

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

GILLES CHRISTOL

Corps de fonctions algébriques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 8, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A4_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CORPS DE FONCTIONS ALGÈBRIQUES

Par Gilles CHRISTOL (*)

[Univ. P. et M. Curie (Paris-VI)]

Dans ce papier, nous démontrons un résultat (théorème 2.3) qui peut paraître un peu technique. Celui-ci permet cependant de supprimer les restrictions sur l'anneau des coefficients que nous avons dû faire dans [2] (proposition 6.2), et de montrer l'équivalence des définitions des éléments algébriques de [2] ou [3] et de [5] (voir aussi [6]). Par ailleurs, nous montrerons dans un prochain article que ce résultat est la première étape pour étudier la structure de Frobenius forte des équations différentielles p -adiques.

Soit k un corps valué ultramétrique complet, de caractéristique nulle, de caractéristique résiduelle p , et soit f une fonction analytique, dans une couronne à coefficients dans k , qui soit algébrique sur $k(x)$. f n'a qu'un nombre fini de zéros dans cette couronne et par suite y est bornée. Après normalisation, f appartient à l'anneau W (défini § 2, c'est l'anneau W^C de ROBBA [5]) qui contient toutes les fonctions analytiques bornées dans une couronne $D(0,1^-)-D(0,r^-)$ ($r < 1$). Comme $k(x) \subset W$, le corps $k(x, f) = K$ lui-même est contenu dans W .

W est muni d'une norme qui prolonge la norme de Gauss de $k(x)$. Notre problème est de trouver une "bonne base" de K , c'est-à-dire un élément e de W tel que $|e| = 1$ et tel que, pour tout $g \in K$, il existe des a_i vérifiant :

$$g = \sum a_i e^i, \quad |g| = \sup |a_i|.$$

Ceci n'est pas possible en général avec $a_i \in k(x)$, mais nous obtenons le résultat avec $a_i \in E$, où E est le complété de $k(x)$ dans W (corps des éléments analytiques dans le "disque générique").

L'étude des corps qui possèdent une "bonne base" est faite au § 1. L'extension résiduelle $\bar{K}/\bar{E}$ est ensuite étudiée au § 3. Comme, par construction, le corps $K \subset W$ n'est pas ramifié sur E , nous sommes amené à montrer qu'il n'y a pas d'extension immédiate d'une extension algébrique finie de E contenue dans W . Ceci est trivial dans le cas où k est discret, sinon nous ne savons démontrer directement le résultat que lorsque k est un corps algébriquement clos maximale-ment complet (§ 4). La théorie de Galois p -adique permet alors de redescendre au cas général (§ 5). Le § 6 donne quelques unes des conséquences du théorème 2.3.

(*) Texte reçu le 4 octobre 1979.

Gilles CHRISTOL, 5 allée des Gradins, 91350 GRIGNY.

1. Extensions algébriques régulières.

Soit H un corps de caractéristique 0 , complet pour une norme ultramétrique, de corps des restes $\bar{H}$ de caractéristique p . Toute extension algébrique K de H est munie de l'unique norme prolongeant celle de H . Si $f \in K$, $|f| \leq 1$, nous noterons $\bar{f}$ l'image de f dans le corps des restes $\bar{K}$ de K . $\tilde{H}$ désignera la clôture algébrique de H et, pour $f \in \tilde{H}$, G_f désignera un ensemble d'automorphismes s de $\tilde{H}/H$ tels que les $s(f)$, pour $s \in G_f$, soient les conjugués de $\bar{f}$ ($\neq f$).

Définition. - Un élément e de $\tilde{H}$ est dit algébrique régulier si, pour tout $s \in G_e$, on a $|s(e) - e| = |e| = 1$.

PROPOSITION 1.1. - Si e est un élément algébrique régulier de $\tilde{H}$, il en est de même de $s(e)$ pour $s \in G_e$, et de e^q pour $q = p^h$. On a de plus $H(e^q) = H(e)$.

Les automorphismes de $\tilde{H}/H$ sont continus et conservent la norme. Il vient, pour $s \in G_e$ et $t \in G_{s(e)}$:

$$|ts(e) - s(e)| = |s^{-1} ts(e) - e| = |e| = |s(e)| = 1$$

$s(e)$ est bien algébrique régulier.

Soit s et t appartenant à $G_e \cup 1$ (tels que $t(e) \neq s(e)$), il vient :

$$|t(e) - s(e)| = |s^{-1} t(e) - e| = 1.$$

Comme

$$(\overline{s(e)} - \overline{t(e)})^q = \overline{s(e)^q} - \overline{t(e)^q} = \overline{s(e^q)} - \overline{t(e^q)},$$

on a aussi

$$|s(e^q) - t(e^q)| = 1.$$

En prenant pour t l'identité on voit que e^q est algébrique régulier. Par ailleurs, e^q a autant de conjugués que e , donc a le même degré sur H , et $H(e^q) = H(e)$.

PROPOSITION 1.2. - Si K est une extension algébrique finie de H , les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1° $K = H(e)$ avec e algébrique régulier,
- 2° $\bar{K}/\bar{H}$ est séparable, et $[\bar{K}:\bar{H}] = [K:H]$,
- 3° $\bar{K}/\bar{H}$ est séparable, et il existe e dans K tel que $\{e^i\}$, $0 \leq i < [K:H]$ soit une base normale du H -espace vectoriel K .

1° $\Rightarrow$ 2° : Soit $P(X) = \prod_{s \in G_e \cup 1} (X - s(e)) = \sum a_i X^i$ le polynôme unitaire minimal de e sur H . Comme $|e| = 1$, on a $|a_i| \leq 1$. Posons $\bar{P}(X) = \sum \bar{a}_i X^i$. Il vient $\bar{P}(\bar{e}) = 0$. $\bar{P}$ n'a que des racines simples (les $\bar{s(e)}$). S'il existait une décompo-

sition $\bar{P} = \overline{QR}$, on aurait $(\bar{Q}, \bar{R}) = 1$ et, d'après le lemme de Hensel, P ne serait pas irréductible. $\bar{P}$ est donc irréductible. Autrement dit, $\bar{e}$ et e ont même degré, ce qui montre que $\bar{K} = \bar{H}(\bar{e})$ et que $[\bar{K}:\bar{H}] = [K:H]$.

La relation

$$|P'(e)| = \left| \prod_{s \in G_e} (e - s(e)) \right| = 1$$

montre que $\bar{P}'(\bar{e}) \neq 0$, c'est-à-dire que $\bar{P}' \neq 0$, $\bar{P}$ est donc séparable, il en est de même de $\bar{K}/\bar{H}$.

$2^\circ \Rightarrow 3^\circ$: Soit $e \in K$ tel que $\bar{K} = \bar{H}(\bar{e})$. Puisque $[H(e):H] \geq [\bar{H}(\bar{e}):\bar{H}]$, on a $K = H(e)$. Soit $f \in K$, nous avons : $f = \sum_{0 \leq i < [K:H]} a_i e^i$. Quitte à multiplier par un élément de H , nous pouvons supposer que $\sup |a_i| = 1$. Supposons $|f| < 1$. Le polynôme $\sum \bar{a}_i X^i$ de $\bar{H}[X]$ est non nul, et a $\bar{e}$ comme racine, son degré étant strictement inférieur à $[\bar{H}(\bar{e}):\bar{H}]$, il y a contradiction. Donc $|f| = \sup |a_i|$.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$: La condition 3° donne immédiatement $|e| = 1$ et $\bar{K} = \bar{H}(\bar{e})$. Si P est le polynôme minimal unitaire de e sur H , $\bar{P}$ est le polynôme minimal de e . Comme $\bar{K}/\bar{H}$ est séparable, $\bar{P}'$ n'est pas identiquement nul, donc P' contient un terme dont le coefficient a une norme 1. Puisque $\deg P' < [K:H]$, la condition 3° donne

$$\left| \prod_{s \in G(e)} (e - s(e)) \right| = |P'(e)| = \sup |\text{coef. de } P'| = 1,$$

donc, pour tout $s \in G(e)$, $|e - s(e)| = 1$.

