YVETTE AMICE

Fonction Γ p-adique associée à un caractère de Dirichlet

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A9_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 17, 11 p.

9 juin 1980

FONCTION Γ p-ADIQUE ASSOCIÉE À UN CARACTÈRE DE DIRICHLET

par Yvette AMICE (*)
[Université Paris-7]

Introduction.

En 1975, Y. MORITA [10] construit une "fonction Γ p-adique" de la façon suivante. Soit p un nombre premier impair, $\underset{\sim}{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques et Γ_p la fonction définie sur les entiers positifs par

(1) $$\Gamma_p(1 + n) = (-1)^{n+1} \prod_{1\leq j\leq n,(j,p)=1} j \ .$$

Cette fonction admet un (unique) prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}_p$, encore noté Γ_p, satisfaisant

(2) $$\Gamma_p(1 + x) = \begin{cases} - x\, \Gamma_p(x) & \text{si } x \notin p\,\underset{\sim}{Z}_p \\ - \Gamma_p(x) & \text{si } x \in p\,\underset{\sim}{Z}_p \ , \end{cases}$$

et

$$\Gamma_p(x)\, \Gamma_p(1 - x) = (-1)^{a(x)} \ , \text{ pour } x \in \underset{\sim}{Z}_p \ ,$$

où $a(x)$ est l'unique entier tel que $x \equiv a(x) \mod p$ et $1 \leq a(x) \leq p$.

En 1977, J. DIAMOND [5] donne une définition différente d'une fonction "$\log \Gamma_p$". Plus précisément il montre que, pour $x \in \underset{\sim}{C}_p$ (voir notations ci-dessous) et $|x| < 1$, la limite

$$G^*(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} f(x + n)\right) \ ,$$

où $f(x) = x \log x - x$, existe et définit une fonction analytique pour $|x| < 1$, coïncidant avec $\log \Gamma_p(x)$ sur $p\,\underset{\sim}{Z}_p$.

En 1979, B. H. GROSS et N. KOBLITZ [7] montrent que certaines sommes de Gauss s'expriment comme produit de valeurs de Γ_p en des points rationnels et en déduisent que $\Gamma_p(\frac{r}{N})$ est algébrique pour $r \in \underset{\sim}{Z}$ et $N | p - 1$. Ils obtiennent aussi une formule de multiplication pour des valeurs en certains rationnels.

(*) Texte reçu le 15 juillet 1981.

Mme Yvette AMICE, UER Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

En 1980, M. BOYARSKI [4] obtient une formule d'interpolation pour $\Gamma_p(px)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, dans laquelle les coefficients de la série d'interpolation sur les entiers proviennent de ceux de la série de Taylor à l'origine de $E(x) = \exp(x + \frac{x^p}{p})$, puis D. BARSKY [3] prouve une formule globale (sur $\mathbb{Z}_p$) d'interpolation de Γ_p sur les entiers, où les coefficients sont ceux de $E(x)$. L'un et l'autre démontrent une "formule de multiplication" pour Γ_p , prouvent que Γ_p est localement analytique, et déterminent son rayon d'analyticité.

D'autre part, J. DIAMOND [6] et N. KOBLITZ ([8] et [9]) déterminent la série de Taylor à l'origine de

$$\log \Gamma_p(t) = \sum_{s\geq 1} a_s t^s$$

où $a_s = \frac{(-1)^s}{s} L_p(s , \omega^{1-s})$ pour $s \geq 2$ et a_1 est une constante d'Euler p-adique (cf. § 2).

Nous construisons ici une fonction Γ_χ p-adique "tordue" par un caractère de Dirichlet χ : lorsque $\chi = 1_p$ est le caractère unité modulo p , on retrouve, à un facteur localement constant près, la fonction Γ_p de Morita. On montre, au § 2 que la série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$ a des coefficients $\frac{(-1)^s}{s} L_p(s , \chi\, \omega^{1-s})$, ce qui généralise les résultats de [6], [8] et [9]. On démontre, au § 3, une formule de multiplication généralisant celles de [7], [4] et [3], sans toutefois en déduire de résultats d'algébricité de valeurs $\Gamma_\chi(\frac{r}{N})$. Enfin, au § 4, on étudie les propriétés d'analyticité de $\Gamma_\chi(x)$ par rapport à x mais aussi par rapport à χ , après une extension convenable de la définition de Γ_χ lorsque χ est un caractère continu du groupe multiplicatif d'un anneau $\mathbb{Z}(m) = \varprojlim_h (\mathbb{Z}/mp^h \mathbb{Z})$.

