

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERTIN DIARRA

Ultraproduits ultramétriques de corps valués

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 6, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A3_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ULTRAPRODUITS ULTRAMÉTRIQUES DE CORPS VALUÉS

par Bertin DIARRA (*)

[univ. Clermont-Ferrand-II]

La notion d'ultraproduits d'espaces vectoriels normés réels ou complexes définie dans [3] par D. DACUNHA-CASTELLE et J.-L. KRIVINE s'applique aussitôt aux espaces normés ultramétriques. Un prolongement immédiat de cette notion conduit à celle d'ultraproduits métriques de corps valués. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux corps valués ultramétriques.

1. Définition.

Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique. Considérons le sous-anneau $\prod_{i \in I} K_i$ de l'anneau produit $\prod_{i \in I} K_i$ formé des éléments $a = (a_i)_{i \in I}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ tels que $\sup_{i \in I} |a_i| < +\infty$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble I des indices. On définit une semi-valeur absolue sur l'anneau $\prod_{i \in I} K_i$ en posant, pour tout $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$,

$$|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i|.$$

Cette semi-valeur absolue est ultramétrique.

Le sous-ensemble $\mathfrak{J}$ de $\prod_{i \in I} K_i$, formé des éléments de semi-valeur absolue nulle est un idéal.

On dit que l'anneau quotient $\prod_{i \in I} K_i / \mathfrak{J}$ muni de la valeur absolue quotient est l'ultraproduit des corps valués K_i ; on le note $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$.

Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$, on note encore par a sa classe dans $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$. On désigne par $||$ la valeur absolue quotient sur $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ de la semi-valeur absolue $|$ de $\prod_{i \in I} K_i$.

LEMME 1. - Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique.

L'ultraproduit $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ des corps K_i est un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique.

Il reste à démontrer que $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est un corps. Or soit $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ différent de zéro ; autrement dit, $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| \neq 0$. Il existe $J(a) \in \mathcal{U}$ tel

(*) Texte reçu le 7 mai 1979.

Bertin DIARRA, Département de Mathématiques pures, Université de Clermont-Ferrand-II, Complexe des Cézeaux, 63170 AUBIÈRE.

que

$$\frac{|a|}{2} < |a_i| < \frac{3}{2} |a| \quad \text{pour tout } i \in J(a).$$

Donc, pour tout $i \in J(a)$, a_i est non nul, de plus $\frac{2}{3|a|} < |a^{-1}| < \frac{2}{|a|}$.

Considérons $b = (b_i)_{i \in I}$, défini par $b_i = a_i^{-1}$, si $i \in J(a)$ et $b_i = 1$ si $i \notin J(a)$. On a

$$\sup_{i \in I} |b_i| \leq \max\left(\frac{2}{|a|}, 1\right);$$

ainsi $b = (b_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$. Comme $ab - 1 = (c_i)_{i \in I}$, où $c_i = 0$ si $i \in J(a)$, et $c_i = a_i - 1$ si $i \notin J(a)$, il devient clair que $|ab - 1| = \lim_{\mathcal{U}} |c_i| = 0$; c'est-à-dire $ab - 1 \in \mathcal{J}$. On a donc dans $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$, $ab = 1$.

On supposera, dans la suite, les ultrafiltres non principaux; car, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre engendré par $j \in I$, on a $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U} = K_j$.

REMARQUE 1. - Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux maximaux de $\prod_{i \in I} K_i$ et l'ensemble des ultrafiltres sur I .

Posons pour tout $a \in \prod_{i \in I} K_i$,

$$|a|_{\infty} = \sup_{i \in I} |a_i|;$$

alors $|\cdot|_{\infty}$ est une quasi-valeur absolue sur $\prod_{i \in I} K_i$; c'est-à-dire

$$|a + b|_{\infty} \leq \max(|a|_{\infty}, |b|_{\infty}) \quad \text{et} \quad |ab|_{\infty} \leq |a|_{\infty} |b|_{\infty}.$$

Désignons par $\|\cdot\|_{\infty}$ la quasi-valeur absolue sur $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$, obtenue par passage au quotient de $|\cdot|_{\infty}$; on a

$$\|a - b\|_{\infty} = \inf_{b \in \mathcal{J}} |a - b|_{\infty}.$$

On peut démontrer directement que $\|\cdot\|_{\infty}$ est une valeur absolue; mais on a le lemme suivant.

