GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

FRANCISCO BALDASSARRI

Construction d'un F-cristal associé à un groupe p-divisible sur un anneau ou un corps de séries formelles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 13, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A8_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 13, 11 p.
21 avril et 12 mai 1980

CONSTRUCTION D'UN F-CRISTAL ASSOCIÉ À UN GROUPE p-DIVISIBLE SUR UN ANNEAU OU UN CORPS DE SÉRIES FORMELLES

par Francisco BALDASSARRI (*)
[Università di Padova]

Le but de cet exposé est d'associer à un groupe p-divisible sur un anneau ou un corps de séries formelles en une indéterminée, une équation différentielle p-adique avec structure de Frobenius. On pourrait prouver que cette équation différentielle se prête à classifier le groupe de départ : cela ne sera pourtant pas expliqué ici.

Il existe déjà une telle construction, obtenue par MESSING et BERTHELOT, par l'emploi de la cohomologie cristalline. Je voudrais donner ici un procédé différent qui se base sur la théorie de DIEUDONNE sur un anneau (ou un corps) parfait et sur une nouvelle méthode de descente inséparable.

Soient donc :

k = corps parfait de caractéristique $p > 0$,

$R = k[[x]]$, $Q = k((x))$,

$\mathcal{R} = R^{\text{perfectionné}}$, $\mathcal{Q} = Q^{\text{perfectionné}}$,

A = algèbre profinie d'un groupe p-divisible G sur R (ou Q),

A' = algèbre profinie de l'extension de G sur $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{Q}'$) (c'est-à-dire, si $A = \text{proj lim } A(n)$, $A' = \text{proj lim } A'(n)$, où $A'(n) = A(n) \otimes \mathcal{R}$ (ou $\mathcal{Q}$) ;

$$L = \text{proj lim}_{r,s} \underset{\sim}{Z}[x_0 , x_{-1} , x_{-2} , \ldots]/(x_{-r} , x_{-r-1} , \ldots)^s ,$$

avec la topologie limite projective des topologies discrètes.

On dénote encore par $f_i = f_i(x_i , x_{i-1} , \ldots , x_0 ; y_i , \ldots , y_0)$ les polynômes en les indéterminées x_j , y_j qui donnent la somme de Witt

$$(x_0 , x_1 , \ldots , x_n) + (y_0 , y_1 , \ldots , y_n) = (f_0 , f_1 , \ldots , f_n) .$$

Alors $\lim_{i\to+\infty} f_i(x_0 \hat{\otimes} 1 , x_{-1} \hat{\otimes} 1 , \ldots , x_{-i} \hat{\otimes} 1 ; 1 \hat{\otimes} x_0 , \ldots , 1 \hat{\otimes} x_{-i})$ existe dans $L \hat{\otimes}_{\underset{\sim}{Z}} L$. On l'appelle :

$$\Phi(x_0 \hat{\otimes} 1 , x_{-1} \hat{\otimes} 1 , \ldots ; 1 \hat{\otimes} x_0 , 1 \hat{\otimes} x_{-1} , \ldots) .$$

(*) Texte reçu le 8 décembre 1980.

Francisco BALDASSARRI, Seminario matematico, Università di Padova, 7 via Belzoni, I-35100 PADOVA (Italie).

On définit sur L une structure d'algèbre de Hopf en posant

$$\underset{\sim}{P}x_{-i} = \Phi(x_{-i} \hat{\otimes} 1 , x_{-i-1} \hat{\otimes} 1 , \ldots ; 1 \hat{\otimes} x_{-i} , 1 \hat{\otimes} x_{-i-1} , \ldots) .$$

Pour tout anneau topologique S de caractéristique p, on pose

$$\operatorname{cov} S = \operatorname{Hom}_{\text{ann top}}(L , S) .$$

Si S est complet, $\operatorname{cov} S$ devient un groupe en posant

$$a + b = \mu_S(a \hat{\otimes} b) \underset{\sim}{P}_L ,$$

où μ_S dénote le produit de S, et $\underset{\sim}{P}_L$ le coproduit de L.