Notations.

- p est un nombre premier impair
- $\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Q}_p$) l'anneau des entiers (le corps des nombres) p-adiques, munis de la valuation p-adique v_p et de la valeur absolue normalisées par $v_p(p) = 1$ et $|p| = \frac{1}{p}$.
- $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, muni des valuation et valeur absolue prolongeant celles de $\mathbb{Q}_p$; $\mathcal{O}_p$ est son anneau de valuation.
- si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur $f(\chi) = f = m\, p^e$, $(m , p) = 1$, $K_\chi = K = \mathbb{Q}_p(\chi)$, et $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K .
- ω est le caractère de Teichmuller sur $\mathbb{Z}_p$: $\omega(n) = \lim_{h\to\infty} n^{p^h}$, et pour $n \in \mathbb{Z}_p$, $\langle n\rangle = n\, \omega^{-1}(n)$.
- pour $a \in \mathbb{C}_p$, $r > 0$,

$B(a\,,\,r) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |x-a| < r\}$ et $B(a\,,\,r^+) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ |x-a| \leq r\}$.

– à un caractère de Dirichlet χ de conducteur f , on associe les polynômes de Bernoulli $B_{n,\chi}(x)$ et les nombres de Bernoulli $B_{n,\chi}$ satisfaisant

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\ t\ e^{(a+x)t}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n\geq 0} B_{n,\chi}(x)\,\frac{t^n}{n!} \quad \text{et} \quad B_{n,\chi}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{i,\chi}\, x^i \ .$$

– si m est un entier, $m \geq 1$, $(m\,,\,p) = 1$, on note $\underset{\sim}{Z}(m) = \varprojlim_h \left(\underset{\sim}{Z}/mp^h\,\underset{\sim}{Z}\right)$, alors $\underset{\sim}{Z}(m) = (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$. On note $X(m)$ le groupe des unités de l'anneau $\underset{\sim}{Z}(m)$: $X(m) = (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z})^* \times \underset{\sim}{Z}_p^*$

1. Construction de Γ_χ .

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f = m\,p^e$, $(m\,,\,p) = 1$. On supposera $e \geq 1$, i. e. $p|f$. L'anneau $\underset{\sim}{Z}$ s'injecte de façon naturelle (dense) dans $\underset{\sim}{Z}(m) = \varprojlim_h (\underset{\sim}{Z}/m\,p^h\,\underset{\sim}{Z}) = (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$, et on notera $n \longrightarrow (\alpha_m(n)\,,\,n)$ cette injection, où $\alpha_m(n) \in \underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z}$, et $n \in \underset{\sim}{Z}_p$ est identifié à n quand cela ne crée pas de confusion. On confond χ et son prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}(m)$, qui est localement constant, nul sur $\underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$, et dont la restriction à $X(m)$ est un caractère continu de $X(m)$ dans $K = \underset{\sim}{Q}_p(\chi)$.

Soit ω le caractère de Teichmuller de $\underset{\sim}{Z}_p$: il se prolonge continûment en $\omega(z) = \omega(x)$ si $z = (\alpha\,,\,x) \in (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$. On convient que le caractère continu $\langle\ \rangle$ défini sur $\underset{\sim}{Z}_p^*$ par $\langle x\rangle = x.\omega^{-1}(x)$ est prolongé à $\underset{\sim}{Z}(m)$ par $\langle z\rangle = \langle x\rangle$ si $z = (\alpha\,,\,x) \in X(m)$ et $\langle z\rangle = 1$ si $z \in \underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$.