LEMME 2. - Soit $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$. Alors

$$\|a\|_{\infty} = \inf_{b \in \mathcal{J}} |a - b|_{\infty} = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a|.$$

Soient $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$ et $J \in \mathcal{U}$; posons $a_J = (b_i)_{i \in I}$ où $b_i = a_i$ pour $i \in J$, $b_i = 0$ pour $i \notin J$, et $a'_J = (c_i)_{i \in I}$ où $c_i = 0$ pour $i \in J$, $c_i = a_i$ pour $i \notin J$; alors

$$a = a_J + a'_J \quad \text{avec} \quad a'_J \in \mathcal{J}.$$

Ainsi

$$\|a\|_{\infty} = \inf_{b \in \mathcal{J}} |a - b|_{\infty} \leq |a - a'_J|_{\infty} = |a_J|_{\infty} = \sup_{i \in J} |a_i|.$$

pour tout $J \in \mathcal{U}$. Il vient que

$$\|a\|_{\infty} \leq \inf_{J \in \mathcal{U}} \sup_{i \in J} |a_i| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a|.$$

D'autre part, il est clair que $|a| \leq \|a\|_\infty$. D'où $\|a\|_\infty = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = |a|$.

COROLLAIRE 1.

(i) L'ultraproduit $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i \in I}$ de corps valués complets est un corps valué complet.

(ii) Si l'on désigne par $\hat{K}$ le complété d'un corps valué K ; on a

$$(\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U})^{\hat{}} = \prod_{i \in I} \hat{K}_i / \mathcal{U}.$$

COROLLAIRE 2. - L'ultraproduit $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i \in I}$ de corps valués sphériquement complets est un corps sphériquement complet.

La proposition suivante, analogue au lemme 9 de [1], beaucoup plus précise que le corollaire 2, est à rapprocher de la proposition 2.5 de [5]. Comme nous l'a suggéré oralement L. HADDAD, la démonstration que nous en avons donnée en supposant l'ensemble I des indices, dénombrable, se transpose dans le cas un peu plus général donné ci-dessous.

Rappel. - Un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur un ensemble I est dit ω -incomplet s'il existe une suite $(X_n)_{n \geq 0}$, $X_n \in \mathcal{U}$, $X_{n+1} \subseteq X_n$ pour tout $n \geq 0$, telle que $\bigcap_{n \geq 0} X_n = \emptyset$.

Alors $I = \bigcup_{n \geq 0} Y_n$, où $Y_n = I \setminus X_n$, $Y_n \subseteq Y_{n+1}$; posons $I_0 = Y_0$ et $I_n = Y_n \setminus Y_{n-1}$ si $n \geq 1$; on a une partition de I , $I = \bigcup_{n \geq 0} I_n$, d'où une application g de I sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g^{-1}(n) = I_n \text{ et } I_n \notin \mathcal{U}.$$

Tout ultrafiltre non principal sur un ensemble dénombrable est ω -incomplet. Il existe sur tout ensemble infini I des ultrafiltres ω -incomplets (cf. par exemple [2]).

PROPOSITION 1. - Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre ω -incomplet sur l'ensemble I .

L'ultraproduit $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ d'une famille $(K_i)_{i \in I}$ de corps valués ultramétriques est sphériquement complet. En particulier $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est complet.

Considérons une suite décroissante $(B(a^n, r_n))_{n \geq 0}$ de boules ouvertes de $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$. On a $|a^n - a^{n+1}| < r_n$; d'où $|a^n - a^m| < r_n$, $\forall m > n$. Puisque $|a^n - a^m| = \inf_{b \in \mathcal{B}} |a^n - a^m - b|_\infty < r_n$, il existe $b_{n,m} \in \mathcal{B}$ tel que

$$|a^n - a^m - b_{n,m}|_\infty < r_n.$$

On peut donc supposer la suite $(a^n)_{n \geq 0}$ de $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ telle que dans $\prod_{i \in I} K_i$, on ait

$$|a^n - a^m|_\infty = \sup_{i \in I} |a_i^n - a_i^m| < r_n, \quad \forall m > n.$$

Considérons, avec les notations du rappel, une application g de I sur $\mathbb{N}$ telle que $I = \bigcup_{n \geq 0} I_n$ où $I_n = g^{-1}(n) \notin \mathcal{U}$. On a aussi $I = I_n \cup J_n$ avec

$L_n = \bigcup_{k=0}^n I_k \notin \mathcal{U}$, $J_n = \bigcup_{k \geq n+1} I_k \in \mathcal{U}$ et $L_n \cap J_n = \emptyset$.