Les éléments de $\operatorname{cov} S$, les covecteurs à composantes dans S, se dénotent par des suites ; si $a \in \operatorname{cov} S$, on écrit

$$a = (\ldots , a_{-1} , a_0) \quad \text{quand} \quad a_{-i} = a(x_{-i}) \in S .$$

Si S est une algèbre sur l'anneau parfait P, $\operatorname{cov} S$ devient un $W(P)$-module dans chacune des structures suivantes

$$\{\alpha\} a = (\ldots , \alpha^{p^{j-1}} a_{-1} , \alpha^{p^j} a_0) ,$$

où $\{\alpha\}$ dénote le représentant de Teichmüller de $\alpha \in P$. Ce $W(P)$-module se dénote par $\operatorname{cov}_j(S)$. On a les homomorphismes $W(P)$-linéaires

$$T_j : \operatorname{cov}_j S \longrightarrow \operatorname{cov}_{j-1} S$$

$$(\ldots , a_{j-1} , a_j) \longmapsto (\ldots , a_{j-2} , a_{j-1})$$

et on pose

$$\operatorname{biv} S = \operatorname{proj\,lim}_j(\operatorname{cov}_j S , T_j) .$$

Les éléments de $\operatorname{biv} S$ se dénotent comme des suites, appellées bivecteurs, d'éléments de S, $(\ldots , a_{-2} , a_{-1} ; a_0 , a_1 , \ldots)$.

Les lois de $W(P)$-module sont données par

$$(a + b)_i = \Phi(a_i , a_{i-1} , \ldots ; b_i , b_{i-1} , \ldots) ,$$

$$(\{\alpha\} a)_i = \alpha^{p^i} a_i .$$

Si S est parfait $\operatorname{biv} S$ contient $\underset{\sim}{Q}W(S)$. On définit une topologie dans $\operatorname{biv} S$, en prenant comme système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des

$$U_n = \{a \in \operatorname{biv} S ; \ a_i^{p^{-i}} \in U \text{ pour tout } i \leq n\} ,$$

où U est un voisinage de 0 dans S, et $n \in \underset{\sim}{Z}$. Le complété $\operatorname{Biv} S$ de $\operatorname{biv} S$ est, dans tous les cas qui nous intéressent, un anneau, dans l'extension par continuité du produit de $\underset{\sim}{Q}W(S)$, qui est dense dans Biv S .

Revenons maintenant aux covecteurs dans le cas où $S = A'$, $P = \mathcal{R}$ ou $\mathcal{Q}$. Le $W(P)$-module $\mathrm{cov}_j\, A'$ contient un sous-module intéressant

$$\mathcal{C}_j\, A' = \mathrm{Hom}_{\text{bigèbre top}}(L\ ,\ A')\ .$$

Si $a \in \mathcal{C}_j\, A'$, i. e. a est canonique, on a donc

$$Pa_{-i} = \Phi(a_{-i} \hat{\otimes} 1\ ,\ a_{-i-1} \hat{\otimes} 1\ ,\ \dots\ ;\ 1 \hat{\otimes} a_{-i}\ ,\ \dots)\ .$$

Il existe encore

$$F :\ \mathcal{C}_j\, A' \longrightarrow \mathcal{C}_j\, A'$$

$$(a_{-i}) \longmapsto (a^p_{-i})$$

$$V :\ \mathcal{C}_j\, A' \longrightarrow \mathcal{C}_j\, A'$$

$$(a_{-i}) \longmapsto (b_{-i})$$

où $b_{-i} = a_{-i-1} = Va_{-i}$, et on a $FV = VF = p$. Donc $\mathcal{C}_j\, A'$ est un module sur l'anneau de Dieudonné

$$D_p = W(P)[F\ ,\ V]_\sigma/(FV - p\ ,\ VF - p)\ ,\quad Fa = a^\sigma F\ ,\quad VA = a^{\sigma^{-1}} V \quad \text{si}\quad a \in W(P)\ ,$$

où $\sigma :\ W(P) \longrightarrow W(P)$ est le Frobenius canonique.

Le théorème suivant est en partie classique, et dû à BARSOTTI et DIEUDONNÉ, et a été récemment complété par BERTHELOT.

THÉORÈME. - Le foncteur $A' \longmapsto \mathcal{C}_j\, A'$ établit une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{Q}$) et la catégorie des $D_{\mathcal{R}}$ (ou $D_{\mathcal{Q}}$)-modules libres et finis en tant que $W(\mathcal{R})$ (ou $W(\mathcal{Q})$)-modules. Le rang de $\mathcal{C}_j\, A'$ égale la hauteur de A' .