THÉORÈME 1. DÉFINITION. – Soit χ un caractère de Dirichlet modulo $f = m\,p^e$, $(m\,,\,p) = 1$ et $e \geq 1$, il existe une unique fonction continue Γ_χ sur $\underset{\sim}{Z}(m) = \varprojlim_h (\underset{\sim}{Z}/m\,p^h\,\underset{\sim}{Z})$ telle que $\Gamma_\chi(1) = 1$ et, pour n entier, $n \geq 1$;

$$\Gamma_\chi(1+n) = \langle n\rangle^{\chi(n)}\,\Gamma_\chi(n)\ . \tag{3}$$

Remarque 1 : Soit $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$, alors $\langle z\rangle \equiv 1 \mod p$ et $\log_p\langle z\rangle \in p\,\underset{\sim}{Z}_p$; donc $\exp(\alpha\,\log_p\langle z\rangle) = \langle z\rangle^\alpha$ est analytique pour $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$ et $v_p(\alpha) > \frac{1}{p-1} - 1$. En particulier, comme $v_p(\chi(z)) \geq 0$, $\langle z\rangle^{\chi(z)}$ est bien définie pour $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$ et $\langle z\rangle^{\chi(z)} \in 1 + p\,\mathcal{O}_K$.

Remarque 2 : Supposons le théorème démontré, on aura alors par continuité, pour $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

$$\Gamma_\chi(1+z) = \langle z\rangle^{\chi(z)}\,\Gamma_\chi(z)\ . \tag{4}$$

Remarque 3 : Si $\chi = 1_p$ est le caractère unité modulo p , $f = p$ et $m = 1$,

$\underset{\sim}{Z}(m) = \underset{\sim}{Z}_p$, on a, pour n entier positif,

$$\Gamma_\chi(1 + n) = (-1)^n\, \Gamma_p(1 + n) \prod_{j=1\,(j,p)=1}^{n} \omega(j)^{-1} .$$

Donc si $n \equiv a \mod p$, $0 \leq a < p$, on a

$$\Gamma_\chi(1 + n) = (-1)^n\, \Gamma_p(1 + n).(-1)^{[\frac{n}{p}]} \prod_{j=1}^{a} \omega(j)^{-1}$$

soit

(5) $$\Gamma_\chi(1 + n) = \Gamma_p(1 + n)[\omega(-1) \dots \omega(-a)]^{-1} \quad \text{pour } n \equiv a \mod p .$$

On retrouve ainsi, pour $\chi = 1_p$, la fonction Γ_p de Morita avec en particulier pour $x \in p\,\underset{\sim}{Z}_p$, $\Gamma_\chi(1 + x) = \Gamma_p(1 + n)$.

<u>Démonstration du théorème</u> 1. - On sait, ([1] ou [2]), qu'étant donnée une fonction g bornée sur $\underset{\sim}{N}$ et à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, g admet un prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}(m)$ si, et seulement si, sa fonction génératrice

$$G(X) = \sum_{n\geq 0} g(n)\, X^n$$

se prolonge en un élément analytique nul à l'infini sur le domaine

$$\Delta_m = \underset{\sim}{C}_p - (\bigcup_{\zeta^m=1} B(\zeta , 1^-)) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ;\ |x^m - 1| \geq 1\} .$$

Une conséquence de cette propriété est le lemme suivant.

LEMME 1.1. - <u>Soient</u> f <u>et</u> g <u>deux fonctions continues sur</u> $\underset{\sim}{Z}(m)$ <u>à valeurs dans</u> $\underset{\sim}{C}_p$, <u>la fonction</u> $h : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}_p$ <u>définie, pour</u> $n \in \underset{\sim}{N}$, <u>par</u>

$$h(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i)\, f(n - i)$$

<u>est prolongeable en une fonction continue sur</u> $\underset{\sim}{Z}(m)$ <u>notée</u> $h = f * g$.

