GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERNARD DWORK

Majoration effective et application

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 1 (1981-1982), exp. nº 1, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 1, 5 p.

MAJORATION EFFECTIVE ET APPLICATION

par Bernard DWORK (*)
[Princeton University]

Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique 0, valué ultramétrique complet.

Posons $D = d/dx$, et soit

(1) $$L = C_n D^n + C_{n-1} D^{n-1} + \dots + C_0 ,$$

un opérateur différentiel linéaire d'ordre n $(C_n \neq 0)$ à coefficients fonctions analytiques bornées dans le disque unité $D(0 , 1^-)$. On suppose de plus que L possède n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0 , 1^-)$.

Soit alors $u = \sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$ une solution de L dans le disque $D(0 , 1^-)$; dans une série d'articles ([1], [2], [4]), nous avions entre autres choses étudié le comportement asymptotique des coefficients a_s, et montré que

(2) $$|a_s| = O(s^{n-1}) .$$

La méthode était fondée sur l'idée de disque générique avec une condition de réductibilité d'un opérateur différentiel ayant des solutions non bornées dans le disque générique.

Plus tard [3], nous avons obtenu une majoration effective de la croissance des coefficients par une méthode directe évitant l'utilisation du disque générique et la propriété de réductibilité.

Nous nous proposons de montrer que si $\{L_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, est une suite d'opérateurs différentiels linéaires d'ordre n à coefficients analytiques bornés dans $D(0 , 1^-)$, ayant tous n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0 , 1^-)$ et si, de plus, L_j converge vers L quand $j \to +\infty$ (au sens que les coefficients de L_j convergent vers ceux de L uniformément sur le disque $D(0 , 1^-)$), alors L aussi possède n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0 , 1^-)$.

Nous verrons que ce résultat est une conséquence facile de la majoration effective, et qu'il est essentiel que la majoration soit effective.

Si l'on revient aux démonstrations originales de la majoration (2), on voit que sous des hypothèses concernant la factorisation de L en opérateurs différentiels ayant toutes leurs solutions bornées dans le disque générique, on peut améliorer la

(*) Texte reçu le 23 novembre 1981.
Bernard DWORK, Fine Hall, Princeton University, PRINCETON, NJ 08544 (Etats-Unis).

majoration (2) et obtenir

(2') $$|a_s| = O(s^{m-1}) \quad \text{avec} \quad m \leqslant n \ .$$

Il est alors tentant de conjecturer que l'on peut obtenir des majorations effectives concernant (2') analogues à celles obtenues concernant (2). Nous discuterons ce problème au paragraphe 2.

1. Une application des majorations effectives.

1.1. Notation. - Soit $f = \sum_{s\geqslant 1} b_s x^s$ une fonction analytique bornée dans $D(0\ ,\ 1^-)$. Sa norme frontière est

$$\|f\| = \sup_{|x|<1} |f(x)| = \sup_s |b_s| \ .$$

Il est bien connu que cette norme s'étend au quotient f/g de deux fonctions analytiques bornées dans $D(0\ ,\ 1^-)$ en posant

$$\|f/g\| = \|f\|/\|g\| \ .$$

On note $\mathfrak{a}$ l'anneau des fonctions analytiques bornées sur $D(0\ ,\ 1^-)$, et $\mathfrak{a}'$ son corps quotient.

Soit L défini par la formule (1). On pose

$$\frac{D^s}{s!} = \sum_{j=0}^{n-1} G_{s,j}\, D^j \mod \mathfrak{a}'[D]L \ .$$

1.2. Les majorations effectives ([3], § 3).

THÉORÈME. - Soit $L \in \mathfrak{a}'[D]$ d'ordre n possédant n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0\ ,\ 1^-)$. On a alors, pour tout sentier $\geqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant n-1$,

(3) $$\|G_{s,j}\| \leqslant \{s\ ,\ n-1\}$$

où, par définition, pour $0 \leqslant k \leqslant s$,

(4) $$\{s\ ,\ k\} = 1/\mathrm{Inf}|\lambda_1 \ldots \lambda_k|_K \ ,$$

l'infinum étant pris sur tous les ensembles de k entiers distincts bornés par s , c'est-à-dire $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k \leqslant s$, et $|\cdot|_K$ désignant la valeur absolue dans K .