Définition. - Lorsque K vérifie les conditions de la proposition précédente, on dit que K est une extension algébrique régulière de H .

COROLLAIRE 1.3. - Si K est une extension algébrique régulière de L , et L une extension algébrique régulière de H , alors K est une extension algébrique régulière de H .

C'est évident sur la propriété caractéristique 2° de la proposition 1.2.

Au cours de la démonstration de la proposition 1.2 ($2^\circ \Rightarrow 3^\circ$ et $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$), nous avons en fait établi le résultat suivant :

COROLLAIRE 1.4. - Si K est une extension algébrique régulière de H , et si $e \in K$ est tel que $\bar{K} = \bar{H}(\bar{e})$, alors e est algébrique régulier, et $K = H(e)$.

PROPOSITION 1.5. - Si K est une extension algébrique finie de H telle que $\bar{K}/\bar{H}$ soit séparable, il existe une extension L algébrique régulière de H contenue dans K telle que $\bar{L} = \bar{K}$.

Soit $\bar{e}$ un élément de $\bar{K}$ tel que $\bar{K} = \bar{H}(\bar{e})$, et soit $\bar{P}$ le polynôme unitaire minimal de $\bar{e}$ sur $\bar{H}$. Nous relevons $\bar{P}$ en un polynôme unitaire P à coefficients dans H . Comme $\bar{K}/\bar{H}$ est séparable, la racine $\bar{e} \in \bar{K}$ de $\bar{P}$ est simple. Le

lemme d'Hensel indique qu'il existe une racine e de P dans le corps complet K . Posons $L = H(e)$. On a $\bar{K} \supset \bar{L} \supset \bar{H}(\bar{e}) = \bar{K}$. Donc $\bar{L} = \bar{K}$ est séparable sur $\bar{H}$. Par ailleurs, on a

$$[L:H] = \deg e \leq \deg P = \deg \bar{P} = [\bar{K}:\bar{H}] = [\bar{L}:\bar{H}],$$

ce qui montre que L est régulière (condition 2 de la proposition 1.2).

COROLLAIRE 1.6. - Si H est un corps à valuation discrète, une extension algébrique finie K de H est régulière si, et seulement si, $\bar{K}/\bar{H}$ est séparable et K/H est non ramifiée.

Si K/H est régulière avec les notations de la proposition 1.2 ($3^\circ \Rightarrow 1^\circ$), pour $f \in K$, on trouve : $|f| = \sup |a_i|$, $a_i \in H$. K et H ont donc même ensemble de normes, K/H n'est pas ramifiée.

Réciproquement, supposons $\bar{K}/\bar{H}$ séparable, et soit L l'extension définie dans la proposition 1.5. Si K/H est non ramifiée, il en est de même de K/L . Comme $\bar{K} = \bar{L}$, K est aussi totalement ramifiée sur L , c'est-à-dire $K = L$ et K est régulière.

2. Énoncé du théorème.

Soit k un corps de caractéristique nulle, complet pour une norme ultramétrique. $\bar{k}$, son corps des restes, est supposé de caractéristique p et algébriquement clos.

Nous noterons W l'ensemble des séries $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n x^n$, où $\alpha_n \in k$, $|\alpha_n|$ est borné, et α_n tend vers 0 lorsque n tend vers $-\infty$. On vérifie facilement que W est un anneau, normé par

$$|\sum \alpha_n x^n| = \sup |\alpha_n|,$$

et complet pour cette norme.

PROPOSITION 2.1. - Si H est un corps contenu dans W , alors $\bar{H} \subset \bar{k}((x))$ (corps des séries formelles à coefficients dans $\bar{k}$).

Posons

$$\mathcal{O} = \{\sum \alpha_n x^n \in W ; |\alpha_n| \leq 1\}$$

$$J = \{\sum \alpha_n x^n \in W ; |\alpha_n| < 1\}$$

$\mathcal{O}$ est un anneau, et $\mathcal{O} \cap H$ est l'anneau $\mathcal{O}_H$ des entiers de H . J est un idéal de $\mathcal{O}$, et $J \cap H$ est un idéal de $\mathcal{O}_H$. Comme $1 \notin J$, $J \cap H$ est différent de $\mathcal{O}_H$, et est contenu dans l'idéal maximal M_H de $\mathcal{O}_H$. Si $\sum \alpha_n x^n \in M_H$, on a $|\alpha_n| \leq |\sum \alpha_n x^n| < 1$, donc $J \cap H = M_H$. Autrement dit le noyau de l'application de $\mathcal{O}_H$ dans $\bar{k}((x))$, définie par $\sum \alpha_n x^n \mapsto \sum \bar{\alpha}_n x^n$, est exactement M_H . Cette application donne un isomorphisme de $\bar{H} = \mathcal{O}_H / M_H$ avec un sous-corps de $\bar{k}((x))$.

COROLLAIRE 2.2. - Un élément $\sum \alpha_n x^n$ de W est inversible si, et seulement si, il existe n_0 tel que $|\sum \alpha_n x^n| = |\alpha_{n_0}|$.

Supposons $f = \sum \alpha_n x^n$ inversible dans W . $H = k(f)$ est un corps contenu dans W . Quitte à, éventuellement, augmenter k (pour que $|f|$ soit la norme d'un élément de k) et à multiplier f par un élément de k , on peut supposer que $|f| = 1$, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{O}_H \subset \mathcal{O}$ et $f \notin M_H$. Ceci entraîne, puisque $M_H = J \cap H$, $f \in \mathcal{O} \setminus J$. Il existe donc n_0 tel que $|\alpha_{n_0}| = 1 = |f|$.

Réciproquement, soit n_0 le plus petit indice tel que $|\alpha_{n_0}| = |f|$. Si $\mathcal{O}_k$ désigne l'anneau des entiers de k on vérifie classiquement que

$$1 + \sum_{n > n_0} \alpha_n \alpha_{n_0}^{-1} x^{n-n_0}$$

est inversible dans $A_k[[x]] \subset W$. $\alpha_{n_0} x^{n_0}$ étant inversible dans W on en déduit que $\sum_{n \geq n_0} \alpha_n x^n$ est inversible dans W . Par ailleurs,

$$|\sum_{n < n_0} \alpha_n x^n| < |\alpha_{n_0}| = |\sum_{n \geq n_0} \alpha_n x^n|,$$

ce qui montre que f lui-même est inversible car W est complet.

Si a est un polynôme à coefficients dans k , le corollaire précédent montre que a est inversible dans W . Par suite, $k(x) \subset W$ et, comme W est complet, le complété E de $k(x)$ (pour la norme de W dite aussi norme de Gauss) est contenu dans W . E est aussi le corps des éléments analytiques dans le disque générique dans la terminologie de DWORK-ROBBA [4].

Le but principal de cet exposé est de démontrer le résultat suivant.

THEOREME 2.3. - Si K est une extension algébrique finie de E contenue dans W , alors K est une extension algébrique régulière de E .

