega(x) = \epsilon_m(x_0) \omega(x_1)$$

et

$$\langle x \rangle = \epsilon_m(x_0) \langle x_1 \rangle \quad \text{où} \quad \langle x_1 \rangle = \omega^{-1}(x_1) x_1 \quad \text{si} \quad \omega(x_1) \neq 0 \quad , \quad \text{et} \quad \langle x_1 \rangle = 0$$

sinon, (ϵ_m désigne le caractère unité modulo m) . On note $U_1 = 1 + p\underline{Z}_p$, alors $\langle x \rangle \in U_1$ quand $x \in U_p(m)$. Soit $\chi \in \hat{U}_p(m)$: il existe un unique triplet (χ_0, a, χ_1) , où $\chi_0 \in (\hat{\underline{Z}}/m\underline{Z})$, $a \in (0, \dots, p-2)$, et $\chi_1 \in \hat{U}_1$ tel que, pour tout $x \in U_p(m)$, on ait

$$\chi(x) = \chi_0(x_0) \omega(x_1)^a \chi_1(\langle x_1 \rangle) .$$

Soit u un générateur de U_1 , i. e. un élément tel que $u^{\underline{Z}}$ soit dense dans U_1 , χ_1 est continu si, et seulement si, $\chi_1(u) \in D_1 = \{t \in \underline{C}_p ; |t - 1| < 1\}$, et l'application

$$\chi \longrightarrow (\chi_0, a, \chi_1(u))$$

de $\hat{U}_p(m)$ dans $(\hat{\underline{Z}}/m\underline{Z})^{\times} \times (\underline{Z}/(p-1)\underline{Z}) \times D_1$ est un isomorphisme de groupes topologiques et une isométrie (la distance sur les ensembles finis est triviale, et le produit est muni de la distance "Sup") . Notons $\dot{\chi}$ la dérivée invariante de χ : $\dot{\chi}(x) = x_1 \frac{d}{dx} \chi(x)$, alors $\dot{\chi}/\chi$ est une constante : on vérifie que

$$\dot{\chi}/\chi = \text{Log } \chi(u) / \text{Log}(u) = \text{Log } \chi .$$

Ceci définit une fonction analytique sur $\hat{U}_p(m)$.

2.3. Fonctions analytiques sur $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{\underline{Z}}_p(m)$.

On sait ([3] théorème 1.3) qu'une forme linéaire sur $\text{Loc an}(\underline{Z}_p(m), \underline{C}_p)$ (resp. sur $\text{Loc an}(\underline{U}_p(m), \underline{C}_p)$) est continue à la condition nécessaire et suffisante que sa restriction à $\underline{Z}_p(m)$ (resp. $\underline{U}_p(m)$) soit une fonction analytique. Par exemple les deux fonctions **Log** , définies sur ces deux, sont restriction aux deux de la forme linéaire continue sur $\text{Loc an} : f \longrightarrow f'(0)$ et $g \longrightarrow g'(1)$ respectivement.

PROPOSITION 2.1. - Pour $\chi \in \hat{U}_p(m)$, $\theta \longrightarrow g(\chi, \theta)$ est analytique sur $\hat{\underline{Z}}_p(m)$ et, pour $\theta \in \underline{Z}_p(m)$, $\chi \longrightarrow g(\chi, \theta)$ est analytique sur $\underline{U}_p(m)$.

Il suffit en effet de combiner la propriété (iv) de la proposition 1.2 et le fait

que, pour tout $a \in \mathbb{Z}_p(m)$, $f \rightarrow f'(a)$ est une forme linéaire continue sur Loc an .

2.4. Conditions de croissance au bord.

Rappelons que si f est analytique sur $D_1 = \{t \in \mathbb{C}_p; |t-1| < 1\}$, on note, pour $r < 1$, $M(f, r) = \sup_{|t-1| < r} |f(t)|$. Si f et g sont deux fonctions analytiques sur D_1 , on note $f = o(g)$ (resp. $f = O(g)$) si $M(f, r) = o(M(g, r))$ (resp. $M(f, r) = O(M(g, r))$) pour $r \rightarrow 1^-$.

On vérifie que, bien que les fonctions $M(f, r)$ dépendent du choix d'un centre pour le disque considéré, les notions de o et O n'en dépendent pas. Si f et g sont analytiques sur une réunion finie de disques, on dit que $f = o(g)$ ou $f = O(g)$ si les restrictions de f et g à chacun des disques satisfont cette propriété: on en déduit des notions de o et O sur les variétés $\hat{U}_p(m)$ et $\hat{Z}_p(m)$, notions intrinsèques, i. e. ne dépendant pas du choix d'une coordonnée choisie pour réaliser l'isomorphisme avec une réunion finie de copies de D_1 . On note en particulier $f = O(\text{Log})$ lorsque $f = O(g)$, où g est la fonction logarithme définie sur l'une ou l'autre de ces variétés en 2.2.