En effet la fonction génératrice $H(X) = \sum_{n\geq 0} h(n)\, X^n$ est le produit de $F(X) = \sum_{n\geq 0} f(n)\, X^n$ et $G(X) = \sum_{n\geq 0} g(n)\, X^n$. Donc H est prolongeable en un élément analytique nul à l'infini sur Δ_m . Le produit de convolution ainsi défini sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ en fait une algèbre de Banach (pour la norme $\|f\|_\infty \sup_{t \in \underset{\sim}{Z}(m)} |f(t)|$).

<u>Application</u>. - En choisissant $f_\chi(x) = \chi(x) \log \langle x\rangle$ et $g(x) = 1$, alors $h_\chi = f_\chi * 1$ est continue sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ et satisfait

(i) $h_\chi(0) = 0$,

(ii) $h_\chi(1 + x) = \chi(x) \log \langle x\rangle + h_\chi(x)$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

(iii) $\|h_\chi\| \leq |p|$.

En posant $\Gamma_\chi(x) = \exp(h_\chi(x))$, ce qui est possible d'après (iii), on obtient le théorème.

COROLLAIRE 1.2. - La fonction Γ_χ satisfait, pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$;

$$\Gamma_\chi(x)\ \Gamma_\chi(1 - x)^{\chi(-1)} = 1 \ . \tag{6}$$

Soit en effet $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$, alors

$$u_\chi(- x) = \langle - x\rangle^{\chi(-x)} = \langle x\rangle^{\chi(x)\chi(-1)} = u_\chi(x)^{\chi(-1)} \ .$$

Donc, pour n entier positif, on a

$$\Gamma_\chi(0) = (\prod_{j=1}^{n} u_\chi(- n))\ \Gamma_\chi(- n) = \Gamma_\chi(1 + n)^{\chi(-1)}\ \Gamma_\chi(- n) = 1 \ ,$$

d'où le corollaire, par continuité.

Ainsi, si χ est pair, $\Gamma_\chi(x)\ \Gamma_\chi(1 - x) = 1$ et si χ est impair $\Gamma_\chi(x) = \Gamma_\chi(1 - x)$. Dans le cas particulier où $\chi = 1_p$, et compte tenu du facteur de proportionnalité (5), on retrouve les relations (2) pour la fonction Γ_p de Morita. Par exemple, si χ est pair on a $\Gamma_\chi(\frac{1}{2})^2 = 1$, et comme $|\Gamma_\chi(x) - 1| < 1$ on en déduit $\Gamma_\chi(\frac{1}{2}) = 1$.

2. Série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$.

On connait des relations entre les propriétés d'analyticité locale d'une fonction g sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ et des propriétés de prolongeabilité hors de Δ_m pour la fonction génératrice $G(X)$ ([1] ou [2]) : ceci permet de montrer par **exemple**, que si f et g sont localement analytiques sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ avec un rayon d'analyticité au moins ρ , il en est de même pour $f * g$. Ceci permettrait de montrer que $\log \Gamma_\chi$ est localement analytique et d'évaluer son rayon d'analyticité. Cependant un calcul direct permet de déterminer explicitement la série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$: en utilisant la relation fonctionnelle (4) on peut en déduire la série de Taylor en tout point de $\underset{\sim}{Z}(m)$.

THEOREME 2. - Pour $z = (0 , x) \in \{0\} \times \{p^e \underset{\sim}{Z}_p\} = f\ \underset{\sim}{Z}(m)$, on a

$$\log \Gamma_\chi(1 + z) = - \gamma_p(\chi)\ x + \sum_{j\geq 2} \frac{(- 1)^j}{j}\ L_p(j , \chi_{j-1})\ x^j \tag{7}$$

où $\chi_j = \chi\ \omega^{-j}$ et $\gamma_p(\chi) = L_p(1 , \chi)$ si χ est non trivial et

$$\gamma_p(\chi) = \lim_{s\to 0} (L_p(1 + s , \chi) - \frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{s}$$

si χ est trivial.

<u>Remarque</u> 1. - On retrouve exactement la formule de KOBLITZ [8] et DIAMOND [5] lorsque f est une puissance de p.

<u>Remarque</u> 2. - On déterminera, au § 3, le domaine de convergence de la série (7) : il peut être plus grand que le domaine de validité de la relation (7).