Dans le paragraphe 3, nous allons étudier l'extension $\bar{K}/E$ et, en particulier, démontrer qu'elle est séparable. Ceci nous place dans les conditions d'application de la proposition 1.5. En particulier, le théorème sera démontré dans le cas où k est à valuation discrète (cf. corollaire 1.6).

Nous avons alors la situation suivante : L est une extension algébrique régulière de E , et K est une extension immédiate de L (même corps des restes et même groupe de valuation). Dans le paragraphe 4, nous supposons k algébriquement clos, et nous construisons, pour chaque $f \in K$, une suite g_n d'éléments de L tels que $|f - g_n|$ tende vers le maximum des $|f - s(f)|$ lorsque $s(f)$ parcourt les conjugués de f sur L . Les boules B_n de L , de centre g_n et de rayon $|f - g_n|$, sont emboîtées. L n'étant pas maximalelement complet on ne peut assurer directement que $\bigcap B_n \neq \emptyset$. Nous supposons donc que k est maximalelement complet, et nous montrons que les g_n peuvent être choisis dans un ensemble $V(N, A, e)$

présentant un certain caractère de finitude sur k . Ceci nous permet de construire $g \in \bigcap B_n \subset L$ c'est-à-dire tel que $|f - g| = \sup |f - s(f)|$ un argument du style lemme de Krasner montre que f lui-même appartient à L , donc que K est régulière.

Le théorème étant démontré lorsque le corps de base est l'extension immédiate maximale (donc maximalelement complète) de la clôture algébrique de k , le paragraphe 5 montre comment en déduire le résultat pour k lui-même en utilisant la théorie de Galois p -adique de DWORK-ROBBA.

3. Extensions résiduelles.

$\bar{K}$ est une extension algébrique finie de $\bar{E} = \bar{k}(x)$. D'après la proposition 2.1, $\bar{K} \subset \bar{k}((x))$. Le fait que $\bar{K}/\bar{E}$ est séparable découle immédiatement de la proposition un peu plus générale suivante :

PROPOSITION 3.1. - Soit $\bar{K}$ une extension algébrique finie de $\bar{E}$. $\bar{K}/\bar{E}$ est séparable si, et seulement si, $x^{1/p}$ n'appartient pas à $\bar{K}$.

$x^{1/p}$ n'étant pas séparable sur $\bar{E}$ la condition est nécessaire.

Le corps $\bar{K}$ étant algébriquement clos, donc parfait, pour $\alpha \in \bar{K}$, il existe une unique racine p -ième $\alpha^{1/p}$. On a :

$$(\sum \alpha_i x^{ip}) / (\sum \beta_i x^{ip}) = [(\sum \alpha_i^{1/p} x^i) / (\sum \beta_i^{1/p} x^i)]^p,$$

ce qui montre que $\bar{K}(x^p) = (\bar{K}(x))^p$.

$\bar{E} = \bar{k}(x)$ est de degré p sur $\bar{K}(x^p)$. Si $a \in \bar{E}$, on a donc $a = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x^k$ avec $a_k \in \bar{E}$.

Soit $P(X) = \sum a_i X^{pi}$ un polynôme non séparable de $\bar{E}[X]$. Montrons que ce n'est pas le polynôme minimal d'un élément f de $\bar{K}$. Sinon nous aurions :

$$0 = P(f) = \sum a_i f^{pi} = \sum_{k=0}^{p-1} x^k \sum a_{i,k} f^{pi}$$

avec $a_{i,k} \in \bar{E}$. Posons $b_k = \sum a_{i,k} f^i$, on a $\sum_{k=0}^{p-1} b_k x^{k/p} = 0$ avec $b_k \in \bar{K}$. Comme $x^{1/p}$ n'appartient pas à $\bar{K}$, le polynôme minimal de $x^{1/p}$ sur $\bar{K}$ est de degré p , on en déduit $b_k = 0$. Les a_i n'étant pas tous nuls, il en est de même des $a_{i,k}$. Il existe k tel que les $a_{i,k}$ ne sont pas tous nuls bien que $\sum a_{i,k} f^i = 0$. P n'était donc pas le polynôme minimal de f .

Cette proposition achève la démonstration du théorème 2.3 lorsque k est à valuation discrète.

Dans tous les cas, à cause du corollaire 1.4, il est intéressant de préciser les propriétés d'éléments $\bar{e}$ qui engendrent $\bar{K}$ sur $\bar{E}$.

PROPOSITION 3.2. - Si $\bar{K}$ est une extension algébrique finie de $\bar{E}$ contenue dans

$\overline{k}(x)$, il existe $\overline{e}$ dans $\overline{K}$ tel que :

- (i) $\overline{K} = \overline{E}(\overline{e})$,
- (ii) $\overline{e} \in x\overline{k}[[x]]$,
- (iii) $\overline{e} + x\overline{Q}(\overline{e}) = 0$ où $\overline{Q}$ est un polynôme à coefficients dans $\overline{k}[x]$ de degré $[\overline{K}:\overline{E}]$.

Ce résultat n'est que la transcription d'un résultat de BATEMAN-DUQUETTE [1].

Comme $\overline{K}$ est une extension algébrique finie et séparable de $\overline{E}$, contenue dans $\overline{k}(x)$, le résultat de BATEMAN-DUQUETTE affirme que $\overline{K}$ peut être engendré par un élément de Pisot (PV élément) c'est-à-dire un élément θ entier sur $\overline{k}[1/x]$ dont tous les conjugués sont de valuation x -adique positive.

Si $R(X) = X^n + \dots + c_1(1/x) X^{n-1} + \dots + c_n(1/x)$ est le polynôme unitaire minimal de θ sur $\overline{k}(x)$, l'examen du polygone de Newton pour la valuation x -adique de R montre :

$$x^{\deg c_1} c_1(1/x) = \begin{cases} xa_i(x) & \text{si } i \neq 1 \\ \alpha + xa_1(x) & \text{si } i = 1 \end{cases} \quad \text{avec } a_i \in \overline{k}[x] \text{ et } \alpha \in \overline{k}^* .$$

Nous posons $\overline{e} = 1/\theta$. Il est clair que $\overline{E}(\overline{e}) = \overline{E}(\theta) = \overline{K}$, et en posant $\overline{Q}(X) = \alpha^{-1} \sum a_i(x) X^i$, il vient $\overline{e} + x\overline{Q}(\overline{e}) = 0$.

L'application $f \rightarrow -x\overline{Q}(f)$ est une application de $x\overline{k}[[x]]$ dans lui-même contractante pour la valuation x -adique. Il existe une unique solution de $X+x\overline{Q}(X)=0$ dans $x\overline{k}[[x]]$ qui, par suite, est de valuation x -adique positive. Les conjugués de e étant les inverses des conjugués de θ sont de valuation x -adique négative, cette solution ne peut être que $\overline{e}$ ce qui démontre (ii).

4. Démonstration du théorème dans le cas où le corps de base est algébriquement clos et maximalement complet.

Dans ce paragraphe, nous supposons k algébriquement clos et maximalement complet. K est une extension algébrique finie de E contenue dans W , et L une extension algébrique régulière de E contenue dans K et telle que $\overline{K} = \overline{L}$ (voir propositions 1.5 et 3.1).

Comme indiqué dans le schéma de la démonstration du théorème, nous aurons besoin d'ensembles $V(N, A, e)$. Nous commençons par construire ceux-ci, et nous en donnons quelques propriétés.