Observons ici que $\mathcal{C}_j\, A'$ est isomorphe à un sous-$W(\mathcal{R})$- (ou $W(\mathcal{Q})$-)module de biv $\mathcal{A}'$, où $\mathcal{A}' = \mathrm{inj}\,\lim(A'\ ,\ p.\mathrm{id}_{A'})$, que l'on dénote par $\mathcal{C}'_j\, A'$. Précisément, on a $a = (a_i)_{i \in \underset{\sim}{Z}} \in \mathcal{C}'_j\, A'$ si, et seulement si, $Va_i = a_{i-1}$ pour tout $i \in \underset{\sim}{Z}$ et $(a_i)_{i \leq j} \in \mathcal{C}_j\, A'$.

Voilà donc notre programme :

1° Substituer à A (algèbre d'un groupe p-divisible sur R (ou Q)) son extension A' sur $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{Q}$), munie d'une donnée de descente par rapport à $R \hookrightarrow \mathcal{R}$ (ou $Q \hookrightarrow \mathcal{Q}$).

2° Relever la donnée de descente de 1° en une connexion sur (un sous-module de) $\mathcal{C}_j\, A'$ par rapport à certaines dérivations (d'un sous-anneau) de $W(\mathcal{R})$ (ou $W(\mathcal{Q})$).

Il faut maintenant être moins vague.

1° La donnée de descente sur A' peut s'exprimer de la façon suivante. On choisit tout d'abord une structure auxiliaire d'hyperalgèbre de Lie sur R. Disons tout de suite que les résultats qui nous intéressent s'obtiennent en choisissant sur R une structure provenant d'un groupe p-divisible. Je donnerai ensuite l'exemple du tore. D'habitude, une donnée de descente s'exprimerait comme une représentation :

$$T : \mathrm{End}_R(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathrm{End}_R(A') \quad (\text{ou } Q, \mathcal{Q}),$$

qui soit un homomorphisme pour les deux structures (gauche et droite) de $\mathcal{R}$-modules (ou $\mathcal{Q}$) de ces objets. Mais le choix d'une structure de Lie sur R, nous permet de décrire T seulement par sa restriction aux endomorphismes R-linéaires invariants par rapport à la structure de Lie choisie (d est invariant si

$$\underset{\sim}{P}d = (\mathrm{id} \mathbin{\hat{\otimes}} d)\, \underset{\sim}{P}) .$$

Or, il est bien connu que si R est un groupe p-divisible les endomorphismes R-linéaires invariants de $\mathcal{R}$ (ou Q-linéaires invariants de $\underset{\sim}{\mathcal{Q}}$) forment une k-algèbre commutative isomorphe au dual de Barsotti-Serre-Tate $\tilde{R}$ de R. On prouve le théorème suivant.

THÉORÈME. - Soit $\mathrm{Spf}\, R$ un groupe p-divisible local de dimension 1 sur k. Une donnée de descente (automatiquement effective) sur $\mathrm{Spf}\, A'$, groupe p-divisible sur $\mathcal{R}$ (ou $\mathcal{Q}$), par rapport a $R \hookrightarrow \mathcal{R}$ (ou $Q \hookrightarrow \mathcal{Q}$) est une représentation

$$T : \tilde{R} \longrightarrow E_R(A') = \mathrm{End}_R(A') \quad (\text{ou } E_Q(A')),$$

$$d \longmapsto T_d$$

où $\tilde{R}$ désigne le dual de R, telle que (*)

(i) T est continue pour la topologie naturelle de $\tilde{R}$ et celle de la convergence simple, sur la naturelle de A', de $E_R(A')$;

(ii) $d(ra) = \mu_{sc}(\underset{\sim}{P}d)(r \otimes_R a)$: où μ_{sc} est le produit scalaire

$$\mu_{sc} : \mathcal{R} \otimes_R A' \longrightarrow A'$$

(on a écrit d pour T_d) ;

(iii) $d(aa') = \mu(\underset{\sim}{P}d)(a \otimes a')$, où μ est le produit de A' ;

(iv) $\underset{\sim}{P}(da) = (\underset{\sim}{P}d)(\underset{\sim}{P}a)$,

($i(dr) = di(r)$, où $i : \mathcal{R} \longrightarrow A'$ est l'unité ;

(*) Changements évidents dans le cas de Q, $\mathcal{Q}$.

(vi) $\varepsilon(da) = d\varepsilon(a)$, <u>où</u> $\varepsilon : A' \longrightarrow R$ <u>est la co-unité</u> ;

(vii) $\rho(da) = d\rho(a)$, <u>où</u> $\rho : A' \longrightarrow A'$ <u>est l'antipodisme</u>.

