MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Annulation de T-filtres par des fonctions croulantes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. n° 3, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A1_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 3, 5 p.

10 décembre 1979

ANNULATION DE T-FILTRES PAR DES FONCTIONS CROULANTES

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Nous savons [1] que tout T-filtre est strictement annulateur. Nous voulons démontrer, dans le cas où il s'agit d'un T-filtre d'un domaine quasi connexe tel que la borne inférieure des distances de deux quelconques de ses trous soit strictement positive, qu'il annule toujours strictement des fonctions croulantes.

Nous nous occuperons ici d'un T-filtre décroissant ; la démonstration serait la même pour un T-filtre croissant.

Comme une fonction croulante est inséparable d'une famille de domaines quasi connexes Δ_ρ, munis de trous de rayon ρ, nous allons introduire cette famille par le lemme suivant (nous sommes, bien sûr, dans un corps k ultramétriquement valué, complet, maximalement complet, algébriquement clos, et nous noterons $|.|$ la valeur absolue p-adique associée à k).

LEMME 1 [1]. - Soit $\mathcal{F}$ un T-filtre décroissant d'un quasi connexe D, défini par une suite décroissante de cercles percés c_m de rayon d_m, dont les classes trouées $\Gamma_{m,i}$ ont des trous $T_{m,i,j}$ de diamètres $\rho_{m,i,j} > 0$. Alors, on peut trouver dans chaque trou $T_{m,i,j}$ des points $b_{m,i,j,k}$ tels que si l'on pose

$$\Delta_{\rho'} = \tilde{D} - \bigcup_{m,i,j} \tilde{D}(b_{m,i,j,k}, \rho')$$

(où $\tilde{D}$ est la fermeture de D), $\Delta_{\rho'}$, qui est quasi connexe, admet, $\forall \rho' > 0$, un T-filtre décroissant, si la limite inférieure de la distance de deux trous est strictement positive.

Rappel [1]. - c_m admet au moins un nombre fini $k(m)$ de classes trouées $\Gamma_{m,i}$.

L'hypothèse " $\mathcal{F}$ a un T-filtre" est équivalente à "Il existe des entiers $q_{m,i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k(m)$, tels que, si $\gamma_m = \sup_{1\leq i\leq k(m)} \gamma_D(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i})$ et si $q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i}$, alors

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0 \text{ ".}$$

Rappelons que, pour chaque classe Γ et pour un entier q quelconque,

---

(*) Texte reçu le 4 juillet 1980.

Mme Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS;

$$(1)\qquad \gamma_D(\Gamma\,,\,q) = r^q \inf_{\substack{p_1+\dots+p_s=q\\ i_1,\dots,i_s\in I\\ \ell=1\dots s}} [\sup_{1\leq\ell\leq s} ((\rho_{i_\ell})^{p_\ell} \prod_{k\neq\ell} |b_{i_k} \dots b_{i_\ell}|^{p_k})^{-1}]\,,$$

où I est l'ensemble des trous de Γ, b_{i_k} le centre d'un trou, et r le diamètre de Γ.

Démonstration.

Premier cas : Les trous $T_{m,i,j}$ ont un diamètre $\rho > 0$ constant.

Nous voulons remplacer les trous de rayon ρ par des trous de rayon $\rho' < \rho$.

Nous allons nous occuper d'une classe Γ quelconque avec un ensemble I de trous, associée à un entier q. Nous reviendrons après à $\Gamma_{m,i}$.

Dans chaque trou $D(b_{i_k}\,,\,\rho)$, introduisons q trous de rayon $\rho' < \rho$: $D(b_{(i_k,j)}\,,\,\rho')$ $(j = 1\,,\,\dots\,,\,q)$, tels que $|b_{(i_k,j)} - b_{(i_k,j')}| = \delta$, $\forall\, j \neq j'$, avec $\rho' < \delta < \rho$, et que $|b_{(i_k,j)} - b_{i_k}| = \delta$, $\forall\, j = 1\,,\,\dots\,,\,q$.

L'ensemble d'indices des trous I est ainsi remplacé par un ensemble I', le domaine D par un domaine $\Delta_{\rho'}$.

Regardons ce qui est changé dans $\gamma_D(\Gamma\,,\,q)$ qui devient $\gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma\,,\,q)$.

Nous voyons que

$$\gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma\,,\,q) \leq (\delta/\rho')\,\gamma_{\Delta_\delta}(\Gamma\,,\,q)\,,$$

où Δ_δ est le domaine obtenu en remplaçant les trous de D (ou de Δ_ρ) par des trous $D(b_{i_k}\,,\,\delta)$.