4.1 : Pour chaque $\alpha \in \overline{k}$, nous choisissons un relèvement $\underline{\alpha} \in k$. En particulier, nous choisissons $\underline{Q} = 0$. Nous posons :

$$e_{n,\alpha} = (\underline{\alpha} - x)^{-n} ; \quad e_{n,\infty} = x^n .$$

Si A est un ensemble fini contenu dans $\overline{k} \cup \infty$, nous dirons que $a \in V(N, A)$

si, et seulement si, $a \in E$, $|a| \leq 1$ et il existe λ , $\lambda_{n,\alpha} \in k$ tels que :

$$|a - \lambda - \sum_{\substack{1 \leq n \leq N \\ \alpha \in A}} \lambda_{n,\alpha} e_{n,\alpha}| \leq |p|.$$

Comme $\bar{k}$ est algébriquement clos, l'ensemble $\{1, e_{n,\alpha}\}$ pour $1 \leq n$, $\alpha \in \bar{k} \cup \infty$ forme une base normale de E sur k (théorème de Mittag-Leffler [7]). On en déduit :

Pour tout $a \in E$, $|a| \leq 1$, il existe A et N tels que $a \in V(N, A)$.

Pour $a \in V(N, A)$ donné, on peut choisir les $\lambda_{n,\alpha}$ et λ de telle sorte que : ou bien $|a| = \sup(|\lambda|, |\lambda_{n,\alpha}|)$, ou bien $|a| \leq |p|$ et $\lambda_{n,\alpha} = \lambda = 0$.

Nous définissons q , puissance de p , telle que $[K:L] = mq$ avec $(m, p) = 1$, et, pour $a = \sum \alpha_n x^n \in W$, nous poserons

$$Ua = \sum \alpha_{nq} x^{nq}.$$

Cet opérateur sert à caractériser les puissances q -ième de W . En effet, puisque $|(\sum \alpha_n x^n)^q - \sum \alpha_n^q x^{nq}| \leq |p|$, pour $|\alpha_n| \leq 1$, il vient

$$|Ua^q - a^q| \leq |p| \text{ pour } |a| \leq 1.$$

Si $a \in k(x)$, un calcul immédiat montre que

$$Ua(x) = \frac{1}{q} \sum_{\xi^q=1} a(\xi x),$$

ce qui prouve que $Ua \in k(x)$. Comme U est continu sur W , on a $UE \subset E$. Nous précisons ce résultat dans le lemme suivant.

LEMME 4.1. - Si $a \in V(Nq, A)$, il existe $b \in V(N, A)$ tel que

$$|Ua - b^q| \leq |p|.$$

Pour $\alpha = 0$ ou ∞ , on obtient immédiatement :

$$Ue_{n,\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \nmid n \\ e_{k,\alpha} & \text{si } n = kq \end{cases}$$

Pour $\alpha \neq 0, \infty$ on trouve :

$$e_{n,\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{m} x^m \alpha^{-(n+m)}$$

c'est-à-dire

$$Ue_{n,\alpha} = \sum \binom{n+mq-1}{mq} x^{qm} \alpha^{-(mq+n)}.$$

Si $n = kq - \ell$, $0 \leq \ell < q$, on vérifie

$$\binom{n+mq-1}{mq} = \binom{(k+m-1)q+q-1-\ell}{mq} = \binom{k+m-1}{m} = \binom{k+m-1}{n}^q \pmod{p},$$

ce qui donne

$$|Ue_{n,\alpha} - \alpha^\ell e_{k,\alpha}^q| \leq |p|.$$

Si $a \in V(Nq, A)$ est associé aux $\lambda_{n,\alpha}$, λ , il vient

$$|Ua - \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ \alpha \in A}} \mu_{k,\alpha} e_{k,\alpha}^q - \lambda| \leq |p|,$$

avec $\mu_{k,\alpha} = \lambda_{kq,\alpha}$ pour $\alpha = 0, \infty$ et $\mu_{k,\alpha} = \sum_{\ell=0}^{q-1} \lambda_{kq-\ell,\alpha} \alpha^\ell$ pour $\alpha \neq 0, \infty$. Comme k est algébriquement clos, nous pouvons choisir pour chaque λ , $\mu_{k,\alpha}$ une racine q -ième. Le lemme est démontré avec

$$b = \sum_{\substack{1 \leq k \leq N \\ \alpha \in A}} \mu_{k,\alpha}^{1/q} e_{k,\alpha} + \lambda^{1/q}.$$

Nous aurons aussi besoin des propriétés suivantes dont la démonstration facile est laissée au lecteur :

Si $a \in V(N, A)$ et $b \in V(M, A)$ alors

$$ab \in V(N + M, A) \text{ et } a + b \in V(\sup(N, M), A).$$

Dans la suite, e désignera un élément algébrique régulier sur E qui engendre L . La proposition 1.1 montre que e^q a les mêmes propriétés.

Nous noterons $V(N, A, e)$ l'ensemble des éléments g de L tels que

$$g = \sum_{i=0}^{[L:E]-1} a_i e^i \text{ avec } a_i \in V(N, A).$$

e^i étant une base normale de L/E (proposition 1.2), il existe N et A tels que $g \in V(N, A, e)$ si, et seulement si, $g \in L$ et $|g| \leq 1$.

LEMME 4.2. - Soit $g \in V(Nq, A, e^q)$ et $f \in W$ tels que $|g - f^q| \leq \gamma \leq 1$, il existe $h \in V(N, A, e)$ tel que $|g - h^q| \leq \sup(\gamma, |p|)$.

Comme $|g| \leq 1$, on a $|f| \leq 1$, donc $|Uf^q - f^q| \leq |p|$. Puisque U n'augmente pas les normes, on a $|Ug - g| \leq \sup(\gamma, |p|)$. Posons $g = \sum a_i e^{iq}$ avec $a_i \in V(Nq, A)$. Si $a = \sum \alpha_n x^n$ et $e = \sum \epsilon_n x^n$ sont deux éléments de normes inférieures à 1 de W , en faisant les calculs modulo $|p|$, il vient :

$$\begin{aligned} U(ae^q) &= U(\sum \alpha_n x^n \sum \epsilon_m^q x^{mq}) = U(\sum \alpha_n \epsilon_m^q x^{n+mq}) = \sum \alpha_{nq} \epsilon_m^q x^{(n+m)q} \\ &= \sum \alpha_{nq} x^{nq} \sum \epsilon_m^q x^{mq} = (Ua)e^q. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$|Ug - \sum (Ua_i) e^{iq}| \leq |p|,$$

c'est-à-dire

$$|\sum (Ua_i - a_i) e^{iq}| \leq \sup(\gamma, |p|).$$

Comme e^{iq} est une base normale de L sur E , on a aussi

$$|Ua_i - a_i| \leq \sup(\gamma, |p|).$$

D'après le lemme 4.1, il existe $b_i \in V(N, A)$ tel que

$$|Ua_i - b_i^q| \leq |p|.$$

Nous posons $h = \sum b_i e^i$, h appartient bien à $V(N, A, e)$ et comme $|h^q - \sum b_i^q e^{iq}| \leq |p|$, on trouve :

$$|h^q - g| \leq \sup(|b_i^q - a_i|, |p|) \leq \sup(\gamma, |p|).$$

4.2 : Pour $f \in K$, nous noterons $\gamma(f)$ le maximum des $|f - s(f)|$ pour $s(f)$ parcourant les conjugués de f sur L . En particulier, on trouve $\gamma(f) = 0$ si, et seulement si, $f \in L$.