<u>Démonstration</u>. - On sait que, uniformément pour $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$\chi(n) \log \langle x \rangle = \lim_{h\to\infty} \left(\frac{1}{p^h} \left(\langle x\rangle^{p^h} - 1\right)\right) .$$

Posons

$$L_h(n) = \sum_{j=0}^{n} \chi(j) \frac{\langle j\rangle^{p^h} - 1}{p^h} ,$$

alors $\log \Gamma_\chi(1 + n) = \lim_{h\to\infty} L_h(n)$.

Si n est multiple de f, on peut encore écrire

$$L_h(n) = \frac{1}{p^h} \left(\left(\sum_{j=0}^{n} \chi(j)\ \omega(j)^{-p^h} j^{p^h}\right) - \sum_{j=0}^{n} \chi(j)\right.$$

$$= \frac{1}{p^h}\left[\frac{1}{1 + p^h} \left(B_{1+p^h, \chi_{p^h}}(n) - B_{1+p^h, \chi_{p^h}}(0)\right) - \epsilon(\chi) \frac{\varphi(f)}{f} n\right]$$

où $\epsilon(\chi)$ vaut 1 si χ est trivial, et 0 si non.

On a donc

$$L_h(n) = \sum_{j=0}^{1+p^h} c_{j,h}\, n^j$$

avec

$$c_{j,h} = \frac{1}{p^h(1 + p^h)} \binom{1 + p^h}{j} B_{1+p^h-j, \chi_{p^h}} - \frac{\epsilon(\chi)}{p^h} \frac{\varphi(f)}{f} \delta_{j,1} .$$

Pour j fixé, $j > 1$, posons $\psi = \chi\, \omega^{1-j} = \chi_{j-1}$, alors

$$\chi_{p^h} = \chi\, \omega^{-p^h} = \chi_{j-1}\, \omega^{j-p^h-1} = \psi_{1+p^h-j} ;$$

ainsi, pour $j \geqslant 2$,

$$B_{1+p^h-j, \chi_{p^h}} = B_{1+p^h-j, \psi_{1+p^h-j}} .$$

Or on sait que, pour $n \geqslant 1$,

$$B_{n,\chi\, \omega^{-n}} = - n \frac{L_p(1 - n , \chi)}{1 - \chi\, \omega^{-n}(p).p^{n-1}} ,$$

on a donc

$$c_{j,h} = \frac{1}{j(j-1)} \binom{p^h - 1}{j - 2} B_{1+p^h-j,\psi_{1+p^h-j}} - \frac{\varepsilon(\chi)}{p^h} \delta_{j,1} \frac{\varphi(f)}{f}$$

$$= - \frac{1}{j(j-1)} (1 + p^h - h) \binom{p^h - 1}{j - 2} \frac{L_p(j - p^h , \chi_{j-1})}{1 - \chi\, \omega^{j-1-p^h}(p).p^{p^h-j}} - \frac{\varepsilon(\chi)}{p^h} \frac{\varphi(f)}{f} \delta_{j,1}$$

quand $h \to +\infty$, on obtient, pour $j \geqslant 2$, ou pour $j \geqslant 1$ si χ est non trivial,

$$c_j = \lim_{h\to\infty} c_{j,h} = \frac{1}{j} (-1)^{j-2} L_p(j , \chi_{j-1})$$

Pour $j = 1$ et χ trivial, on sait qu'au voisinage de $s = 0$ on a

$$L_p(1 + s , \chi) = \frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{s} + \gamma_p(\chi) + \mathcal{O}(s) ,$$

ce qui donne, lorsque $h \to \infty$,

$$c_{1,h} = \frac{1}{1 - \chi\, \omega^{-1}(p).p^{p^h-1}} \left(\frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{p^h} - \gamma_p(\chi) + \mathcal{O}(p^h)\right) - \frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{p^h}$$

d'où

$$\lim_{h\to\infty} c_{1,h} = - \gamma_p(\chi) .$$

Ceci démontre la validité de (7) pour $x = kf$, $k \in \mathbb{N}$, et donc, par densité, pour $z \in f\, \mathbb{Z}(m)$.

