GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BERTRAND

Sous-groupes analytiques de variétés de groupe et théorème de Brumer

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 6, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 6, 4 p.

14 janvier 1980

SOUS-GROUPES ANALYTIQUES DE VARIÉTÉS DE GROUPE ET THÉORÈME DE BRUMER

par Daniel BERTRAND (*)
[Université de Nice]

1. Enoncé du résultat principal.

Soient $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers du complété k de la clôture algébrique d'un corps p-adique, $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans k, et n un entier > 0. Si V désigne une variété algébrique définie sur un corps K, on note $V(K)$ l'ensemble de ses points K-rationnels.

Dans un exposé précédent [2], a été établi un critère de transcendance pour les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles algébriques satisfaisant une famille d'équations fonctionnelles relatives à un sous-module de $\mathrm{End}\,(k^n)$. Ce critère est adapté à l'étude des applications exponentielles p-adiques des groupes algébriques admettant "beaucoup de multiplications complexes". Nous donnons ici un critère de transcendance pour des fonctions vérifiant des formules d'addition algébriques, dont le corollaire suivant peut être considéré comme un analogue p-adique du théorème de Schneider-Lang (voir [5], théorème 5.2.1).

THÉORÈME 1. - Soient G un groupe algébrique commutatif défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, φ un homomorphisme analytique de $\mathcal{O}^n$ dans $G(k)$ dont la différentielle à l'origine est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et Γ un sous-groupe de $\mathcal{O}^n$ engendré par n éléments linéairement indépendant sur k. On suppose que la clôture de Zariski de $\varphi(\mathcal{O}^n)$ dans G est de dimension $> n$. Alors, $\varphi(\Gamma)$ ne peut être contenu dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$.

(Comme il est suggéré dans cette référence, l'hypothèse (H) du théorème I de [5] (Appendice 1, § 4.2), est donc superflue.)

Le théorème 1 fournit une démonstration unifiée des récents résultats obtenus dans la théorie des formes linéaires de logarithmes ou d'intégrales abéliennes dans les domaines complexe et p-adique (voir [3], § 1 et 5 ; on notera néammoins que le théorème I de [5] (Appendice 1, § 4.2), suffit pour ce type d'application). En considérant le produit du groupe additif par un tore déployé, on déduira ainsi du théorème 1 le théorème de Brumer sur la transcendance des combinaisons linéaires non triviales à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$ des logarithmes p-adiques d'unités de $\mathcal{O}$ algébriques sur $\mathbb{Q}$ et multiplicativement indépendantes (voir [4], théorème 1).

(*) Texte reçu le 24 mars 1981.

Daniel BERTRAND, Mathématiques, Université de Nice, Parc Valrose, 06034 NICE CEDEX.

2. Un critère de transcendance à plusieurs variables.

On reprend les notions de hauteur et d'ordre arithmétique définies dans [5] (Appendice 1, § 1.2 et Définition 3). De plus, on dira qu'une famille $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ de fonctions (strictement) analytiques sur $\mathcal{C}^n$ vérifie un théorème d'addition algébrique s'il existe un nombre réel $c > 0$ et un corps de nombres d'anneaux d'entiers I, tels qu'on puisse associer à tout élément u de $\mathcal{C}^n$ un voisinage $\mathcal{V}_u$ de 0 dans $\mathcal{C}^n$ et des polynômes $R_{i,u}$, $S_{i,u}$ $(i = 1, \dots, \ell)$ en 2ℓ variables à coefficients dans I, de degrés et hauteurs $\le c$, vérifiant la propriété suivante : pour $i = 1, \dots, \ell$, et pour tout élément z de $\mathcal{V}_u$, le nombre

$$S_{i,u}(f_1(z), \dots, f_\ell(z), f_1(u), \dots, f_\ell(u))$$

est non nul, et l'on a :

$$f_i(z+u) = \frac{R_{i,u}(f_1(z), \dots, f_\ell(z), f_1(u), \dots, f_\ell(u))}{S_{i,u}(f_1(z), \dots, f_\ell(z), f_1(u), \dots, f_\ell(u))}.$$

On désigne enfin par $\{D_1, \dots, D_n\}$ une base sur k de $\mathrm{Lie}(k^n)$.

THÉORÈME 2. – *Soient Γ un sous-groupe de $\mathcal{C}^n$ engendré par n éléments linéairement indépendants sur k, et $f_1, \dots, f_\ell$ des fonctions analytiques sur $\mathcal{C}^n$, d'ordre arithmétique fini relativement à Γ. On suppose que la famille $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ vérifie un théorème d'addition algébrique, et que les dérivations $D_1, \dots, D_n$ laissent stable l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}[f_1, \dots, f_\ell]$. Alors, le degré de transcendance sur $\overline{\mathbb{Q}}$ du corps $\overline{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_\ell)$ est $\le n$.*