1.3. - Soient L_i et $L \in \mathfrak{a}[D]$, tous d'ordre n , on dira que la suite L_i converge vers L quand $i \to \infty$ si les coefficients de L_i **convergent uniformément** sur $D(0\ ,\ 1^-)$ (donc au sens de $\|\cdot\|$) vers les coefficients de L .

THÉORÈME. - Soit $\{L_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, une suite d'opérateurs unitaires d'ordre n , à coefficients dans $\mathfrak{a}$, possédant tous n solutions linéairement indépendantes dans $D(0\ ,\ 1^-)$. Supposons que la suite L_i converge vers $L \in \mathfrak{a}[D]$. Alors L possède aussi n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0\ ,\ 1^-)$.

De plus, soient $\alpha_0 , \dots , \alpha_{n-1}$ donnés $\in K$, et soit u_i (resp. u) la solution de L_i (resp. L) vérifiant $u_i^{(s)}(u) = \alpha_s$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$. Alors u_i converge vers u uniformément sur tout disque $D(0 , r^-)$ avec $0 < r < 1$.

<u>Démonstration</u>. - Comme L_i (et L) sont unitaires à coefficients dans $\mathfrak{A}$, les $G^i_{s,j}$ (et $G_{s,j}$) correspondants appartiennent aussi à $\mathfrak{A}$.

Il est clair que

(5) $$G_{s,j} = \lim_i G^i_{s,j} , \quad s \geqslant 0 , \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1 .$$

D'après le théorème 1.2, on a, pour tout $i \in \underset{\sim}{N}$, $s \geqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

(6) $$\|G^i_{s,j}\| \leqslant \{s , n-1\} ,$$

cette majoration reste vraie à la limite, et l'on a

(7) $$|G_{s,j}(0)| \leqslant \|G_{s,j}\| \leqslant \{s , n-1\} .$$

Par ailleurs, si $u = \sum_{s\geqslant 0} a_s x^s$ est solution de L au voisinage de 0 , on a, pour $s \geqslant n$,

(8) $$a_s = \sum_{j=0}^{n-1} G_{s,j}(0)\, a_j .$$

On déduit alors facilement de (7) que $|a_s| = O(s^{n-1})$ et donc que u converge dans $D(0 , 1^-)$, ce qui montre que L possède n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0 , 1^-)$.

Soient alors $u_i = \sum_{s\geqslant 0} a_s^i x^s$ et $u = \sum_{s\geqslant 0} a_s x^s$ les solutions de L_i et L . On a, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$,

$$a_s = \sum_{j=0}^{n-1} G_{s,j}(0)\alpha_j = \lim_i \sum_{j=0}^{n-1} G^i_{s,j}(0)\alpha_j = \lim_i a_s^i .$$

Donc u_i converge vers u coefficient à coefficient. Ceci joint au fait que l'on a, uniformément en i , la majoration

$$|a_s^i| \leqslant (\sup_{0\leqslant j\leqslant n-1} |\alpha_j|) \quad \{s , n-1\}$$

et que, pour tout $r < 1$, $r^s\{s , n-1\} \longrightarrow 0$ quand $s \longrightarrow \infty$, nous permet de montrer facilement que u_i converge vers u uniformément sur $D(0 , r^-)$.

1.4. <u>Exemple</u>. - En 1961, LEOPOLDT m'avait fait observer que l'on a, pour $x \in D(1 , 1^-)$,

$$\log x = \lim_{i\to\infty} \frac{x^{p^i} - 1}{p^i} .$$

Réinterprétons ce résultat à l'aide du théorème 1.3. Il est clair que $u_i = \frac{x^{p^i} - 1}{p^i}$ est la solution dans $D(1 , 1^-)$ de $L_i = xD^2 + (1 - p^i)D$ telle que $u_i(1) = 0$, $u_i'(1) = 1$, et $u = \log x$ est la solution dans $D(1 , 1^-)$ de $L = xD^2 + D$ telle que $u(1) = 0$, $u'(1) = 1$, et donc le résultat de LEOPOLDT découle du théorème 1.3.