COROLLAIRE 2.1. - <u>Soit</u> $c \in \mathbb{Z}$, $(c , f) = 1$ <u>et</u> $E_{1,c}$ <u>la mesure de Bernoulli associée sur</u> $\mathbb{Z}(m)$, <u>alors pour</u> $z \in \mathbb{Z}(m)$, $z = (0 , x)$, $|x|_p < p\, |f|_p$, <u>on a</u>

$$\log \Gamma_\chi(z) - c\, \chi(c) \log \Gamma_\chi\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$= \int_{\chi(m)} \chi(t) \left(\log(\langle 1 + \frac{x}{t}\rangle - \frac{x}{t}\right) E_{1,c}(t) - (1 - \chi(c))\, \gamma_p(\chi)\, x .$$

On sait en effet [8] que $(1 - c^{1-j}\, \chi(c)\, L_p(j , \chi_{j-1}) = - \int_{\chi(m)} \chi(j)\, t^{-j}\, E_{1,c}(t)$, et le corollaire se déduit de (7) en y reportant l'expression ci-dessus.

3. Formule de multiplication de Gauss.

M. BOYARSKY [4] démontre que, pour $(N , p) = 1$ et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a

$$(8) \qquad \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_p\left(\frac{x + i}{N}\right) = \Gamma_p(x).N^{-(x-1-[(x-1)/p]} (-1)^A\, \Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^B ,$$

où A et B sont des constantes dépendant de N. En appliquant la même démarche on obtient ici une formule analogue.

Soit p_χ la fonction définie sur les entiers positifs par

$$p_\chi(1 + n) = \Sigma_{j=0}^{n} \chi(j) = (\chi * 1)(n)$$

elle est continue sur $\underset{\sim}{Z}(m)$.

Pour $\chi = 1_p$ et $m = 1$, on trouve $p_\chi(1 + n) = n - [\frac{n}{p}]$.

Soit $N > 1$, $(N , f) = 1$, pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$ posons

$$\Phi_{\chi,N}(x) = \Gamma_\chi(\tfrac{x}{N}) \, \Gamma_\chi(\tfrac{1 + x}{N}) \, \ldots \, \Gamma_\chi(\tfrac{N - 1 + x}{N}) \, . \tag{9}$$

En notant $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$, on a

$$\Phi_{\chi,N}(1 + x)/\Phi_{\chi,N}(x) = u_\chi(\tfrac{x}{N}) = \langle x\rangle^{\chi(x)\bar{\chi}(N)} \, \langle N\rangle^{-\chi(x)\bar{\chi}(N)} \, .$$

Pour $n \in \underset{\sim}{N}$, on en déduit

$$\Phi_{\chi,N}(n) = (\Pi_{y=0}^{n-1} u_\chi(\tfrac{y}{N})) \; \Phi_{\chi,N}(0) = \Gamma_\chi(n)^{\bar{\chi}(N)} \, \langle N\rangle^{-p_\chi(n)\bar{\chi}(N)} \; \Phi_{\chi,N}(0) \, .$$

Par continuité des deux membres on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $N > 1$, $(N , f) = 1$, <u>et</u> $\Phi_{\chi,N}(x) = \Pi_{i=0}^{N-1} \Gamma_\chi(\frac{x + i}{N})$, <u>alors</u>

$$\Phi_{\chi,N}(x) = \Gamma_\chi(x)^{\bar{\chi}(N)} \, \langle N\rangle^{-p_\chi(x)\bar{\chi}(N)} \; \Phi_{\chi,N}(0) \, . \tag{10}$$

<u>Remarque</u> 1. - Si χ est pair, $\Phi_{\chi,N}(0) = \Pi_{i=0}^{N-1} \Gamma_\chi(\frac{i}{N}) = 1$, grâce à la relation (6) .