La suite $(a^n)_{n \geq 0} = (a_i^n)_{n \in \mathbb{N}, i \in I}$ de $\prod_{i \in I} K_i$ s'écrit sous la forme

$$(a^n)_{n \geq 0} = (a_i^{g(j)})_{(j,i) \in I \times I}.$$

Posons $a_i = a_i^{g(i)}$, $i \in I$; puisque

$$|a^n|_\infty = \sup_{i \in I} |a_i^n| < \max(|a_0|_\infty, r_0) = \alpha,$$

on a, pour tout $i \in I$, $|a_i^{g(i)}| < \alpha$; donc $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i$.

Puisque, pour tout $i \in I$, $|a_i^n - a_i^m| \leq |a^n - a^m|_\infty < r_n$, $\forall n > m$,
et puisque, pour tout $i \in J_n = \bigcup_{k \geq n+1} I_k$, il existe $m > n$ tel que $g(i) = m$,
on a

$$|a_i^n - a_i^{g(i)}| < r_n, \quad \forall i \in J_n.$$

Mais $J_n \in \mathcal{U}$, donc

$$\lim_{\mathcal{U}} |a_i^n - a_i^{g(i)}| = |a^n - a| \leq r_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, $|a^{n+1} - a| \leq r_{n+1} < r_n$; d'où

$$|a^n - a| \leq \max(|a^n - a^{n+1}|, |a^{n+1} - a|) < r_n$$

et

$$a \in \bigcap_{n \geq 0} B(a^n, r_n) \neq \emptyset.$$

2. Remarques diverses.

(i) Soit L un corps valué ultramétrique. Posons $K_i = L$ pour tout $i \in I$; on dit que $\prod_{i \in I} L/\mathcal{U}$ est l'ultrapuissance de L ; le corps L s'identifie canoniquement à un sous-corps valué de $\prod_{i \in I} L/\mathcal{U}$. L'ultrapuissance de tout corps local L est égale à L .

(ii) L'ultraproduit conserve les homomorphismes isométriques de corps valués. En particulier, si la famille $(K_i)_{i \in I}$ est constituée de sur-corps valués de L , on a les extensions de corps valués $L \subseteq \prod_{i \in I} L/\mathcal{U} \subseteq \prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$.

(iii) Posons $K = \prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$; désignons par Λ (resp. Λ_i) et $\mathfrak{M}$ (resp. $\mathfrak{M}_i$) l'anneau de valuation et l'idéal maximal de K (resp. K_i). Soit $\prod_{i \in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ (resp. $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U}$) l'image canonique de $\prod_{i \in I} \Lambda_i$ (resp. $\prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i$) dans $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$. On a

$$\mathfrak{M} \subseteq \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i/\mathcal{U} \subset \prod_{i \in I} \Lambda_i/\mathcal{U} \subseteq \Lambda.$$

La première inclusion et la dernière pouvant être strictes comme le montre l'exemple de l'ultrapuissance d'un corps de valuation dense. Plus simplement, on a le résultat suivant.

Exemple 1. - Soit p un nombre premier; désignons par v_p la valuation p -adique sur $\mathbb{Q}$. Considérons une suite $(\rho_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq]0, 1[$ telle que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \rho_i = 1$

et pour tout $i \in \mathbb{N}$, la valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ définie par $|a|_{\rho_i} = \rho_i^{v_p(a)}$.
 Posons $\mathbb{Q}_{\rho_i} = (\mathbb{Q}, |\cdot|_{\rho_i})$; soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre non principal sur $\mathbb{N}$; alors
 $K = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{\rho_i} / \mathcal{U}$ est un corps sphériquement complet de valuation dense. Pour tout
 $i \in \mathbb{N}$, $\Lambda_i = \mathbb{Z}_{(p)}$ (le localisé de $\mathbb{Z}$ en p) et $\mathbb{M}_i = p\mathbb{Z}_{(p)}$; de plus $\mathbb{Q} \subset \Lambda$,
 car si $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, alors $|a| = \lim_{\mathcal{U}} \rho_i^{v_p(a)} = 1$. En particulier, $a_0 = (p)_{i \in \mathbb{N}}$
 est tel que $a_0 \notin \mathbb{M}$, mais $a_0 \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_i / \mathcal{U}$, donc

$$\mathbb{M} \neq \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{M}_i / \mathcal{U}.$$