La démonstration du théorème 2 reprend celle du théorème 1 de [2]. Mais au lieu du "lemme de Baker-Coates" utilisé dans [2], on doit ici faire appel à la technique développée au lemme 7 de [1]. De façon précise, il existe, avec les hypothèses et les notations précédentes, un nombre entier $\gamma > 0$, ne dépendant que de c et des équations aux dérivées partielles satisfaites par $f_1, \dots, f_\ell$, tel que si P désigne un élément de $I[X_1, \dots, X_\ell]$ de degrés partiels $\le L$ et de hauteur H, la fonction $F = P(f_1, \dots, f_\ell)$ vérifie, pour tout élément u de $\mathcal{C}^n$ et tout n-uple $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ d'entiers ≥ 0 de somme s :

$$\Big(\prod_{i=1}^{\ell} S_{i,u}(f_1(z), \dots, f_\ell(z), f_1(u), \dots, f_\ell(u))\Big)^L (D_1^{\sigma_1} \dots D_n^{\sigma_n}) F(z+u)$$

$$= R_{\sigma,u,P}(f_1(z), \dots, f_\ell(z)) + \sum_{\substack{|\kappa| < s \\ \kappa_j \le \sigma_j}} r_{\kappa,u,P}(z)(D_1^{\kappa_1} \dots D_n^{\kappa_n}) F(z+u),$$

où les fonctions $r_{\kappa,u,P}$ sont analytiques sur $\mathcal{V}_u$ et $R_{\sigma,u,P}$ est un polynôme en ℓ variables de degrés partiels $\le \gamma(L+s)$, dont les coefficients sont des polynômes de degré $\le \gamma L$ en $f_1(u), \dots, f_\ell(u)$, à coefficients dans $\gamma^{-s}I$ de hauteurs $\le H(I + \gamma(L+s))^s \exp(\gamma(L+s))$. On appliquera cette formule aux éléments u de Γ, avec $z = 0$.

3. Démonstration du théorème 1.

On désigne par 0 l'élément neutre du groupe algébrique G, par $X = (X_0, \dots, X_\ell)$ les coordonnées du plongement projectif de G décrit par J.-P. SERRE dans [5] (Appendice 2, § 1), et par K le corps de définition de ce plongement. On peut, sans perte de généralité, supposer que K est un corps de nombres, et que l'image de $\mathcal{C}^n$ par φ ne rencontre pas l'hyperplan d'équation $X_0 = 0$. Notons $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ la famille de fonctions analytiques sur $\mathcal{C}^n$ représentant φ dans les coordonnées affines $\{X_i/X_0 \; ; \; i = 1, \dots, \ell\}$, et supposons que φ prenne sur le sous-groupe Γ des valeurs dans $G(\overline{\mathbb{Q}})$. D'après la proposition 5 de [5] (Appendice 2), les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_\ell$ sont alors d'ordre arithmétique fini relativement à Γ (voir également [5], lemme 4.3.1). D'autre part, l'hypothèse de rationalité faite sur $d\varphi(0)$, jointe aux remarques de [5] (Appendice 2, § 1.3), montre que les éléments de $\underset{\sim}{\mathrm{Lie}}\,(k^n)$ définis sur $\overline{\mathbb{Q}}$ opèrent sur l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}[\varphi_1, \dots, \varphi_\ell]$.

En dernier lieu, un argument de compacité assure l'existence d'un nombre réel $C > 0$ tel qu'on puisse associer à tout point Q de G un voisinage de Zariski W_Q de $0 \times Q$ dans $G \times G$ et des polynômes bihomogènes $F_{i,Q}$ en $2(\ell + 1)$ variables, à coefficients dans K, de degrés et hauteurs $\leq C$, vérifiant la propriété suivante : pour tout élément $P \times Q'$ de W_Q, le point $P + Q'$ de G admet pour système de coordonnées projectives $\{F_{i,Q}(\underset{\sim}{X}(P), \underset{\sim}{X}(Q')) \; ; \; i = 0, \dots, \ell\}$. Par conséquent, il existe un voisinage de Zariski V_Q de 0 dans G tel que, pour tout élément P de V_Q, le point $P + Q$ admette pour système de coordonnées projectives :

$$\{X_i(P + Q) = F_{i,Q}(\underset{\sim}{X}(P), \underset{\sim}{X}(Q)) \; ; \; i = 0, \dots, \ell\} .$$

Le sous-groupe analytique $\varphi(\mathcal{C}^n)$ étant contenu dans l'ouvert affine $\{X_0 \neq 0\}$, on en déduit que la famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$ vérifie un théorème d'addition algébrique (cf. la démonstration du corollaire au lemme 7 de [5], (Appendice 1)).

Le théorème 2, appliqué à la famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_\ell\}$, fournit alors la contradiction recherchée, et le théorème 1 est démontré.

Question. - Le théorème 1 est-il en fait équivalent au théorème 2 ? Plus précisément, les fractions rationnelles $R_{i,u}/S_{i,u}$, associées à une famille

$$\underset{\sim}{f} = \{f_1, \dots, f_\ell\}$$

vérifiant un théorème d'addition algébrique, permettent-elles de définir un "pré-groupe" $\tilde{G}$ au sens de [6], tel que $\underset{\sim}{f}(\mathcal{C}^n)$ soit dense dans $\tilde{G}$ pour la topologie de Zariski ?

RÉFÉRENCES

[1] ANDERSON (M.). - Inhomogeneous linear forms in algebraic points of an elliptic functions, "Transcendence theory ; Advances and applications". Edited by A. Baker and D. W. Masser, p. 121-143. - London, New York, San Francisco, Academic Press, 1977.

[2] BERTRAND (D.). - Sous-groupes à plusieurs paramètres p-adiques de variétés abéliennes, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 6e année, 1978/79, n° 9, 7 p.

[3] BERTRAND (D.) and MASSER (D.). - Linear forms in elliptic integrals, Inventiones mathematicae, Berlin, t. 58, 1980, p. 283-288.

[4] BRUMER (A.). - On the units of algebraic number fields, Mathematika, London, t. 14, 1967, p. 121-124.

[5] WALDSCHMIDT (M.). - Nombres transcendants et groupes algébriques, Astérisque n° 69-70, 1979, p. 1-162.

[6] WEIL (A.). - On algebraic groups of transformations, Amer. J. Math., t. 77, 1955, p. 355-391 ; et Oeuvres scientifiques, Vol. II, 2nd printing, p. 197-233. - Berlin, Springer-Verlag, 1980.