2. Conjectures sur les majorations effectives.

2.1. - On note E le complété de $K(x)$ pour la norme de Gauss. On rappelle que E s'interprête comme l'espace des éléments analytiques à coefficients dans K sur le disque générique $D(t\ ,\ 1^-)$.

Soit $L \in E[D]$ d'ordre n , et supposons que L possède une famille complète de solutions analytiques dans $D(t\ ,\ 1^-)$. On sait alors (voir [1], par exemple) que l'on a une décomposition

$$L = L_1 \circ \dots \circ L_k \quad \text{avec} \quad L_i \in E[D]\ ,$$

et L_i a une famille complète de solutions analytiques bornées dans $D(t\ ,\ 1^-)$. On en déduit, par la méthode de variation des constantes, que les solutions de L dans $D(t\ ,\ 1^-)$ ont une croissance logarithmique d'ordre $k - 1$, ce qui équivaut à

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n-1} |G_{s,j}|_{Gauss} = O(s^{k-1})\ .$$

On aimerait avoir une majoration effective, et l'on est tenté de faire la conjecture suivante

2.2. CONJECTURE (fausse). - Dans la situation décrite ci-dessus on a, pour tout $s \geqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n - 1$,

$$|G_{s,j}|_{Gauss} \leqslant \{s\ ,\ k - 1\}\ .$$

2.3. - Si cette conjecture était vraie, on aurait en particulier pour $k = 1$, c'est-à-dire si L a une famille complète de solutions analytiques bornées dans $D(t\ ,\ 1^-)$,

$$|G_{s,j}| \leqslant 1 \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathbb{N}\ , \quad 1 \leqslant j \leqslant n - 1\ .$$

Alors on pourrait montrer, comme dans le théorème 1.3, que si $L_i \in E[D]$, si les L_i ont tous une famille complète de solutions analytiques dans $D(t\ ,\ 1^-)$ et si L_i tend vers $L \in E[D]$, alors L a aussi une famille complète de solutions bornées dans $D(t\ ,\ 1^-)$.

Or l'exemple de LEOPOLDT nous fournit précisément un contre-exemple. Les L_i ont des solutions bornées puisque ces solutions sont des polynômes, par contre L possède la solution non bornée $\log \frac{x}{t}$.

La conjecture est donc fausse.

2.4. - Nous proposons d'affaiblir la conjecture 2.2. Soit L à coefficients fractions rationnelles, $L \in \mathbb{Q}(x)\ [D]$, d'ordre n . Nous nous proposons d'exprimer que la conjecture 2.2 est vraie seulement pour presque tous les p .

Nous noterons S l'ensemble des nombres premier p tels que L possède une famille complète de solutions analytiques dans le disque générique de $\mathbb{C}_p$. Pour $p \in S$, nous noterons $k(p)$ le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel qu'il existe une décomposition $L = L_1 \circ \dots \circ L_k$, où les $L_j \in E_p[D]$ (E_p = complété de $K(x)$ pour la norme de Gauss p-adique) et pour tout j , L_j a une famille complète de solutions analytiques et bornées dans le disque générique de $\underset{\sim}{C}_p$.

CONJECTURE. - Il existe $S' \subset S$, avec card$(S - S')$ fini, tel que, pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$|G_{s,j}|_{\text{Gauss}} \leqslant \{s , h(p) - 1\}_p$$

(où $\{s , k\}_p = \{s , k\}$ dans le cas de la valuation p-adique, c'est-à-dire $K = \underset{\sim}{C}_p$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - On p-adic differential equation, II, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 366-376.

[2] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equation, Trans. Amer. math. Soc., t. 232, 1977, p. 1-46.

[3] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - Effective p-adic bounds for solutions of homogeneous linear differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 259, 1980, p. 559-577.

[4] ROBBA (P.). - Sur les équations différentielles linéaires p-adiques, II, Pacific J. Math., t. 98, 1982, p. 393-418.