On voit que $a_0^{-1} = (\frac{1}{p})_{i \in \mathbb{N}} \notin \prod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i / \mathcal{U}$, mais $a_0^{-1} \in \Lambda$, ainsi

$$\Lambda \neq \prod_{i \in \mathbb{N}} \Lambda_i / \mathcal{U}.$$

Le complété de $\mathbb{Q}_{\rho_i}$ étant égal à $\mathbb{Q}_p$, notons $\mathbb{Q}_{p,i}$ le corps $\mathbb{Q}_p$ muni de la
 valeur absolue qui prolonge $|\cdot|_{\rho_i}$; alors $K = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_{p,i} / \mathcal{U}$ (corollaire 1,
 lemme 2), de plus $\mathbb{Q}_p \subset \Lambda$.

(iv) Lorsque la valeur absolue de chaque K_i est triviale, la valeur absolue de
 $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est triviale. On retrouve la notion algébrique d'ultraproduit de corps
 que l'on écrit $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ (cf. [6]).

(v) Posons, avec les notations de (iii), $\Gamma = \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$ et $\mathbb{M} = \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i / \mathcal{U}$; alors
 Γ est un anneau local d'idéal maximal $\mathbb{M}$: car si $a \in \Gamma$ et $a \notin \mathbb{M}$, l'ensemble
 des $i \in I$ tels que $|a_i| < 1$ n'appartient pas à $\mathcal{U}$, donc

$$\{i \in I; |a_i| = |a_i^{-1}| = 1\} \in \mathcal{U},$$

il vient que $a^{-1} \in \Gamma$.

Lorsque $\mathbb{M} \neq \mathbb{M}$, le localisé de Γ en $\mathbb{M}$ est égal à Λ , et $\Lambda/\mathbb{M}$ est le corps
 de fractions de $\Gamma/\mathbb{M}$.

Désignons par k_i le corps résiduel de chaque corps K_i . On a le lemme suivant.

LEMME 3. - Le corps résiduel de l'anneau local $\Gamma = \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$ est isomorphe à
 l'ultraproduit $\prod_{i \in I} k_i / \mathcal{U}$ des corps résiduels k_i .

En effet, l'homomorphisme d'anneaux φ , composé des homomorphismes canoniques
 $\prod_{i \in I} \Lambda_i \rightarrow \prod_{i \in I} k_i \rightarrow \prod_{i \in I} k_i / \mathcal{U}$, est surjectif. Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Lambda_i$ est tel
 que $\lim_{\mathcal{U}} |a_i| = 0$, il existe $J \in \mathcal{U}$ tel que, pour tout $i \in J$, $|a_i| < 1$; ainsi
 $\varphi(a) = 0$; d'où, par passage au quotient, un homomorphisme surjectif ψ de
 $\Gamma = \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$ sur $\prod_{i \in I} k_i / \mathcal{U}$ dont le noyau $\ker \psi = \mathbb{M}$.

(vi) La valeur absolue sur $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ peut être triviale sans que celles des K_i
 le soient.

Exemple 2. - Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$
 le corps p -adique $\mathbb{Q}_p$ muni de la valeur absolue $|a_p| = p^{-v_p(a_p)}$; ici $\Lambda_p = \mathbb{Z}_p$
 et $\mathbb{M}_p = p\mathbb{Z}_p$. Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal; puisque pour tout
 $a_p \in p\mathbb{Z}_p$, $|a_p| \leq p^{-1}$, on a, pour tout $a = (a_p) \in \prod_{p \in \mathcal{P}} p\mathbb{Z}_p$, $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_p| = 0$.