<u>Remarque</u>. - Il s'ensuit (de (i)-(vii)) que

$$\text{(viii)} \quad \begin{cases} dFa = F((Vd)a) , \\ V(da) = (Vd)(Va) , \\ d(p.id_{A'}, a) = p.id_{A'}(da) . \end{cases}$$

<u>Exemple</u>. - $R = k[[x]]$ = tore . Alors $\underset{\sim}{P}(x + 1) = (x + 1) \hat{\otimes} (x + 1)$. Il est possible d'interpréter R comme l'algèbre de Hopf des mesures sur $\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans k , avec la topologie de la convergence simple sur les fonctions continues de $\underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow k$ (k discret). Il suffit de dire que les ensembles mesurables de $\underset{\sim}{Z}_p$ sont les ouverts et qu'une mesure est une fonction $\aleph_0$-additive sur l'ensemble des mesurables, à valeurs dans k . Les lois d'hyperalgèbre sont données par

$$\mu\nu(U) = (\mu \times \nu)(S^{-1}(U)) ,$$

si $S : \underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow \underset{\sim}{Z}_p$ est l'addition ; c'est-à-dire que

$$\int_{\underset{\sim}{Z}_p} f \, \partial_{\mu\nu} = \int_{\underset{\sim}{Z}_p \times \underset{\sim}{Z}_p} f(x + y) \, \partial_\mu x \, \partial_\nu y , \quad \forall f : \underset{\sim}{Z}_p \longrightarrow k , \text{ continue} .$$

$$(\underset{\sim}{P}\mu)(U \times V) = \mu(U \cap V) .$$

$$\epsilon\mu = \mu(\underset{\sim}{Z}_p) .$$

Alors on identifie x avec $\delta_1 - 1$, où δ_1 est la mesure de Dirac centrée en 1 . On a en effet

$$(\underset{\sim}{P}\delta_1)(U \times V) = \delta_1(U \cap V) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \in U \cap V \\ 0 & \text{si } 1 \notin U \cap V . \end{cases}$$

Donc $\underset{\sim}{P}\delta_1 = \delta_1 \hat{\otimes} \delta_1$, $\delta_1^i = \delta_i$, etc.

Alors le dual (de Barsotti-Serre-Tate) de R est l'hyperalgèbre $\tilde{R}$ des fonctions sur $\underset{\sim}{Q}_p/\underset{\sim}{Z}_p$ à valeurs dans k , avec le coproduit

$$(\underset{\sim}{P}f)(x , y) = f(x + y) \quad \text{et} \quad \epsilon f = f(0) .$$

On voit donc que, pour avoir une vraie dualité, il faut passer à

$$\mathcal{R} = \text{inj lim}(R\ ,\ p.\mathrm{id}_R) = \text{le perfectionné de } R\ ,$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \text{inj lim}(\tilde{R}\ ,\ p.\mathrm{id}_{\tilde{R}})\ .$$

On a en effet :

$\mathcal{R}$ = hyperalgèbre des mesures à support compacte de $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans k ,

$\tilde{\mathcal{R}}$ = hyperalgèbre des fonctions uniformément continues de $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans k .

On a la dualité

$$\tilde{\mathcal{R}} \times \mathcal{R} \dashrightarrow k$$

$$(f\ ,\ \mu) \longmapsto \int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x)\ \partial_\mu x\ ,$$

et deux opérations

$$\tilde{\mathcal{R}} \times \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}$$

$$(f\ ,\ \mu) \longmapsto f\mu \quad \text{où} \quad \int_{\underset{\sim}{Q}_p} g(x)\ \partial_{f\mu} x = \int_{\underset{\sim}{Q}_p} g(x)\ f(x)\ \partial_\mu x$$

pour toute $g \in \tilde{\mathcal{R}}$, et

$$\mathcal{R} \times \tilde{\mathcal{R}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$$

$$(\mu\ ,\ f) \longmapsto \hat{f}_\mu \quad \text{où} \quad \hat{f}_\mu(x) = \int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x+y)\ \partial_\mu y\ .$$

