Salah-Eddine Remmal

Mesure de transcendance partielle pour une famille de nombres liés aux solutions d'équations différentielles à points singuliers irréguliers

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. n° 9, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 9, 2 p.

3 mars 1980

MESURE DE TRANSCENDANCE PARTIELLE POUR UNE FAMILLE DE NOMBRES LIÉS AUX SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES À POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS

par Salah-eddine REMMAL (*)
[Université de Rabat]

L'objet de cette étude est motivée par une conjecture émise par ERDÖS et STRAUSS selon laquelle, si p désigne un nombre premier, le nombre p-adique $\sum_{n=0}^{+\infty} n!$ est transcendant.

Nous avons été amenés à introduire à ce propos la fonction $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n!\ z^n$.

La fonction f vérifie l'équation différentielle

$$z^2 \frac{d}{dz} y(z) = (1 - z)\, y(z) - 1 ,$$

qui admet, en $z = 0$, une singularité irrégulière.

La série qui définit la fonction f converge dans le disque

$$D = \{z \in \underset{\sim}{C}_p \ ; \ |z|_p < p^{1/(p-1)} ,$$

et présente quelques propriétés des G-fonctions et des E-fonctions (voir [1]).

A défaut du nombre $f(1)$, ce sont les valeurs $f(p^A)$ de la fonction f aux points p^A, où A est un entier positif suffisament grand, que nous étudierons ici.

Nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME. - Soit $P(X)$ un polynôme non nul de $Z[X]$ de degré S et de hauteur H. Il existe quatre constantes n_0, c_0, c_1 et c_2 ne dépendant que de S, et vérifiant la propriété suivante :

Pour tout entier A, tel que

$$p^A > \sup(c_0 , c_1 , (\log H)^{c_2}) ,$$

on a

$$|P(f(p^A))|_p > p^{-(8S/n)A} , \text{ où } n = \min(\frac{n_0}{2} , \frac{64S^2}{\operatorname{Log} H}) .$$

(*) Texte reçu le 1er juillet 1981.

Salah-eddine REMMAL, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Avenue Ibn Batota, RABAT (Maroc).

Plus précisement, on démontrera l'existence d'une constante K ne dépendant que de f, telle que l'on puisse choisir $n_0 = \frac{1}{2^6 S^6 K}$ dans l'énoncé précédent.

De plus, on peut choisir :

$$c_1 = \frac{e^{128S^2}}{(8S)^{64S^2}} ,$$

$$c_2 = 64S^2 ,$$

$$c_0 = \left(\frac{16S}{n_0}\right)^{64S^2} e^{64S^2} .$$

Nous avons donc une mesure de transcendance partielle pour une famille de nombres liés aux solutions d'équations différentielles à points singuliers irréguliers.

La démonstration de ce théorème repose sur une généralisation de la méthode de Siegel pour l'étude des G-fonctions.

Nous renvoyons à [1] pour les détails de cette démonstration.

[1] REMMAL (S.). - Problèmes de transcendance liés aux E-fonctions et aux G-fonctions p-adiques, "Problèmes diophantiens", Publications mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie (à paraître).