<u>Remarque</u> 2. - Si $\chi^2 = 1$, $p_\chi(x) \in \underset{\sim}{Z}$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}$, et $\Gamma_\chi(n)$ est algébrique (dans $\underset{\sim}{Q}(\omega)$) pour $n \in \underset{\sim}{Z}$. Dans ce cas,

$$\Phi_{\chi,N}(x) \in \Phi_{\chi,N}(0).\underset{\sim}{Q}(\omega) \quad \text{pour} \quad x \in \underset{\sim}{Z} \, .$$

<u>Remarque</u> 3. - Si à la fois χ est pair et $\chi^2 = 1$, $\Phi_{\chi,N}(x) \in \underset{\sim}{Q}(\omega)$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}$. Cependant aucun de ces résultats ne permet de préciser la nature des valeurs $\Gamma_\chi(\frac{i}{N})$ prises individuellement.

4. Analyticité.

4.1. Dépendance en x .

Pour χ fixé, on remarque que $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$ est localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ avec un rayon d'analyticité $|p|^{-1/(p-1)}$: en effet, $\exp(\chi(x) \log \langle x\rangle)$ a un rayon d'analyticité locale donné par $v(\log\langle x\rangle - 1) > 1/(p-1)$ soit $v(\langle x\rangle - 1) > 1/(p-1)$. Pour connaître le rayon d'analyticité locale de $\Gamma_\chi(x)$ il suffit donc de le déterminer en $x = 0$ (ou $x = 1$, puisque, pour $x \in f\,\underset{\sim}{Z}(m)$, $\Gamma_\chi(x) = \Gamma_\chi(1+x)$).

THÉORÈME 4.1. – <u>La série de Taylor de</u> $\Gamma_\chi(1+z)$ <u>en</u> $z = 0$ <u>définit une fonction analytique bornée sur</u> $\{z = (0\,,\,x)\ ;\ v_p(x) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\}$ <u>et sa somme coïncide avec</u> $\Gamma_\chi(1+z)$ <u>pour</u> $v_p(x) \geq v_p(f)$.

Considérons d'abord la série de Taylor

(7) $$\log \Gamma_\chi(1+z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j\ ,\ \text{où}\quad c_1 = -\gamma_p(\chi)$$

et

$$c_j = \frac{(-1)^j}{j}\, L_p(j\,,\,\chi_{j-1}) \quad \text{pour}\quad j \geqslant 2\ .$$

On sait que $c_1 \in \mathcal{O}_K$ et $p\,j(j-1)\,c_j \in \mathcal{O}_K$ pour $j \geqslant 2$. Ainsi la série

$$\ell(t) = t + \sum_{j\geqslant 2} \frac{1}{p\,j\,(j-1)}\, t^j$$

domine la série (7). En étudiant le polygone de Newton de ℓ, on vérifie que

$$v_p(\ell(t)) > \frac{1}{p-1} \quad \text{pour} \quad v_p(t) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\ .$$

Pour ces valeurs de t,

$$v_p\left(\sum_{j\geq 1} c_j\, t^j\right) > \frac{1}{p-1}$$

et, en passant à l'exponentielle, on obtient la série de Taylor de Γ_χ : $\exp(\sum_{j\geq 1} c_j\, x^j)$ qui, pour $v_p(x) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$, converge vers un nombre y de $\mathcal{O}_K$, tel que $v_p(y-1) > \frac{1}{p-1}$. La seconde assertion résulte immédiatement du théorème 2.

Remarquons que lorsque $v_p(f) > 1$ (i. e. $f = m\,p^e$, $e > 1$) l'intersection du disque de convergence de la série de Taylor de Γ_χ en un point $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$ avec $\underset{\sim}{Z}(m)$ contient plusieurs classes modulo $f.\underset{\sim}{Z}(m)$, alors que la coïncidence de la somme de cette série de Taylor avec Γ_χ n'est assurée que sur $z + f\,\underset{\sim}{Z}(m)$.

<u>4.2. Dépendance en</u> χ.