Nous ne sommes ici intéressés qu'à la première opération. Là, on voit facilement que $\tilde{R} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$ s'identifie à l'ensemble des fonctions périodiques de période 1 sur $\underset{\sim}{Q}_p$, tandis que $R \hookrightarrow \mathcal{R}$ est formé par les mesures à support contenu dans $\underset{\sim}{Z}_p$. Il est donc évident que $\tilde{R}$ opère R-linéairement sur $\mathcal{R}$: si $f \in \tilde{R}$, $\mu \in R$, $g \in \tilde{\mathcal{R}}$ $\nu \in \mathcal{R}$, on a

$$\int g\ \partial_{f(\mu\nu)} = \int fg\ \partial_{\mu\nu} = \int_{\underset{\sim}{Q}_p \times \underset{\sim}{Q}_p} f(x+y)\ g(x+y)\ \partial_\mu x\ \ \partial_\nu y$$

$$= \int f(y)\ g(x+y)\ \partial_\mu x\ \partial_\nu y = \int g(x+y)\ \partial_\mu x\ \ \partial_{f\nu} y = \int g\ \partial_{\mu f\nu}$$

$$\Longrightarrow f(\mu\nu) = \mu(f\nu)\ .$$

On prouverait aussi aisément que $\nu \longmapsto f\nu$, sont tous les endomorphismes R-linéaires invariants de $\mathcal{R}$.

2° Comment relever l'action de $\tilde{R}$ sur A' en une connexion sur (un sous-module de) $C_j\ A'$ par rapport à certaines dérivations de (un sous-anneau de) $W(\mathcal{R})$ (ou $W(\mathcal{Q})$) ?

Il est tout d'abord possible de faire opérer $\mathcal{C}_j^! R$ sur $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$ (classique, BARSOTTI) et sur $\mathrm{Biv}\, \mathfrak{A}'$ (non classique). Il existe en effet un algorithme universel qui permet de définir, pour toute $\underset{\sim}{Z}$-hyperalgèbre commutative finie D et pour toute $\underset{\sim}{Z}$-algèbre commutative finie Λ, munie d'une application

$$D \times \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

$$(d\ ,\ \lambda) \longmapsto d\lambda$$

qui fait de Λ un D-module unitaire et satisfait à

$$d(\lambda\lambda') = \mu_\Lambda(\underset{\sim}{P}_D\, d)(\lambda \otimes_{\underset{\sim}{Z}} \lambda')$$

une opération

$$* :\quad W_n'(D) \times W_n(\Lambda) \longrightarrow W_n(\Lambda)\ ,$$

où $W_n'(D) = \{d \in W_n(D)\ ;\ \underset{\sim}{P}d = d \otimes 1 + 1 \otimes d\}$.

L'opération $d*$ est presque une dérivation de $W_n(\Lambda)$:

$$d*(x + y) = d*x + d*y$$

$$d*xy = \mu_{W_n(\Lambda)}\ \Phi(d* \otimes \mathrm{id}\ ,\ Vd* \otimes \mathrm{id}\ ,\ \ldots\ ;\ \mathrm{id} \otimes d*\ ,\ \ldots)(x \otimes y)$$

(donc, si l'on pouvait extraire des racines p-ièmes dans Λ ,

$$d. = \textstyle\sum_{i=0}^n p^{-i}((V^i\, d)*)^{p^i}$$

serait une dérivation de $W_n(\Lambda)$).

On a encore

$$(d + d')* = \Phi(d*\ ,\ Vd*\ ,\ \ldots\ ;\ d'*\ ,\ Vd'*\ ,\ \ldots)\ .$$

On passe de là à définir l'opération de $\mathcal{C}_j^! \tilde{R}$ sur $\mathrm{Biv}\, \mathcal{R}$, $\mathrm{Biv}\, \mathcal{Q}$ ou $\mathrm{Biv}\, \mathfrak{A}'$ par un argument de continuité. On prouve que $d*\mathcal{C}_j^!\, A' \subseteq \mathcal{C}_j^!\, A'$ pour tout $d \in \mathcal{C}_j^! \tilde{R}$. et on obtient finalement la structure suivante

$$* :\quad \mathcal{C}_j^! \tilde{R} \times \mathcal{C}_j^!\, A' \longrightarrow \mathcal{C}_j^!\, A'$$

$$(d\ ,\ a) \longmapsto d*a$$

telle que :

(a) $*$ est continue dans les deux variables séparément,

(b) $a \longmapsto d*a$ est $W(k)$-linéaire,

(c) $d*d'*a = d'*d*a$,

(d) $(d + d')*a = \Phi(d* , Vd* , \ldots ; d'* , Vd'* , \ldots)a$,

(e) $\{\alpha\}(d*a) = (\{\alpha\}d)*a$,

(f) $d*(ra) = \mu\Phi(d* \hat{\otimes} id , Vd* \hat{\otimes} id , \ldots ; id \hat{\otimes} d* , id \hat{\otimes} Vd* , \ldots)(r \hat{\otimes} a)$,

(g) $d*Fa = F((Vd)*a)$,

(h) $Vd*Va = V(d*a)$.

