Groupe de travail d’analyse ultramétrique

Philippe Robba

Factorisation d’opérateurs différentiels à coefficients rationnels

Groupe de travail d’analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. n° 12, p. 1-3
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A7_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 12, 3 p.

24 mars 1980

FACTORISATION D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS RATIONNELS

par Philippe ROBBA (*)
[Université Paris-Sud, Orsay]

Lors de l'étude des équations différentielles p-adiques, DWORK et moi-même avons montré qu'il existait une factorisation d'un opérateur différentiel linéaire liée à la croissance des solutions de cet opérateur (Cf. [2] par exemple). Mais même si l'on partait d'un opérateur L à coefficients fractions rationnelles, l'opérateur unitaire R, associé aux solutions de L ayant un rayon de convergence donné, pouvait ne pas avoir ses coefficients rationnels mais seulement éléments analytiques (voir l'exemple de MONSKY discuté dans [2]).

On peut, par contre, espérer que, étant donné l'opérateur différentiel L à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$, si l'on a une propriété de factorisation avec coefficients analytiques dans $\mathbb{C}_p$ pour presque tous les nombres premiers p, on aura une propriété de factorisation avec coefficients rationnels.

Le résultat suivant semble vraisemblable.

Soit L un opérateur différentiel linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$. Supposons que :

- il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{Q}[[x]]$, linéairement indépendants, solutions de L, ayant un rayon de convergence ≥ 1 dans $\mathbb{C}_p$ pour presque tout p ;
- pour presque tout p, le noyau de L, analytique dans le disque générique de $\mathbb{C}_p$, est de dimension n.

Alors l'unique opérateur différentiel R d'ordre n, qui admet $u_1, \ldots, u_n$ comme solutions (et qui a priori a ses coefficients dans $\mathbb{Q}((x))$), a ses coefficients rationnels.

Le résultat que nous allons démontrer n'est pas le résultat espéré, mais montre comment aborder ce type de problème.

THÉORÈME. - Soit $L \in \mathbb{Q}(x)[D]$ un opérateur différentiel à coefficients rationnels tel que

1° L n'a pas de singularités dans le disque unité $D(0, 1^-)$ de $\mathbb{C}$, sauf peut-être en 0 où L a un point singulier régulier,

---

(*) Texte reçu le 10 juillet 1980.
Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS.

2° <u>L possède n solutions linéairement indépendantes</u> $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}[[x]]$,

3° <u>il existe un nombre premier q tel que, dans le disque générique</u> $D(t, 1^-)$ <u>de $\mathbb{C}_q$, L possède au plus n solutions analytiques linéairement indépendantes.</u>

<u>Alors l'opérateur différentiel unitaire $R \in \mathbb{Q}((x))[D]$ d'ordre n, dont $u_1, \dots, u_n$ sont solutions, a ses coefficients dans $\mathbb{Q}(x)$.</u>

<u>Remarques.</u>

(a) Le théorème n'a évidemment d'intérêt que si ordre de $L > n$.

(b) On trouvera dans [2] la définition du disque générique. D'après les résultats de [2] et l'hypothèse 2°, on sait que L a au moins n solutions linéairement indépendantes analytiques dans le disque générique $D(t, 1^-)$ de $\mathbb{C}_q$.

<u>Démonstration.</u> — Soit

$$R = D^n + A_1 D^{n-1} + \dots + A_n .$$

D'après le 2°, on a

$$A_i = B_i/W, \text{ où } B_i \in \mathbb{Z}[[x]],$$

et $W \in \mathbb{Z}[[x]]$ est le wronskien de $u_1, \dots, u_n$.

Soit s l'ordre de W en 0 ; écrivons $W(x) = x^s V(x)$, $V(0) \neq 0$, et considérons

$$x^s R = x^s D^n + A'_1 D^{n-1} + \dots + A'_n \quad \text{avec} \quad A'_i = B_i/V \in \mathbb{Q}[[x]] .$$

On va montrer que $A'_i \in \mathbb{Q}(x)$ en utilisant le critère de F. BERTRANDIAS ([1], théorème 5.4.6, p. 178).

Soit $S = \{p$ premiers tels que $\mathrm{ord}_p(V(0)) \neq 0\}$, c'est un ensemble fini.

Alors, pour tout i,

(a) pour $p \notin S$, $A'_i \in \mathbb{Z}_p[[x]]$,

(b) pour $p \in S$, B_i et V sont analytiques dans le disque unité $D(0, 1^-)$ de $\mathbb{C}_p$, donc A'_i est méromorphe dans ce disque.

(c) D'après l'hypothèse 1°, les fonctions $u_1, \dots, u_n$ sont analytiques dans le disque unité $D(0, 1^-)$ de $\mathbb{C}$, donc A'_i est méromorphe dans ce disque.

(d) D'après l'hypothèse 3°, la dimension du noyau de L, analytique dans le disque générique de $\mathbb{C}_q$, est n, ce qui entraîne, d'après le théorème 4.1. de [2] que A'_i est un élément analytique superadmissible, c'est-à-dire est un élément analytique sur un ensemble dont le complémentaire est formé d'une union finie de disques ne contenant aucune classe résiduelle.

Le critère de BERTRANDIAS nous montre alors que A'_i est rationnel.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP. "Le Mathématicien", 14).

[2] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p-adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.