On montre (cf. D. BARSKY [5] et [3]) qu'une forme linéaire continue sur $\mathbb{C}_u^1(\mathbb{Z}_p(m), \mathbb{C}_p)$ (resp. sur $\mathbb{C}_u^1(\hat{U}_p(m), \mathbb{C}_p)$) est continue si, et seulement si, sa restriction à $\hat{Z}_p(m)$ (resp. à $\hat{U}_p(m)$) y est $O(\text{Log})$.

PROPOSITION 2.2. - Soient $\theta \in \hat{Z}_p(m)$ et $\chi \in \hat{U}_p(m)$, on a

$$|g(\chi, \theta)| \leq \max(M(\text{Log}, \|\theta^m - 1\|, M(\text{Log}, \|\chi \varphi^{(m)(p-1)} - 1\|/p))$$

et chacune des fonctions $\theta \rightarrow g(\chi, \theta)$ et $\chi \rightarrow g(\chi, \theta)$ est $O(\text{Log})$.

La preuve repose sur la proposition 1.2 (iii) et sur une évaluation précise de la norme, dans \mathbb{C}_u^k , d'un opérateur $f \rightarrow f * g$.

3. Relation avec les fonctions L et Γ .

On note $S = \{s \in \mathbb{C}_p; v(s) > (1/(p-1)) - 1\}$. Soit χ un caractère de Dirichlet modulo mp^h , $h \geq 1$, on note $\chi_s = \chi \langle \cdot \rangle^s$.

On sait (cf. KUBOTA-LEOPOLDT [7] ou IWASAWA [6]) que, pour k entier, $k \geq 1$,

$$B_{k, \chi} = -k L_p(1-k, \chi) = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\text{mp}^\ell} \sum_{a=0}^{\text{mp}^\ell - 1} \chi_k(a) \right)$$

(rappelons qu'ici, par hypothèse, $\chi(p) = 0$). Ceci s'écrit aussi

$$B_{k, \chi} = g(\chi_k, 1).$$

D'autre part, $s \rightarrow \chi_s$ est une bijection bianalytique de S sur un disque D_χ de $\hat{U}_p(m)$ (en fait: le plus grand disque contenant χ et ne contenant aucun autre caractère de torsion). On en déduit que $s \rightarrow g(\chi_s, 1)$ est une fonction analytique

sur S , qui coïncide pour $s = k$, k entier ≥ 1 , avec $B(s, \chi) = -sL_p(1-s, \chi)$. Ces deux fonctions sont donc égales sur S .

PROPOSITION 3.1. - Pour χ de torsion et $v(s) > (1/(p-1)) - 1$,

$$(6) \quad B(s, \chi) = -s L_p(1-s, \chi) = g(\chi_s, 1).$$

On peut ainsi retrouver le fait que $B(s, \chi)$ est bornée sur S , grâce au fait que $g(\cdot, 1)$ est bornée sur D . On peut aussi retrouver les majorations classiques de $B(s, \chi)$ en fonction du conducteur de χ en utilisant la proposition 2.2.

D'autre part, on montre facilement que, lorsqu'une fonction f_s dépend d'un paramètre s , l'opérateur d/ds commute à la convolution et la dérivation sur $Z_p(m)$, i. e. $d/ds (f_s * g) = ((d/ds)f_s) * g$, et $(d/ds)f'_s = ((d/ds)f_s)'$. On en déduit que

$$\frac{d}{ds}(g(\chi_s, 1)) = \left(\frac{d}{ds} \chi_s * 1\right)'(-1) = (\chi_s \text{Log} \langle \rangle * 1)'(-1).$$

On retrouve ainsi les fonctions $\text{Log} \Gamma_{\chi_s}$, définies en [4].

COROLLAIRE 3.2. - Pour χ de torsion et $v(s) > (1/(p-1)) - 1$,

$$(7) \quad \frac{d}{ds}(g(\chi_s, 1)) = \frac{d}{ds}(-s L_p(1-s, \chi)) = \text{Log} \Gamma'_{\chi_s}(0).$$

En particulier, on retrouve, pour $s = 0$, la valeur (cf. [4], théorème 2)

$$\begin{aligned} \text{Log} \Gamma'_{\chi_s}(0) &= -\gamma_p(\chi) = -L_p(1, \chi) \text{ pour } \chi \text{ non trivial} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} (s L_p(1-s, \chi)) \text{ pour } \chi \text{ trivial.} \end{aligned}$$

Plus généralement, on donnera dans la partie II de cet article une formule de Taylor pour $\text{Log} \Gamma_{\chi_s}$ généralisant aux caractères de la forme χ_s la formule du théorème 2 de [4].