On voudrait maintenant poser $d.a = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i}(V^i d*)^{p^i} a$, pour obtenir une connexion sur $C_j^! A'$: mais cette série ne converge pas pour tout $a \in C_j^! A'$. Nous allons expliquer comment on surmonte cet obstacle dans le cas de R toroïdal (on prendra aussi A défini sur $\underset{\sim}{R}$, et $j = -1$). Nous aurons besoin d'étendre l'interprétation fonctionelle de $\mathcal{R}$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ à la caractéristique zéro. Cela est fait dans l'exemple suivant.

<u>Exemple</u>. - Si R = tore , $W(\mathcal{R})$, muni du coproduit obtenu appliquant composante par composante celui de $\mathcal{R}$, s'interprète comme une hyperalgèbre de mesure sur $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans $K = W(k)$ (mêmes lois qu'en caractéristique p). Si δ_a , $a \in \underset{\sim}{Q}$, dénote la mesure de Dirac centrée en a , en caractéristique p , son représentant de Teichmüller $\{\delta_a\} \in W(\mathcal{R})$ s'interprète comme la mesure de Dirac Δ_a centrée en a , en caractéristique 0 . Donc

$$W(\mathcal{R}) = \{\sum_{i,n\in \underset{\sim}{N}} a_{i,n}(\Delta_{p^{-n}} - 1)^i \; ; \quad a_{i,n} \in K \text{ et } \lim_{n\to+\infty} a_{i,n} = 0 ,$$
$$\text{uniformément par rapport à } i \},$$

muni de la topologie p-adique.

Soit $\underset{\sim}{R}$ le tore sur K , seul relèvement de R tel que Spf $\underset{\sim}{R}$ soit un groupe p-divisible sur K . Le <u>prolongement canonique</u> du relèvement $\underset{\sim}{R}$ de R dans $W(\mathcal{R})$ (unique homomorphisme continu de bigèbres $\varphi : \underset{\sim}{R} \longrightarrow W(\mathcal{R})$, tel que

$$\varphi(r)_0 = (r \mod p\underset{\sim}{R}) \text{ , pour tout } r \in \underset{\sim}{R})$$

s'interprète comme identification de $\underset{\sim}{R}$ avec $K[[\Delta_1 - 1]] \subset W(\mathcal{R})$. On a en effet $\underset{\sim}{P}\Delta_1 = \Delta_1 \hat{\otimes} \Delta_1$ dans $W(\mathcal{R})$ et dans $\underset{\sim}{R}$. Les endomorphismes continus $\underset{\sim}{R}$-linéaires invariants de $W(\mathcal{R})$ s'interprètent comme fonctions périodiques de période 1 de $\underset{\sim}{Q}_p$ à K . La correspondance

$$(\text{endomorphisme } G) \longleftrightarrow (\text{fonction } g)$$

est donnée par

$G(\mu)$ = mesure de densité g par rapport à μ , si $\mu \in W(\mathcal{R})$,

$g(a) = G(\Delta_a)(\underset{\sim}{Q}_p)$, si $a \in \underset{\sim}{Q}$.

Passons à $\tilde{R}$.

$\operatorname{Biv} \tilde{\mathcal{R}} = \{$fonctions continues de $\underset{\sim}{Q}_p$ **dans** $K' = \underset{\sim}{QK}\}$, avec topologie de la convergence uniforme sur les compactes,

$C'_{-1} \tilde{R}$ = sous-K-module de $\operatorname{Biv} \tilde{\mathcal{R}}$ engendré par la fonction x = identité : $\underset{\sim}{Q}_p \dashrightarrow K'$,

$W(\tilde{\mathcal{R}}) = \{$fonctions périodiques de période 1 de $\underset{\sim}{Q}_p$ **dans** $K\}$.