LEMME 4.3. - Soit $f \in K$ et $g \in L$. On a $\gamma(f) = \gamma(f - g) \leq |f - g|$. S'il existe $g \in L$ tel que $\gamma(f) = |f - g|$, alors $f \in L$.

Soit $s(f)$ un conjugué de f , on a $s(f - g) = s(f) - g$, ce qui donne, puisque $|s(f - g)| = |f - g|$,

$$|s(f) - f| = |s(f - g) - (f - g)| \leq |f - g|,$$

c'est-à-dire, pour s réalisant le maximum de $|s(f) - f|$:

$$\gamma(f) = \gamma(f - g) \leq |f - g|.$$

Supposons $\gamma(f) = |f - g|$ avec $f \notin L$, c'est-à-dire $\gamma(f) \neq 0$. Il existe $\alpha \in k^*$ tel que $|\alpha| = |f - g|$, c'est-à-dire tel que

$$0 \neq \overline{\alpha^{-1}(f - g)} \in \overline{K} = \overline{L}.$$

Autrement dit, il existe $g_1 \in L$ tel que $|\alpha^{-1}(f - g) - g_1| < 1$. D'après la première partie, on a

$$\gamma(f) = \gamma(f - g - \alpha g_1) \leq |f - g - \alpha g_1| < |\alpha| = |f - g| = \gamma(f),$$

d'où une contradiction. Donc f appartient à L .

Dans ce lemme nous avons construit, à partir d'un élément g de L qui "approche" f , un nouvel élément g_1 qui approche encore mieux f . Le lemme suivant va préciser cette construction et permettra de construire par récurrence une suite g_n telle que $|f - g_n|$ tende vers $\gamma(f)$.

LEMME 4.4. - Soit $f \in K$ et $g \in L$ tels que $|f| = |g| = 1$. Il existe $g_1 \in L$ tel que

$$|f - g_1| \leq \sup\{\gamma(f)^{1/q} |f - g|^{1-1/q}, |p|^{1/q}\}.$$

De plus, on peut choisir N et A ne dépendant que de f , de telle sorte que, si $g \in V(2N, A, e)$, il en soit de même de g_1 .

Le degré de f sur L divise $[K:L] = mq$. Si $\deg f = m' q'$ avec $(m', p) = 1$ et q' puissance de p , on a q' divise q , c'est-à-dire $q' \leq q$. L'inégalité

sera établie si nous la démontrons avec q' à la place de q . Aussi, pour simplifier les notations, nous supposerons dans la suite que $\deg f = mq$.

Soit P le polynôme minimal unitaire de f sur L . Comme $|f| = 1$, nous avons

$$P(X) = X^{mq} + \sum_{i=0}^{mq-1} A_i X^i \text{ avec } A_i \in L \text{ et } |A_i| \leq 1.$$

Nous avons

$$P(X + z) = \sum_{i=0}^{mq} P^{[i]}(z) X^i \text{ avec } P^{[i]}(z) = \sum_j \binom{i+j}{j} A_{i+j} X^j.$$

Nous posons

$$Q(X) = - \binom{mq}{q}^{-1} P^{[mq-q]}(X) = X^q + \sum_{i=0}^{q-1} B_i X^i.$$

Comme $|\binom{mq}{q}| = |n| = 1$,

$$|B_i| = |\binom{mq}{q}^{-1} \binom{i+mq-q}{i} A_{i+mq-q}| \leq 1.$$

Par ailleurs nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{mq} P^{[i]}(g) X^i (f-g)^{i-mq} &= (f-g)^{-mq} P[(f-g)X + g] \\ &= (f-g)^{-mq} \prod_s [(f-g)X + g - f + f - s(f)] \\ &= \prod_s [X - 1 + (f-s(f))(f-g)^{-1}] \\ &= (X-1)^{mq} + \dots \end{aligned}$$

En considérant le coefficient de X^{mq-q} dans cette égalité, on obtient

$$|\binom{mq}{q} Q(g)(f-g)^{-q} - \binom{mq}{q}(-1)^q| \leq \gamma(f)|f-g|^{-1},$$

ce qui donne :

$$|Q(g) - (f-g)^q| \leq \gamma(f)|f-g|^{q-1} \leq |f-g|^q \leq 1.$$

Comme $Q(g)$ appartient à L , donc à $V(Nq, A, e^q)$ pour N et A convenablement choisis, et comme $f-g$ appartient à W , nous pourrions appliquer le lemme 4.2. Auparavant nous allons préciser la manière de choisir N et A .

Comme B_i et e^j appartiennent à L , nous pouvons choisir N et A de telle sorte que :

(i) $B_i \in V(N, A, e)$ pour tout i ($0 \leq i \leq q-1$)

(ii) $e^j \in V(N, A, e^q)$ pour $0 \leq j < q[L:E]$.

N et A ne dépendent alors que des B_i c'est-à-dire de P , donc de f .

Soit $g \in V(2N, A, e)$, c'est-à-dire

$$g = \sum_{j=0}^{[L:E]-1} a_j e^j \text{ avec } a_j \in V(2N, A).$$

On a

$$g^i = \sum_{j=0}^{i[L:E]-1} a_{i,j} e^j,$$

où $a_{i,j}$ est un polynôme homogène de degré i en les a_j , c'est-à-dire où

$a_{i,j} \in V(2iN, A)$.

Posons

$$B_i = \sum B_{i,k} e^k, \quad e^j = \sum E_{j,k} e^{kq},$$

avec $j < q[L:E]$, $B_{i,k}$ et $E_{j,k}$ appartiennent à $V(N, A)$. Il vient :

$$B_i e^i = \sum B_{i,k} a_{i,j} e^{k+j} = \sum B_{i,k} a_{i,j} E_{j+k,l} e^{lq}.$$

Comme $j + k \leq i[L:E] - i + [L:E] - 1 < q[L:E]$ pour $i < q$, il vient :

$$B_{i,j} a_{i,k} E_{j+k,l} \in V(2iN + N + N, A) \subset V(2qN, A),$$

c'est-à-dire $B_i e^i \in V(2qN, A, e^q)$.

Par ailleurs la relation $|g^q - \sum a_j^q e^{jq}| \leq |p|$ montre que $g^q \in V(2Nq, A, e^q)$. Nous obtenons donc :

$$Q(g) = g^q + \sum B_i e^i \in V(2Nq, A, e^q).$$

Le lemme 4.2 permet alors de trouver $h \in V(2N, A, e)$ tel que

$$|Q(g) - h^q| \leq \sup\{\gamma(f) |f - g|^{q-1}, |p|\},$$

c'est-à-dire tel que

$$|h^q - (f - g)^q| \leq \sup\{\gamma(f) |f - g|^{q-1}, |p|\}.$$

Comme $|f - g| \leq 1$, et par suite $|h| \leq 1$, on trouve :

$$|[h - (f - g)]^q| \leq \sup\{|h^q - (f - g)^q|, |p|\} \leq \sup\{\gamma(f) |f - g|^{q-1}, |p|\}.$$

Le lemme est démontré en posant $g_1 = h + g$.

Nous montrons maintenant, sous une forme légèrement modifiée, l'existence d'une suite g_n telle que $|f - g_n|$ tende vers $\gamma(f)$.

LEMME 4.5. - Pour tout ε , il existe f tel que $K = L(f)$, $|f| = 1$ et $1 - \varepsilon \leq \gamma(f) \leq 1$ (on suppose ici $K \neq L$).