Ainsi $\prod_{p \in P} pZ_p/\mathcal{U} = (0)$; l'idéal maximal de $\prod_{p \in P} Q_p/\mathcal{U}$ est donc nul et la valeur absolue de $\prod_{p \in P} Q_p/\mathcal{U}$ est triviale. De plus,

$$\prod_{p \in P} Q_p/\mathcal{U} = \prod_{p \in P} Z_p/\mathcal{U} = \prod_{p \in P} Q/\mathcal{U} = \prod_{p \in P} Z/\mathcal{U} = \prod_{p \in P} F_p/\mathcal{U},$$

où $F_p = Z_p/pZ_p$.

3. Ultraproduits de corps de valuations discrètes.

THÉORÈME 1. - Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille de corps de valuations discrètes v_i telles que $v_i(K_i^*) = \mathbb{Z}$, et soit $(\rho_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels tels que $0 < \rho_i < 1$. Considérons sur chaque corps K_i la valeur absolue définie par $|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)}$.

- (i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, la valeur absolue de $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est triviale.
- (ii) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$, le corps $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est de valuation dense.
- (iii) Si $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$, alors $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps de valuation discrète. On a $\mathbb{M} = \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i/\mathcal{U}$ et $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$.

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 0$, on voit comme dans l'exemple 2 que la valeur absolue de $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est triviale.

(ii) Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. Fixons $\rho \in \mathbb{R}_+$, $0 < \rho < 1$; on a, pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$, où $\alpha_i = (\log \rho_i / \log \rho) > 0$ et $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 0$. Désignons par n_i la partie entière de $1/\alpha_i$; on a $1/(1+n_i) < \alpha_i \leq 1/n_i$ et $\lim_{\mathcal{U}} 1/n_i = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, pour tout $i \in I$, n_i s'écrit de façon unique $n_i = nq_i(n) + r_i(n)$ avec $0 \leq r_i(n) < n$; de plus,

$$\frac{1}{n} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{q_i(n)}{n_i} = \lim_{\mathcal{U}} \frac{q_i(n)}{1+n_i} = \lim_{\mathcal{U}} \alpha_i q_i(n).$$

Puisque $\lim_{\mathcal{U}} 1/n_i = 0$, il existe $J_n \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $i \in J_n$, $n < n_i$; ainsi $q_i(n) \neq 0$ lorsque $i \in J_n$.

Soit $(\Pi_i)_{i \in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i . Considérons $a^{(n)} = (a_i^{(n)})_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ avec $a_i^{(n)} = \Pi_i^{q_i(n)}$ si $i \in J_n$, et $a_i^{(n)} = 0$ si $i \notin J_n$. Puisque $|\Pi_i| = \rho_i = \rho^{\alpha_i}$, on a

$$|a^{(n)}| = \lim_{\mathcal{U}} |\Pi_i|^{q_i(n)} = \lim_{\mathcal{U}} \rho^{\alpha_i q_i(n)} = \rho^{1/n} < 1.$$

Il vient que $a^{(n)} \in \mathbb{M}$. Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^{(n)}| = 1$. Le corps $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est donc de valuation dense.

N.-B. - On a, comme dans l'exemple 1,

$$\mathbb{M} \neq \prod_{i \in I} \mathbb{M}_i/\mathcal{U} \text{ et } \Lambda \neq \prod_{i \in I} \Lambda_i/\mathcal{U}.$$

(iii) Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$. On a, pour tout $i \in I$, $\rho_i = \rho^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i = (\log \rho_i / \log \rho) > 0$ et $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 1$.

On sait que $\mathfrak{M} \subseteq \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / \mathcal{U} \subset \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U} \subseteq \Lambda$. Si $a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$, puisque, pour tout $i \in I$, $v_i(a_i) \geq 1$, on a

$$|a_i| = \rho_i^{v_i(a_i)} \leq \rho_i ;$$

il vient que

$$\lim_{\mathcal{U}} |a_i| \leq \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1 \quad \text{et} \quad a \in \mathfrak{M} ;$$

donc $\mathfrak{M} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$.

Soit $a \in \Lambda$; ou bien $|a| < 1$, alors

$$a \in \mathfrak{M} \subset \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$$

ou bien $|a| = \lim_{\mathcal{U}} |a_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho^{\alpha_i v_i(a_i)} = 1$, on a alors, dans $\mathbb{R}$,

$$\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i v_i(a_i) = 0 ;$$

comme $\lim_{\mathcal{U}} \alpha_i = 1$, on a $\lim_{\mathcal{U}} v_i(a_i) = 0$; mais $v_i(a_i) \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in I$, donc

$$\{i \in I ; v_i(a_i) = 0\} \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}.$$

Ainsi $\Lambda \subseteq \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$ et $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$.