Pour interpréter l'opération

$$* : C'_{-1} \tilde{R} \times W(\mathcal{R}) \longrightarrow W(\mathcal{R}) ,$$

considérons l'équation fonctionelle

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i} \Psi(p^i T)^{p^i} .$$

On prouve que la solution formelle $\Psi(T) \in \underset{\sim}{Z}[[T]]$ de cette équation a un rayon de convergence p-adique infini, et que $\Psi(\underset{\sim}{Q}_p) \subseteq \underset{\sim}{Z}_p$. Si alors $\mu \in W(\mathcal{R})$, on a (non trivial)

$$(p^i x)*\mu = \Psi(p^i x)\mu = \text{mesure de densité } \Psi(p^i x) \text{ par rapport à } \mu .$$

Observons encore que, dans $\operatorname{Biv} \tilde{\mathcal{R}}$,

$$(Vf)(a) = f(pa) ,$$

si $a \in \underset{\sim}{Q}_p$ et si $f \in \operatorname{Biv} \tilde{\mathcal{R}}$ est regardée comme fonction de $\underset{\sim}{Q}_p$ à K'.

Soit $\mu \in W(\mathcal{R})$ tel que $x.\mu = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i}((p^i x)_*)^{p^i} \mu$ converge dans $W(\mathcal{R})$. Grâce à l'interprétation précédente et à l'équation fonctionelle qui définit Ψ, on voit que $x.\mu = x\mu$ = la mesure de densité x par rapport à μ. Il n'est donc pas surprenant que $\mu \longmapsto x.\mu$ soit une dérivation de $\underset{\sim}{R}$. Si μ, ν sont deux mesures sur $\underset{\sim}{Q}_p$ à valeurs dans K', on a en effet

$$\begin{aligned}
\int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x)\, \partial_{x(\mu\nu)} x &= \int_{\underset{\sim}{Q}_p} xf(x)\, \partial_{\mu\nu} x = \int_{\underset{\sim}{Q}_p\times\underset{\sim}{Q}_p} (x+y)\, f(x+y)\, \partial_\mu x\, \partial_\nu y \\
&= \int_{\underset{\sim}{Q}_p\times\underset{\sim}{Q}_p} xf(x+y)\, \partial_\mu x\, \partial_\nu y + \int_{\underset{\sim}{Q}_p\times\underset{\sim}{Q}_p} yf(x+y)\, \partial_\mu x\, \partial_\nu y \\
&= \int_{\underset{\sim}{Q}_p\times\underset{\sim}{Q}_p} f(x+y)\, \partial_{x\mu} x\, \partial_\nu y + \int_{\underset{\sim}{Q}_p\times\underset{\sim}{Q}_p} f(x+y)\, \partial_\mu x\, \partial_{y\nu} y \\
&= \int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x)\, \partial_{(x\mu)\nu} x + \int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x)\, \partial_{\mu(x\nu)} x = \int_{\underset{\sim}{Q}_p} f(x)\, \partial_{(x\mu)\nu+\mu(x\nu)} x
\end{aligned}$$

pour toute $f : \underset{\sim}{Q}_p \dashrightarrow K'$, uniformément continue. La dérivation $\mu \longmapsto x.\mu$ de $\underset{\sim}{R}$ est un générateur du K-module des dérivations invariantes de $\underset{\sim}{R}$.

Pour conclure cet exemple observons encore qu'on a, dans la topologie de $\operatorname{Biv} \tilde{\mathcal{R}}$,

$\lim_{n\to+\infty} \Psi(p^i x)^{p^n} = \{x_{-i}\}$ = représentant de Teichmüller

de la composante $(-i)$-ieme du bivecteur x ;

si $i \geqslant 1$, on a $\{x_{-i}\} \in W(\tilde{R})$, donc $\{x_{-i}\}$ est une fonction périodique de période 1 (à vrai dire de période p^{1-i}).

Nous pouvons maintenant prouver le résultat suivant.

THÉORÈME. - <u>Il existe un sous-$\underset{\sim}{R}$-module</u> M_A <u>de</u> $\mathcal{C}'_{-1} A'$ <u>tel que</u>

$\mathcal{C}'_{-1} A' = W(R) \otimes_{\underset{\sim}{R}} M_A$,

$FM_A \subseteq M_A$

$d*M_A \subseteq M_A$, <u>pour tout</u> $d \in \mathcal{C}'_{-1} \tilde{R}$.