Supposons maontenant que m est fixé et que χ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet de conducteurs $f(\chi) = m\,p^e$, $e \geqslant 1$. Alors χ parcourt le sous-groupe de torsion $\widehat{X(m)}_{\text{tors}}$ du groupe $\widehat{X(m)}$ des caractères continus de $X(m)$ dans $\mathbb{C}_p^*$ (où $X(m) = \underset{\sim}{Z}(m)^*$ et $\hat{G} = \text{Hom cont}\,(G\,,\,\mathbb{C}_p^*)$). On sait (cf. par exemple [2]) que $\widehat{X(m)}$ a une structure naturelle de variété analytique

$$\widehat{X(m)} \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z})^* \times (\underset{\sim}{Z}/(p-1)\,\underset{\sim}{Z}) \times \mathcal{U}_p$$

où $\mathcal{U}_p = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \ ; \ |x - 1| < 1\}$.

Soit $E = \mathcal{C}(X(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$ (resp. $F = \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$) muni de la norme de la convergence uniforme. On peut considérer E comme un facteur direct de F : toute $g \in E$ est prolongée à $\underset{\sim}{Z}(m)$ en prenant $g = 0$ sur $\underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$.

Notons $\log$ la fonction de E (resp. F) définie par $x \dashrightarrow \log \langle x \rangle$. Pour $g \in F$, posons $L(g) = (g.\log) * 1$, alors $L(g) \in F$, et L est une application linéaire continue de E dans F , $\|L\| = |p|$. Si $g = \chi$ est un caractère de Dirichlet, $L(\chi)(x) = \log \Gamma_\chi(1 + x)$. On voit ainsi que $\chi \longrightarrow \log \Gamma_\chi$ est la restriction à $\widehat{X(m)}$ d'une application linéaire continue de F dans lui-même (ou de E dans F). Or on sait que la restriction à $X(m)$ (resp. $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$) des applications linéaires continues de E (resp. F) dans F , c'est-à-dire des <u>mesures</u> sur $X(m)$ (resp. $\underset{\sim}{Z}(m)$) à valeurs dans F est l'espace <u>des fonctions analytiques bornées</u> sur $\widehat{X(m)}$ (resp. $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$) , à valeurs dans F .

THÉORÈME 4.2. - <u>Il existe une unique fonction analytique bornée sur</u> $\widehat{X(m)} = \mathrm{Hom\ cont}\,(X(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p^*)$ <u>et à valeurs dans</u> $F = \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m)\ ,\ \underset{\sim}{C}_p)$, <u>notée</u> L , <u>et telle que, lorsque</u> χ <u>est un caractère de Dirichlet de conducteur</u> $f = m\,p^e$, $e \geq 1$, <u>on ait, pour</u> $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

$$L(\chi)(x) = \log \Gamma_\chi(1 + x) .$$

<u>Les images</u> $L(\varphi)$ <u>des</u> $\varphi \in \widehat{X(m)}$ <u>satisfont les relations fonctionnelles</u>

$$L(\varphi)(1 + x) = \varphi(x)\ \log \langle x \rangle + L(\varphi)(x)$$

(11)

$$L(\varphi)(1 - x) + \varphi(-1)\ L(\varphi)(x) = 0 .$$

<u>Remarque</u> 1. - Comme $\log \langle x \rangle = 0$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$, l'application L de F dans lui-même définie ci-dessus s'annule sur le sous-espace F_0 des fonctions nulles sur $X(m)$, supplémentaire naturel de E dans F .

<u>Remarque</u> 2. - Soit $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ le groupe des caractères additifs de $\underset{\sim}{Z}(m)$: L définit encore par restriction à $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ une fonction analytique bornée sur cette variété. Si $\theta \in \widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ et $\varphi \in \widehat{X(m)}$ sont deux éléments de torsion d'ordres respectifs $m.p^h$ et $\varphi(m)(p - 1)\ p^{h-1}$, la relation linéaire entre φ et les θ^j , $j = 0\ , \ldots ,\ m\,p^h - 1$, lorsqu'on leur applique L , fait apparaître la somme de Gauss $G(\theta\ ,\ \varphi)$ comme quotient de deux fonctions analytiques bornées sur $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ et $\widehat{X(m)}$ à valeurs dans F , ou à valeurs scalaires si on fixe un point de $\underset{\sim}{Z}(m)$.