Nous choisissons f_0 tel que $K = L(f_0)$, et nous allons construire par récurrence une suite f_n d'éléments de K tels que $|f_n| = 1$, $K = L(f_n)$ et $\lim \gamma(f_n) = 1$, ce qui démontrera le lemme.

Le lemme 4.4, appliqué avec $f = f_n$ et $g = 0$, montre qu'il existe $g_n \in L$ tel que

$$|f_n - g_n| \leq \sup\{\gamma(f_n)^{1/q}, |p|^{1/q}\} \leq 1.$$

Soit $\alpha_n \in K$ tel que $|\alpha_n| = |f_n - g_n|$. Nous posons $f_{n+1} = \alpha_n^{-1}(f_n - g_n)$. Il est clair que $|f_{n+1}| = 1$ et que $K = L(f_{n+1})$. L'inégalité

$$1 \geq |f_{n+1} - s(f_{n+1})| = |\alpha_n^{-1}| |f_n - s(f_n)| \geq |f_n - s(f_n)|$$

montre que la suite $\gamma(f_n)$ est croissante et bornée par 1. Soit γ sa limite,

comme

$$0 < \gamma(f_n) = \gamma(f_n - g_n) = \alpha_n \gamma(f_{n+1})$$

et

$$|\alpha_n| = |f_n - g_n| \leq \sup\{\gamma^{1/q}, |p|^{1/q}\},$$

en passant à la limite on trouve

$$0 < \gamma \leq \sup\{\gamma^{1/q}, |p|^{1/q}\}\gamma,$$

ce qui conduit à $\gamma^{1/q} \geq 1$, c'est-à-dire à $\gamma = 1$.

4.3 : Démonstration du théorème : Nous allons utiliser maintenant le fait que k soit maximalement complet.

D'après le lemme 4.5, il existe f tel que $|f| = 1$, $L = K(f)$ et $|p|^{1/q} \leq \gamma(f) < 1$ (nous supposons toujours $K \neq L$). Pour tout $g \in L$, on a donc $|p|^{1/q} \leq \gamma(f)^{1/q} |f - g|^{1-1/q}$. Nous choisissons N et A associés à f comme dans le lemme 4.4. A partir de $g_0 = 0 \in V(2N, A, e)$, ce lemme permet de construire par récurrence une suite g_n d'éléments de $V(2N, A, e)$ tels que

$$|f - g_{n+1}| \leq \gamma(f)^{1/q} |f - g_n|^{1-1/q} < |f - g_n|.$$

Soit γ la limite de la suite décroissante $|f - g_n|$, on trouve :

$$\gamma \leq \gamma(f)^{1/q} \gamma^{1-1/q},$$

c'est-à-dire $\gamma \leq \gamma(f)$.

Puisque $g_n \in V(2N, A, e)$, nous avons :

$$g_n = \sum [\lambda_{i,n} + \sum \lambda_{m,\alpha,i,n} e_{m,\alpha}] e^i + c_n \text{ avec } c_n \in L, |c_n| \leq |p|$$

où, dans la somme, on a $1 \leq m \leq 2N$, $\alpha \in A$ et $0 \leq i < [L:E]$.

e^i étant une base normale de L sur E et $e_{m,\alpha}$ une base normale de E , on a $|\lambda_{m,\alpha,i,n}| \leq |g_n|$. Soit $B_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $B_{i,n}$) la boule de k de centre $\lambda_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $\lambda_{i,n}$) et de rayon $|f - g_n|$. Pour $r > n$, on a $|f - g_r| < |f - g_n|$, c'est-à-dire $|g_r - g_n| \leq |f - g_n|$. On voit que $\lambda_{m,\alpha,i,r} \in B_{m,\alpha,i,n}$, ce qui montre $B_{m,\alpha,i,r} \subset B_{m,\alpha,i,n}$. k étant maximalement complet, il existe $\lambda_{m,\alpha,i}$ (resp. λ_i) contenu dans l'intersection des $B_{m,\alpha,i,n}$ (resp. $B_{i,n}$). Pour

$$g = \sum [\lambda_i + \sum \lambda_{m,\alpha,i} e_{m,\alpha}] e^i \in L \text{ (la somme est finie),}$$

on a $|f - g| \leq |f - g_n|$ pour tout n , c'est-à-dire $|f - g| \leq \gamma(f)$. D'après le lemme 4.3, on voit que $f \in L$, c'est-à-dire $K = L$ (contrairement à l'hypothèse). K était donc une extension régulière de E .

5. Démonstration du théorème dans le cas général.

Nous nous proposons de démontrer le théorème 2.3 quand k est quelconque (c'est-à-dire k complet et $\bar{k}$ algébriquement clos).

Nous noterons Ω l'extension maximale immédiate de la clôture algébrique $\tilde{k}$ de k . Ω est algébriquement clos (vérification facile : sa clôture algébrique ayant même corps des restes et même groupe de valuation) et maximale complet (par construction). De plus, comme $\bar{k}$ est algébriquement clos, on a $\bar{\Omega} = \bar{\tilde{k}} = \bar{k}$. Nous noterons k_0 le plus petit corps complet tel que $\bar{k}_0 = \bar{k}$. k_0 est le corps des quotients de l'anneau des vecteurs de Witt de k .

W_Ω et E_Ω désigneront les ensembles W et E construits avec $k = \Omega$. Nous poserons $K_\Omega = K \otimes_E E_\Omega$. K_Ω est une extension algébrique finie de E_Ω contenue dans W_Ω (on a $K \subset W \subset W_\Omega$). D'après le paragraphe 4, K_Ω est une extension régulière de E_Ω .

Remarquons que $\bar{E}_\Omega = \bar{\Omega}(x) = \bar{k}(x) = \bar{E}$. $\bar{K}_\Omega$ est une extension algébrique finie de $\bar{E}$ contenue dans $\bar{\Omega}(x) = \bar{k}(x)$. Nous pouvons appliquer la proposition 3.2 à l'extension $\bar{K}_\Omega/\bar{E}$. Nous introduisons ainsi un élément $\bar{e}$ de $\bar{K}_\Omega$ et un polynôme $\bar{Q}$ à coefficients dans $\bar{k}[x]$ de degré $[\bar{E}(\bar{e}) : \bar{E}]$. Nous relevons $\bar{Q}$ en un polynôme Q à coefficients dans $k_0[x]$ et de même degré. Le polynôme $X + x\bar{Q}(X)$, ayant une racine simple $\bar{e}$ dans $\bar{K}_\Omega$, a d'après le lemme d'Hensel une racine simple dans le corps complet K_Ω qui relève $\bar{e}$. Notons cette racine e . Par ailleurs l'application $f \rightarrow xQ(f)$, étant une contraction de $xk_0[[x]]$ pour la valuation x -adique, a un unique point fixe dans $xk_0[[x]]$. On vérifie en passant au corps des restes que ce ne peut être que e .

Comme K_Ω/E_Ω est régulière et comme $\bar{K}_\Omega = \bar{E}(\bar{e}) = \bar{E}_\Omega(\bar{e})$, le corollaire 1.4 montre que $K_\Omega = E_\Omega(e)$ et que e est algébrique régulier sur E_Ω . Comme Q est à coefficients dans $k_0[x] \subset k(x) \subset E$, e est en fait algébrique sur E . $X + x\bar{Q}(X)$ étant irréductible sur $\bar{E}$, $X + xQ(X)$ est irréductible sur E . On a donc $[\bar{E}(\bar{e}) : \bar{E}] = [E(e) : E]$, et $E(e)$ est une extension régulière de E d'après la proposition 1.2, donc e est régulier sur E d'après le corollaire 1.4.