4. Exemple de formule explicite.

Pour χ de torsion, provenant d'un caractère de Dirichlet modulo $f = mp^h$, on sait que $F_{\chi}(T) = \sum_{n \geq 0} \chi(n) T^n$ est une fraction rationnelle. Plus précisément,

$$(8) \quad F_{\chi}(T) = \sum_{\alpha \mid f} \frac{g(\chi, \bar{\alpha})}{1 - \alpha(1) T},$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'inverse du caractère additif α . On sait aussi que $g(\chi, \alpha) = 0$ si l'ordre (exact) de α n'est pas égal à celui de χ .

Soit $\theta \in \hat{Z}_p(m)$, et supposons d'abord que $\theta^f \neq 1$. On a

$$F_{\chi\theta}(T) = \sum_{\alpha \mid f} \frac{g(\chi, \bar{\alpha})}{1 - \alpha(1) \theta(1) T}.$$

Donc,

$$F_{\chi\theta * 1}(T) = \frac{1}{1-T} \times F_{\chi\theta}(T) \\ = \sum_{\alpha^f=1} g(\chi, \bar{\alpha}) \left(\frac{1}{1-\bar{\alpha}\theta(1)} \times \frac{1}{1-\alpha\theta(1)T} + \frac{1}{1-\alpha\theta(1)} \times \frac{1}{1-T} \right) .$$

On en déduit que

$$\chi\theta * 1(x) = \sum_{\alpha^f=1} g(\chi, \bar{\alpha}) \left(\frac{1}{1-\bar{\alpha}\theta(1)} (\alpha\theta)(x) + \frac{1}{1-\alpha\theta(1)} \right)$$

et

$$\chi\theta * 1'(x) = \text{Log}(\theta(1)) \sum_{\alpha^f=1} g(\chi, \bar{\alpha}) \frac{1}{1-\bar{\alpha}\theta(1)} ,$$

soit

$$g(\chi, \theta) = - \text{Log}(\theta(1)) F_{\chi}(\theta(1)) .$$

On vérifie qu'aux pôles (simples) de $F_{\chi}(T)$ la valeur de $-\text{Log } T F_{\chi}(T)$ est encore $g(\chi, \alpha)$ si $T = \alpha(1)$ avec $\alpha^f = 1$, finalement, pour tout $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, la formule ci-dessus est valable.

PROPOSITION 4.1. - Soit $\chi \in \hat{U}_p(m)$ tors et $\theta \in \hat{\mathbb{Z}}_p(m)$, on a

$$(9) \quad g(\chi, \theta) = - \text{Log}(\theta(1)) F_{\chi}(\theta(1))$$

où $F_{\chi}(T) = \sum_{n \geq 0} \chi(n) T^n$ est la fonction génératrice de χ .

On retrouve ici, sous une forme explicite, le fait que, pour χ de torsion, $\theta \rightarrow g(\chi, \theta)$ est une fonction analytique à croissance logarithmique sur $\hat{\mathbb{Z}}_p(m)$.

On peut, par la même méthode de calcul direct, donner des expressions analogues pour $g(\chi_1, \theta)$, $g(\chi_2, \theta)$, le calcul se compliquant assez vite pour $g(\chi_k, \theta)$ lorsque k augmente. On donnera, dans la partie II, une expression explicite analogue à (9) et valable pour tout $\chi \in \hat{U}_p(m)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Interpolation p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 92, 1964, p. 117-180.
 [2] AMICE (Y.). - Fonctions analytiques sur le complémentaire d'une famille de disques, Séminaire de théorie des nombres, Université de Bordeaux, 1968/69, n° 8.

- [3] AMICE (Y.). - Duals, Proceedings of the conference on p -adic analysis [1978 Nijmegen] ; p. 1-15. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Katholieke Universiteit, 1978.
 - [4] AMICE (Y.). - Fonctions Γ p -adiques associées à un caractère de Dirichlet, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 8e année, 1979/80, n° 17, 11 p.
 - [5] BARSKY (D.). - Fonctions k -lipschitziennes sur un anneau local et polynômes à valeurs entières, Bull. Soc. math. France, t. 101, 1973, p. 397-411.
 - [6] IWASAWA (K.). - Lectures on p -adic L -functions. - Princeton, Princeton University Press, 1972 (Annals of mathematic Studies, 74).
 - [7] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zeta-werte, J. für reine und angew. Math., t. 215-216, 1964, p. 328-339.
-