Soit $(\Pi_i)_{i \in I}$ une famille d'uniformisantes des corps K_i ; alors

$$\Pi = (\Pi_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$$

est tel que

$$|\Pi| = \lim_{\mathcal{U}} |\Pi_i| = \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1.$$

On voit que $\Pi\Lambda = \mathfrak{M}$; il vient que $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est un corps de valuation discrète.

COROLLAIRE 1. - Supposons $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i \neq 0$, le corps valué non discret $\prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est sphériquement complet (donc complet) lorsque l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- (i) Chaque corps K_i est complet.
- (ii) L'ultrafiltre $\mathcal{U}$ est ω -incomplet.

Il suffit d'appliquer, ou bien le corollaire 2 du lemme 2 (un corps de valuation discrète est sphériquement complet si, et seulement s'il est complet), ou bien la proposition 1.

COROLLAIRE 2. - Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho < 1$.

Le corps résiduel k du corps de valuation discrète $K = \prod_{i \in I} K_i / \mathcal{U}$ est isomorphe à l'ultraproduit $\prod_{i \in I} k_i / \mathcal{U}$ des corps résiduels k_i des corps K_i .

C'est une conséquence immédiate du lemme 3, car $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i / \mathcal{U}$ et $\mathfrak{M} = \prod_{i \in I} \mathfrak{M}_i / \mathcal{U}$.

Remarque 2. - Le corollaire 2 n'est plus vrai si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_i = 1$. En effet, on a vu dans l'exemple 1 que $\mathbb{Q} \subset \Lambda$, tandis que le corps résiduel de $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_{(p)}/\mathcal{U}$ est égal à

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_p/\mathcal{U} = \mathbb{F}_p.$$

Ceci montre si besoin était, que la notion, de caractère métrique, d'ultraproduit de corps valués définie ici est différente de celle donnée dans [1].

COROLLAIRE 3. - Supposons $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_i = \rho < 1$.

Soit σ_i un système de représentants dans Λ_i du corps résiduel k_i de K_i .

(i) L'image canonique $\prod_{i \in I} \sigma_i/\mathcal{U}$ de $\prod_{i \in I} \sigma_i$ dans $K = \prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$, identique à l'ultraproduit d'ensembles $\prod_{i \in I} \sigma_i/\mathcal{U}$, est un système de représentants dans $\Lambda = \prod_{i \in I} \Lambda_i/\mathcal{U}$ du corps résiduel k de K .

(ii) Soit Π_i une uniformisante de K_i . Si $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est complet (cf. corollaire 1), alors tout élément a de $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ s'écrit sous la forme unique $a = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} \alpha_n \Pi^n$, où $n_0 \in \mathbb{Z}$, $\alpha_n \in \prod_{i \in I} \sigma_i/\mathcal{U}$ pour $n \geq -n_0$ et $\Pi = (\Pi_i)_{i \in I}$.

Exemples 3. - Soit L un corps de valuation discrète complet, et soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille d'extensions finies de L de degrés n_i et d'indices de ramification $e_i = [K_i^* : L^*]$. Considérons sur chaque K_i l'unique valeur absolue qui prolonge celle de L . Alors, ou bien $\lim_{\mathcal{U}} e_i < +\infty$ et $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est complet de valuation discrète, ou bien $\lim_{\mathcal{U}} e_i = +\infty$ et $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est sphériquement complet de valuation dense.

(a) Si $\lim_{\mathcal{U}} n_i = +\infty$ et si I est dénombrable, on voit que $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est une extension transcendante de L (cf. [4]).

(b) Si $\lim_{\mathcal{U}} n_i < +\infty$, si le corps résiduel ℓ de L est infini et si I est dénombrable, alors $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est encore une extension transcendante de L . Par contre, si ℓ est fini, $\prod_{i \in I} K_i/\mathcal{U}$ est un corps local extension finie de L . On sait (cf. [7]) que si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, le nombre des extensions de L de degré donné est fini ; tout ultraproduit de tels corps est donc un de ces corps.