D'autre part, nous avons

$$\gamma_{\Delta_\delta}(\Gamma\,,\,q) < \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^q \gamma_D(\Gamma\,,\,q)\,.$$

Revenons maintenant au T-filtre. Posons $\gamma_m(\delta) = \sup_{1\leq i\leq k(m)} \gamma_{\Delta_\rho}(\Gamma_{m,i}\,,\,q_{m,i})$.

$$\gamma_m(\delta) < \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{q_m} \gamma_m\,.$$

Pour chaque indice m, choisissons un δ dépendant de m, (δ_m) :

$$\gamma_m(\delta_m) < \left(\frac{\rho}{\delta_m}\right)^{q_m} \gamma_m\,.$$

Nous voyons que

$$\gamma_m(\delta_m) \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} < \left(\frac{\rho}{\delta_m}\right)^{q_m} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j}\,.$$

Nous savons que $\lim_{m\to\infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{m-1} (d_m/d_j)^{q_j} = 0$.

Si pour chaque indice m , nous choisissons un δ_m convenable (par exemple tel que $(\rho/\delta_m)^{q_m}$ reste borné par une constante), alors

$$\lim_{m\to\infty} \gamma_m(\delta_m) \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0 .$$

Et le domaine D' , obtenu en remplaçant les trous $D(b , \rho)$ par des trous $D(b , \delta^-)$, admet un T-filtre.

Si maintenant nous revenons aux trous de diamètre ρ' choisis sur des circonférences $C(b_{m,i,j} , \delta_m)$, nous obtenons

$$\gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma , q) \leqslant \left(\frac{\delta_m}{\rho'}\right) \gamma_{D'}(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i})$$
$$\leqslant \left(\frac{\rho}{\rho'}\right) \gamma_{D'}(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i}) .$$

Si nous posons $\gamma'_m = \sup_{1\leqslant i\leqslant k(m)} \gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma_{m,i} ; q_{m,i})$, alors $\gamma'_m \leqslant \frac{\rho}{\rho'} \gamma_m(\delta_m)$,

$$\gamma'_m \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_m} \leqslant \frac{\rho}{\rho'} \gamma_m(\delta_m) \prod_{j=1}^{m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} ,$$

d'où

$$\lim_{m\to\infty} \gamma'_m \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0 ,$$

et $\Delta_{\rho'}$ admet lui aussi un T-filtre. (Remarquons que les points $b_{(i_j,k)}$ rajoutés l'ont été indépendamment de ρ'.)

<u>Deuxième cas</u> : $\inf \rho_{m,i,j} = \rho_0 > 0$.

Soit Γ une classe donnée, q est fixé pour cette classe. Nous revenons à la formule (1). Choisissons dans chaque trou $D(b_{i_k} , \rho_{i_k})$, q points $b_{(i_k,j)}$ tels que

$$|b_{i_k} - b_{(i_k,j)}| = |b_{(i_k,j)} - b_{(i_k,j')}| = \delta_{i_k} ,$$

avec $(\rho_{i_k}/\delta_{i_k})^q < c$, constante réelle choisie, et $\delta_{i_k} \geqslant \rho$.

Dans le 1er cas, δ dépend uniquement de la classe Γ , maintenant il dépend aussi du trou choisi dans la classe T .

Soit $\Delta_\delta = \tilde{D} - \bigcup D(b_{i_k} , \delta_{i_k})$,

$$\gamma_{\Delta_\delta}(\Gamma\ ,\ q) = r^q \inf [\sup 1/((\delta_{i_\ell})^{p_\ell} \Pi_{k\neq\ell} |b_{i_k} - b_{i_\ell}|^{p_k})]$$

$$= r^q \inf [\sup (\frac{\rho_\ell}{\delta_{i_\ell}})^{p_\ell} 1/((\rho_\ell)^{p_\ell} \Pi_{k\neq\ell} |b_{i_k} - b_{i_\ell}|^{p_h})]$$

$$< c\ \gamma_D(\Gamma\ ,\ q)\ .$$

Donc Δ_δ a un T-filtre.

Posons maintenant

$$\Delta_{\rho'} = \tilde{D} - \cup D(b_{i_k,j})\ ,\ \rho')\quad (\rho' < \rho)\ .$$

Alors on voit, en procédant comme au 1er cas,

$$\gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma\ ,\ q) < [(\sup \delta_{i_\ell})/\rho']\ \gamma_{\Delta_\delta}(\Gamma\ ,\ q)\ ,$$

et $\Delta_{\rho'}$ a toujours un T-filtre.