Considérons alors le groupe G des automorphismes continus de Ω/k . DWORK et ROBBA ont montré ([4], § 8) que, si $\alpha \in \Omega$ et si $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\sigma \in G$, alors $\alpha \in k$.

G opère sur W_Ω par $\sigma(\sum \alpha_n x^n) = \sum \sigma(\alpha_n) x^n$. Le résultat précédent montre que, si $f \in W_\Omega$, $f \in W$ si, et seulement si, $\sigma f = f$ pour tout $\sigma \in G$.

Comme $\bar{\Omega} = \bar{k}$, on peut pour chaque $\alpha \in \bar{\Omega}$ choisir un représentant $\underline{\alpha}$ dans k , les $e_{n,\alpha}$ (voir § 4.1) ainsi construits sont contenus dans W , et $\sigma(e_{n,\alpha}) = e_{n,\sigma(\alpha)}$. Si $a \in E_\Omega$, d'après le théorème de Mittag-Leffler, on peut écrire :

$$a = \lambda + \sum \lambda_{n,\alpha} e_{n,\alpha},$$

ce qui donne, puisque σ est continu,

$$\sigma(a) = \sigma(\lambda) + \sum \sigma(\lambda_{n,\alpha}) e_{n,\sigma(\alpha)}.$$

Si, pour tout $\sigma \in G$, on a $a = \sigma(a)$, il vient $\sigma(\lambda_{n,\alpha}) = \lambda_{n,\alpha}$, c'est-à-dire $\lambda_{n,\alpha} \in k$, et donc $a \in E$.

Soit $f \in K \subset K_\Omega \cap W$. Comme $f \in K_\Omega$, on a

$$f = \sum a_i e^i, \quad a_i \in E_\Omega,$$

cette décomposition étant d'ailleurs unique. Comme $f \in W$, on a, pour tout $\sigma \in G$, $f = \sigma(f) = \sum \sigma(a_i) e^i$ (e^i appartenant à $x^i k_0[[x]]$ donc à W), c'est-à-dire $\sigma(a_i) = a_i$, donc $a_i \in E$. Nous avons démontré que $K \subset E(e)$. Mais, par ailleurs, nous avons

$$[K:E] \geq [K_\Omega:E_\Omega] = [\overline{K_\Omega}:\overline{E_\Omega}] = [\overline{E}(e):\overline{E}] = [E(e):E].$$

Donc $K = E(e)$. e étant algébrique régulier K est bien une extension algébrique régulière de E .

Nous avons en fait démontré un peu plus que le théorème 2.3 puisque nous avons donné un élément particulier e qui engendre K sur E . Nous résumons les propriétés de e dans le corollaire 5, où nous notons $\underline{w}$ l'anneau des entiers de k_0 c'est-à-dire l'anneau des vecteurs de Witt de $\bar{k}$.

COROLLAIRE 5. - Si K est une extension algébrique finie de E contenue dans W , il existe e dans K , algébrique régulier sur E tel que :

- (i) $K = E(e)$,
- (ii) $e \in \underline{w}[[x]]$,
- (iii) $e + xQ(e) = 0$, où Q est un polynôme de degré $[K:E]$ à coefficients dans $\underline{w}[[x]]$.

6. Anneau des coefficients.

Rappelons que $\mathcal{O}_k$ désigne l'anneau des entiers de k . Un sous-anneau de $\mathcal{O}_k$ sera dit séparable s'il contient $\underline{w}$ et si l'ensemble des normes de ses éléments forme une suite décroissante tendant vers 0. Par exemple, tout anneau $A \subset \mathcal{O}_k$ noethérien est séparable : c'est évident en considérant les idéaux $\{\alpha \in A; |\alpha| \leq r\}$ de A .

PROPOSITION 6.1. - Soit α_n une suite d'éléments de $\mathcal{O}_k$ tendant vers 0. L'anneau $\underline{w}[\alpha_n]$ engendré sur $\underline{w}$ par les α_n est séparable.

Notons A_ε l'anneau engendré sur $\underline{w}$ par ceux des α_n qui vérifient $|\alpha_n| > \varepsilon$. Comme α_n tend vers 0, A_ε est engendré sur $\underline{w}$ par un nombre fini d'éléments. $\underline{w}$ étant noethérien, il en est de même de A_ε . Par ailleurs, si $\alpha \in \underline{w}[\alpha_n]$, il existe $\alpha_\varepsilon \in A_\varepsilon$ tel que $|\alpha - \alpha_\varepsilon| \leq \varepsilon$. Donc, si $|\alpha| > \varepsilon$, on a $|\alpha| = |\alpha_\varepsilon|$. A_ε étant noethérien donc séparable, $|\alpha_\varepsilon|$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs supérieures à ε , il en est de même de $|\alpha|$, et on voit que $\underline{w}[\alpha_n]$ est séparable.

Remarque : En général $\underline{w}[\alpha_n]$ n'est pas noethérien comme le montre l'exemple .
 $\alpha_n = p^n \prod_n$ avec $\prod_n = p$. Un système de générateurs de l'idéal (maximal)
 $\{\alpha \in \underline{w}[\alpha_n] ; |\alpha| < 1\}$ contenant obligatoirement les α_q pour q premier.

Si f_i est un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{O}$ ($f_i \in W$ et $|f_i| \leq 1$) avec
 $f_i = \sum \alpha_{n,i} x^n$, nous appellerons anneau des coefficients des f_i l'anneau $\underline{w}\langle f_i \rangle$
engendré sur $\underline{w}$ par les $\alpha_{n,i}$.

PROPOSITION 6.2. - Si les f_i sont algébriques sur E , $\underline{w}\langle f_i \rangle$ est un anneau séparable.

D'après le corollaire 5, on sait que $E(f_i) = E(e)$, avec $e \in \underline{xw}[[x]]$ et e algébrique régulier sur E , c'est-à-dire $f_i = \sum a_{i,j} e^j$ avec $a_{i,j} \in E$,
 $|a_{i,j}| \leq |f_i| \leq 1$. Il est alors immédiat de constater que $\underline{w}\langle f_i \rangle = \underline{w}\langle a_{i,j} \rangle$. Si,
pour chaque $\alpha \in \bar{k}$, nous choisissons un relèvement dans $\underline{w}$, le développement de
Mittag-Leffler s'écrit

$$a_{i,j} = \lambda_{i,j} + \sum \lambda_{i,j,n,\alpha} e_{n,\alpha} \text{ avec } e_{n,\alpha} \in \underline{w}((x)) .$$

Il s'en suit que $\underline{w}\langle a_{i,j} \rangle$ est l'anneau $\underline{w}[\lambda_{i,j}, \lambda_{i,j,n,\alpha}]$. Comme les f_i , et
donc aussi les $a_{i,j}$, sont en nombre fini, on sait que les $\lambda_{i,j,n,\alpha}$ tendent vers
0, c'est-à-dire, d'après la proposition 6.1, que $\underline{w}\langle a_{i,j} \rangle$ est séparable.

Nous terminons en appliquant ces résultats à l'étude des éléments algébriques
([2] et [5]).

Nous partons de la définition de [5] (en fait notre W est le complété du W de
ROBBA, mais cela ne change pas grand chose). Soit $\mathbb{W}$ le complété de la clôture al-
gébrique du corps des quotients de W , et soit $\mathcal{E}$ le complété de la clôture algé-
brique de E qui est contenu dans $\mathbb{W}$. Nous posons $\mathfrak{F} = \mathcal{E} \cap W$. $\mathfrak{F}$ est l'ensemble
des germes d'éléments algébriques.