4. Ultraproduit ρ -normalisé des corps p -adiques $\mathbb{Q}_p$.

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Considérons pour $p \in \mathcal{P}$, le corps p -adique $\mathbb{Q}_p$ et le corps des séries formelles de Laurent $\mathbb{F}_p((X_p))$, où $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Soit $\rho \in \mathbb{R}_+$, $0 < \rho < 1$; on considère sur $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p((X_p))$) la valeur absolue ρ -normalisée $|a_p|_\rho = \rho^{v_p(a_p)}$ (resp. $|S_p| = \rho^{w_p(S_p)}$), où v_p (resp. w_p) est la valuation de $\mathbb{Q}_p$ (resp. $\mathbb{F}_p((X_p))$). Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathcal{P}$, non principal ; les corps $K_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Q}_p/\mathcal{U}$ et $S_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{F}_p((X_p))/\mathcal{U}$ sont complets, de valuation discrète, et ont le même corps résiduel $\underline{k} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{F}_p/\mathcal{U}$ (corollaires 1 et

2 du théorème 1).

THÉORÈME 2. - Les corps de valuation discrète, complets $K_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} Q_p / \mathcal{U}$ et $S_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p)) / \mathcal{U}$ sont isomorphes. En fait, chacun de ces deux corps est isométriquement isomorphe au corps des séries formelles de Laurent $k((X))$ muni de la valeur absolue $|S|_p = \rho^{w(S)}$, où w est la valuation de $k((X))$.

(i) Puisque F_p est un système de représentants dans $F_p[[X_p]]$ du corps résiduel de $F_p((X_p))$, on déduit du corollaire 3 du théorème 1 que $k = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p / \mathcal{U}$ est un système de représentants dans $\prod_{p \in \mathcal{P}} F_p[[X_p]] / \mathcal{U}$ du corps résiduel de S_p , et que tout $S = (S_p)_{p \in \mathcal{P}} \in S_p$ s'écrit de façon unique $S = \sum_{n=-n_0}^{+\infty} \alpha_n X^n$ où $\alpha_n \in k$ et $X = (X_p)_{p \in \mathcal{P}}$. D'où l'identification de S_p à $k((X))$.

(ii) Soit $\Lambda_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} Z_p / \mathcal{U}$ l'anneau de valuation de K_p . On sait (cf. [1]) que le corps $k = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p / \mathcal{U}$ est de caractéristique zéro. Il existe donc (cf. [8], prop. 6, chap. II) un sous-corps de représentants $C_p \subseteq \Lambda_p$ isomorphe à k tel que Λ_p est isomorphe à $C_p[[X]]$, donc à $k[[X]]$ (cf. [8], théor. 2, chap. II). Il vient que les corps K_p et $k((X))$ sont isomorphes.

Remarque 3. - Soit K_p un sur-corps valué complet de Q_p de valuation discrète, de corps résiduel k_p . Si la valeur absolue de chaque K_p est ρ -normalisée, alors comme ci-dessus, $\prod_{p \in \mathcal{P}} K_p / \mathcal{U}$ est isométriquement isomorphe à $(\prod_{p \in \mathcal{P}} k_p / \mathcal{U})((X))$.

Remarque 4. - Le théorème 2 ci-dessus est l'analogue du théorème 4 de [1]. La démonstration du théorème 1 (resp. du théorème 5) de [1] sur les équations diophantiennes se reproduit ici, à quelques modifications près, en s'appuyant sur le théorème 2.

Remarque 5. - Soit $(\rho_p)_{p \in \mathcal{P}} \subset]0, 1[$.

(i) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_p = 0$, alors $\prod_{p \in \mathcal{P}} Q_p / \mathcal{U} = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p / \mathcal{U} = \prod_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p)) / \mathcal{U}$.

(ii) Si $0 < \lim_{\mathcal{U}} \rho_p < 1$, les corps $\prod_{p \in \mathcal{P}} Q_p / \mathcal{U}$ et $\prod_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p)) / \mathcal{U}$ sont isomorphes à $k((X))$.