<u>Troisième cas</u> : $\lim_{m\to\infty} \rho_{m,i,j} = 0$.

Soit $\rho' > 0$, tel que $\rho' < \inf_{k\neq h'} |b_{i_k} - b_{i_{h'}}|$.

Posons $\Delta_{\rho'} = \tilde{D} - \cup D(b_{i_k}\ ,\ \rho')$. Alors

$$\gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma\ ,\ q) = r^q \inf [\sup 1/(\rho'^{p_\ell} \Pi_{k\neq\ell} |b_{i_k} - b_{i_\ell}|^{p_h})]\ .$$

Si $\rho < \rho'$, $\gamma_{\Delta_\rho}(\Gamma\ ,\ q) > \gamma_{\Delta_{\rho'}}(\Gamma\ ,\ q)$.

Comme il n'y a qu'un nombre fini de trous dont le rayon est supérieur à ρ' , la limite de $\gamma_m \Pi (d_m/d_j)^{q_j}$ reste nulle, et $\Delta_{\rho'}$ a toujours un T-filtre.

<u>Quatrième cas</u> : cas général $\inf \rho_{m,i,j} = 0$.

Soit $\rho' > 0$, choisi inférieur à $\inf_{k\neq k'} |b_{i_k} - b_{i_{k'}}|$. Nous allons construire un domaine Δ' , obtenu en remplaçant les trous $D(b_{i_k}\ ,\ \rho_{i_k})$ par des trous concentriques $D(b_{i_k}\ ,\ \rho')$ chaque fois que $\rho_{i_k} < \rho'$.

Dans l'expression de $\gamma_D(\Gamma\ ,\ q)$, le terme $1/((\rho_{i_\ell})^{p_\ell} \Pi_{k\neq\ell} |b_{i_k} - b_{i_\ell}|^{p_k})$ est alors remplacé par $1/(\rho'^{p_\ell} \Pi_{k\neq\ell} |b_{i_k} - b_{i_\ell}|^{p_k})$ qui est plus petit. Donc

$$\gamma_{D'}(\Gamma\ ,\ q) \leqslant \gamma_D(\Gamma\ ,\ q)\ ,$$

et D' a donc aussi un T-filtre ; on est ramené au 2e cas.

PROPOSITION. - <u>Un</u> T-<u>filtre</u> $\mathfrak{F}$ <u>d'un quasi connexe</u> D , <u>tel que la limite infé-</u>

rieure de la distance de deux de ses trous soit strictement positive, annule strictement une infinité de fonctions croulantes.

Rappel [2] (Dans le cas décroissant). - Soit $R \in \underset{\sim}{R}^+$. Soit $\{b_i\}_{i \in \underset{\sim}{N}}$ une suite d'éléments de k tels que :

(i) $|b_i| > R$, $\forall\ i \in \underset{\sim}{N}$,

(ii) $\inf_{i \neq j} |b_i - b_j| = \rho_0 > 0$,

(iii) $\Delta = \{x \in k\ ;\ |x| > R\ ,\ x \neq b_i\ ,\ \forall\ i \in \underset{\sim}{N}\}$ est quasi connexe.

On pose, $\forall\ \rho \in \underset{\sim}{R}^+$, $\rho < \rho_0$,

$$\Delta_\rho = \{x \in k\ ;\ |x| > R\ ,\ |x - b_i| > \rho\ ,\ \forall\ i \in \underset{\sim}{N}\} .$$

Alors, si Δ_ρ admet, $\forall\ \rho < \rho_0$, un T-filtre décroissant, il existe une fonction $f(x) \neq 0$, $f(x) \in H(\Delta_\rho)$, $\forall\ \rho < \rho_0$ et $\lim_{|x| \to R,\, x \in \Delta_\rho} |f(x)| = 0$ $f(x)$ est une fonction "croulante".

Démonstration. - D'après le lemme précédent, les Δ_ρ admettent tous des T-filtres ; l'existence de la fonction f s'ensuit donc ; il existe d'ailleurs des fonctions f croulantes correspondant à chaque choix des $b_{(i_j, k)}$, donc une infinité de fonctions f .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.

[2] SARMANT (Marie-Claude). - Existence de fonctions croulantes, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 17, 10 p.