LEMME 6.3. - Tout élément de $\mathfrak{F}$ est limite d'une suite d'éléments de W algé-
briques sur E .

Tout $f \in \mathcal{E}$ est limite d'une suite f_n d'éléments de $\mathbb{W}$ algébriques sur E .
Il faut montrer que, si $f \in W$, il en est de même des f_n . Pour cela on recopie
la démonstration du lemme 2.5 de [5].

COROLLAIRE 6.4. - $\mathfrak{F}$ est un corps. Si $f \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{O}$, $\underline{w}(f)$ est un anneau sépara-
ble.

Soit $f \in \mathfrak{F}$, il existe $g \in W$, algébrique sur E , tel que $|f - g| < |g|$.
Comme g est inversible dans W (car $g^{-1} \in E[g] \subset W$), il en est de même de f .

Soit $f \in \mathfrak{F} \cap \mathcal{O}$. Pour tout ε , il existe $f_\varepsilon \in W$, algébrique sur E , telle
que $|f - f_\varepsilon| < \varepsilon$. Si $a \in \underline{w}(f)$, il existe $a_\varepsilon \in \underline{w}(f_\varepsilon)$ tel que $|a - a_\varepsilon| < \varepsilon$.

En particulier, si $|a| \geq \varepsilon$, $|a| = |a_\varepsilon|$. Comme $\underline{w}(f_\varepsilon)$ est séparable, $\underline{w}(f)$ n'a qu'un nombre fini de normes supérieures à ε . $\underline{w}(f)$ est donc séparable.

Soit B l'ensemble des fonctions analytiques bornées dans $D(0, 1^-)$. On a $B = W \cap k[[x]]$. Par ailleurs, tout élément de W est somme d'un élément de B et d'un élément de E (plus précisément d'un élément analytique dans $D(0, 1^-)$). Pour les problèmes que nous traitons, la partie intéressante est celle qui est contenue dans B . Nous appellerons éléments algébriques les éléments de $\mathfrak{F} \cap B$.

LEMME 6.5. - Soit A un anneau séparable contenu dans $\mathcal{O}_k$, et F un A -module contenu dans $A[[x]]$. Nous supposons que :

- (i) F contient la fermeture intégrale de $\underline{w}(x)$ dans $\underline{w}[[x]]$;
- (ii) Pour tout $f \in F$, il existe $\alpha \in A$ tel que $|\alpha| = |f|$ et tel que (f/α) soit algébrique sur $\overline{k}(x)$.

Alors F est contenu dans le complété de la fermeture intégrale de $A(x)$ dans $A[[x]]$.

Soit $f \in F$. Nous construisons par récurrence une suite d'éléments f_n de F tels que $f_0 = f$, $f - f_n$ soient entiers sur $A(x)$, et $|f_{n+1}| < |f_n|$.

Comme $f_n \in F \subset A[[x]]$, il existe $\alpha_n \in A$ tel que $\overline{g} = (f_n/\alpha_n) \in \overline{k}[[x]]$ soit algébrique sur $\overline{k}(x)$. Soit $\overline{Q}$ le polynôme unitaire minimal de $\overline{g}$ sur $\overline{k}(x)$, et soit Q le polynôme unitaire à coefficients dans $\underline{w}(x)$ qui relève $\overline{Q}$. Comme $\overline{g} \in \overline{k}((x))$, $\overline{g}$ est séparable (proposition 3.1). D'après le lemme d'Hensel, Q a une solution g_0 dans le corps complet $k_0((x))$ telle que $\overline{g}_0 = \overline{g}$. Puisque les coefficients de Q appartiennent à $\underline{w}(x)$, g_0 a une valuation p -adique positive donc $g_0 \in \underline{w}((x))$. Nous posons $g_0 = g_1 + g$ avec $g_1 \in \underline{w}(1/x)$ et $g \in \underline{w}[[x]]$. On constate que g est un relèvement de $\overline{g}$. Par ailleurs g est, comme g_0 et g_1 , un entier algébrique sur $\underline{w}(x)$. D'après la condition (i), g appartient à F .

Posons $f_{n+1} = f_n - \alpha_n g$. Il vient

$$|f_{n+1}| = |f_n - \alpha_n g| < |\alpha_n| = |f_n|.$$

Comme $\alpha_n \in A$ et comme $\underline{w} \subset A$, $\alpha_n g$ est entier sur $A(x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il en est de même de

$$(f - f_n) + \alpha_n g = f - f_{n+1}.$$

La suite $|f_n| = |\alpha_n|$ est une suite strictement décroissante de normes d'éléments de l'anneau séparable A . Elle tend donc vers 0. $f = \lim(f - f_n)$ est bien limite d'éléments de $A[[x]]$ qui sont entiers sur $A(x)$.

COROLLAIRE 6.6. - L'ensemble des éléments algébriques est le complété de la clôture algébrique de $k(x)$ dans B .

Soit f un élément algébrique. Quitte à multiplier f par une constante, on peut supposer que $f \in \mathcal{O}$. L'anneau $\underline{w}(f)$ est séparable d'après le corollaire 6.4. Soit $F = \mathfrak{F} \cap \underline{w}(f)[[x]]$. On a clairement $f \in F$. F est un $\underline{w}(f)$ -module. La condition (i) du lemme 6.5 résulte immédiatement de $\underline{w}(x) \subset E$: si $g \in \underline{w}[[x]]$ est entier algébrique sur $\underline{w}(x)$, alors $g \in W$ et est algébrique sur E . Donc $g \in \mathfrak{F} \cap \underline{w}[[x]] \subset F$.

Soit $g \in F \subset \mathfrak{F}$. D'après le lemme 6.3, il existe g_1 algébrique sur E tel que $|g - g_1| < |g|$. Comme g est inversible dans W (corollaire 6.4), il existe un coefficient α de g tel que $|\alpha| = |g|$ (corollaire 2.2). Puisque $g \in \underline{w}(f)[[x]]$, $\alpha \in \underline{w}(f)$. On trouve que $(g/\alpha) = (g_1/\alpha)$ est algébrique sur $\overline{E} = \overline{k}(x)$, ce qui démontre la condition (ii).

Le lemme 6.5 appliqué à F démontre le corollaire puisque $A(x) \subset k(x)$ et $\underline{w}(f)[[x]] \subset B$.

La définition des éléments algébriques, que donne le corollaire 6.6, est celle que nous avons utilisée dans [2]. Elle est équivalente à celle de ROBBA.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BATEMAN (P. T.) and DUQUETTE (A. L.). - The analogue of Pisot Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series, Illinois J. of Math., t. 6, 1962, p. 594-606.
- [2] CHRISTOL (G.). - Limites uniformes p -adiques de fonctions algébriques, Thèse Université P. et M. Curie, 1977.
- [3] CHRISTOL (G.). - Elements algébriques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 14, 10 p.
- [4] DWORK (B.) and ROBBA (P.). - On ordinary linear p -adic differential equations, Trans. Amer. math. Soc., t. 231, 1977, p. 1-46.
- [5] ROBBA (P.). - Nouveau point de vue sur le prolongement algébrique, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 5, 14 p.
- [6] ROBBA (P.). - Prolongement algébrique et équations différentielles, "Proceeding of the conference on p -adic analysis [1978. Nijmegen], p. 172-184. - Nijmegen, Mathematisch Instituut Universiteit, 1978.
- [7] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.