<u>Démonstration</u> (Esquisse). - Il suffit de définir une donnée de descente convenable sur $\mathcal{C}'_{-1} A'$ par rapport à $\underset{\sim}{R} \hookrightarrow W(R)$. On l'obtient en prouvant d'abord que

$$(x*)^p\, a \equiv x*a \mod p\, \mathcal{C}'_{-1} A' \text{ , pour tout } a \in \mathcal{C}'_{-1} A'$$

(non trivial). On posera alors

$$\{x_{-i}\}a = \lim_{n\to+\infty}((p^i x)*)^{p^n} \text{ , pour tout } a \in \mathcal{C}'_{-1} A' .$$

On obtient de là une action contenue de $W(\tilde{R})$ sur $\mathcal{C}'_{-1} A'$, qui fournit, grâce à l'interprétation de l'exemple précédent, la donnée de descente cherchée.

C. Q. F. D.

On prouve finalement sans difficulté que

$$x.m = \sum_{i=0}^{\infty} p^{-i}((p^i x)*)^{p^i} m$$

converge dans M_A pour tout $m \in M_A$, et que

$$(x.)^p m \equiv x.m \pmod{pM_A} \text{ pour tout } m \in M_A .$$

Examinons en détail la structure obtenue. On a posé

$K = w(k)$;

$\underset{\sim}{R} = K[[X]]$ = tore sur K , i. e. $\underset{\sim}{P}(1 + X) = (1 + X) \hat{\otimes} (1 + X)$ et $F(1 + X) = (1 + X)^p$ = Frobenius <u>absolu</u> de $\underset{\sim}{R}$, induit par celui de $W(R)$ au moyen du prolongement canonique $\underset{\sim}{R} \hookrightarrow W(R)$;

$\mathcal{C}'_{-1} \tilde{R} = \underset{\sim}{D}$ = K-module des dérivations invariantes de $\underset{\sim}{R}$;

V : $\underset{\sim}{D} \longrightarrow \underset{\sim}{D}$, défini par l'identification $\underset{\sim}{D} = \mathcal{C}'_{-1} \tilde{R}$, ou bien par

$$F((Vd)(f(X))) = d(F(f(X)))$$

pour tout $f(X) \in \underset{\sim}{R}$; on a V = multiplication par p sur le K-générateur $D = (1 + x)d/dx$ de $\underset{\sim}{D}$. Soit $\underset{\sim}{D}' = \underset{\sim}{Z}_p D$.

Alors, M_A est un $\underset{\sim}{R}$-module libre et fini de rang égal à la hauteur de A ; il existe

$$F : M_A \longrightarrow M_A \text{ , F-semilinéaire,}$$

$$V : FM_A \longrightarrow M_A \text{ , } F^{-1}\text{-semilinéaire,}$$

tels que $FV = VF = p$; on a encore une application

$$\begin{aligned} \cdot : \underset{\sim}{D} \times M_A &\longrightarrow M_A \\ (d , m) &\longmapsto d.m \end{aligned}$$

telle que :

(i) $.$ est $W(k)$-bilinéaire,

(ii) $d.(rm) = (dr)m + r(d.m)$, pour tout $d \in \underset{\sim}{D}$, $r \in \underset{\sim}{R}$, $m \in M_A$,

(iii) $(d.)^p m \equiv d.m \pmod{pM_A}$ pour tout $d \in \underset{\sim}{D}'$ et $m \in M_A$ (donc "la connexion de M_A est topologiquement nilpotente, et sa réduite modulo p a p-courbure nulle"),

(iv) $d.Fm = F((Vd).m) = pF(d.m)$ pour tout $d \in \underset{\sim}{D}$ et $m \in M_A$.

On peut démontrer que le foncteur $A \longmapsto M_A$ est pleinement fidèle. On pourrait aussi donner un résultat analogue pour A défini sur Q . Si l'on avait choisi sur k une structure de hauteur $h > 1$, le résultat final s'exprimerait à l'aide de $\underset{\sim}{R}$ = le relèvement large de R sur K (c'est l'extension la plus générale d'un des relèvements S de R tels que $\operatorname{Spf} S$ soit un groupe p-divisible sur K , par une hyperalgèbre vectorielle de dimension $h - 1$ sur K) : on obtiendrait donc un système d'équations aux dérivées partielles.

J'espère être capable prochainement de comparer cette structure avec celle obtenue par BERTHELOT. Je voudrais seulement remarquer encore que le seul choix arbitraire dans le procédé ici présenté est la structure de groupe p-divisible sur $\operatorname{Spf} k[x]$. Une fois cette structure choisie, la construction est complètement canonique, en particulier en ce qui concerne les Frobenius en caractéristique 0 .