(iii) Si $\lim_{\mathcal{U}} \rho_p = 1$, les corps $\prod_{p \in \mathcal{P}} Q_p / \mathcal{U}$ et $\prod_{p \in \mathcal{P}} F_p((X_p)) / \mathcal{U}$ sont sphériquement complets, de valuation dense; leur corps résiduels contiennent chacun k , et sont distincts de k . Ces deux corps ont-ils même corps résiduel? Auquel cas, ils seraient isomorphes.

Soit K un corps; on désignera par $\tilde{K}$ la clôture algébrique de K .

La valeur absolue ρ -normalisée de Q_p s'étend de façon unique en une valeur absolue sur $\tilde{Q}_p$. Désignons par C_p le complété de $\tilde{Q}_p$ (C_p est indépendant de la ρ -normalisation de la valeur absolue de Q_p). Puisque $\mathcal{P}$ est dénombrable, si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre non principal sur $\mathcal{P}$, l'ultraproduit $\prod_{p \in \mathcal{P}} \tilde{Q}_p / \mathcal{U}$ est sphériquement complet (proposition 1), et est égal à $\prod_{p \in \mathcal{P}} C_p / \mathcal{U}$ (corollaire 1 du lemme 2). On pose $\Gamma_p = \prod_{p \in \mathcal{P}} \tilde{Q}_p / \mathcal{U} = \prod_{p \in \mathcal{P}} C_p / \mathcal{U}$. Le groupe des valeurs $|\Gamma_p^*|$ de Γ_p est égal

à $\tilde{R}_+^*$.

On voit que Γ_p ultraproduit de corps algébriquement clos est algébriquement clos ; Γ_p contient une clôture algébrique $\tilde{K}_p$ de $K_p = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p / \mathcal{U} \simeq \underline{k}((X))$, où $\underline{k} = \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p / \mathcal{U}$ et aussi le complété $\tilde{K}_p^\wedge$ de K_p . On a

$$|\tilde{K}_p^\wedge| = |\tilde{K}^{\wedge*}| = \rho^{\mathbb{Q}}.$$

Puisque $|\Gamma_p^\wedge| = \tilde{R}_+^*$, le corps Γ_p n'est pas une extension immédiate de $\tilde{K}_p$ (resp. $\tilde{K}_p^\wedge$).

Le corps résiduel de $\tilde{K}_p$, donc aussi de $\tilde{K}_p^\wedge$, (resp. $\tilde{\mathbb{Q}}_p$) est $\underline{k}$ (resp. $\tilde{\mathbb{F}}_p$). Soient A_p l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$, et M_p son idéal maximal ; puisque A_p est hensélien, on voit que l'anneau local $\prod_{p \in P} A_p / \mathcal{U}$ d'idéal maximal $\prod_{p \in P} M_p / \mathcal{U}$ est hensélien et contient donc un sous-corps de représentants isomorphe à son corps résiduel $\prod_{p \in P} \tilde{\mathbb{F}}_p / \mathcal{U}$. On voit de la même manière que l'anneau des entiers de Γ_p contient un sous-corps de représentants isomorphes au corps résiduel $\mathbb{R}_p$ de Γ_p . On a les inclusions $\underline{k} \subset \prod_{p \in P} \tilde{\mathbb{F}}_p / \mathcal{U} \subset \mathbb{R}_p$; ces inclusions étant strictes. Le corps Γ_p est donc, à tout point de vue, beaucoup plus "grand" que $\tilde{K}_p^\wedge$. Tenant compte du fait que $\tilde{K}_p^\wedge = \bigcup_{n \geq 1} \tilde{k}^\wedge((X^{1/n}))$, on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 2.

(i) Le complété $\tilde{K}_p^\wedge$ de la clôture algébrique $\tilde{K}_p$ de K_p , sous-corps de Γ_p , est isométriquement isomorphe au corps $\tilde{k}((X))_{\mathbb{Q}}$ des séries formelles $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j X^{q_j}$ à coefficients α_j dans $\underline{k}$ et à exposants rationnels q_j finis ou formant une suite strictement croissante dans $\mathbb{Q}$.

(ii) Il existe dans Γ_p une complétion sphérique de $\tilde{K}_p^\wedge$, isomorphe au corps $S(\tilde{k}, \mathbb{Q})$ des séries formelles à coefficients dans $\underline{k}$ et à exposants rationnels.

Remarque 6. - On voit facilement que si l'on pose pour tout $n \geq 2$,

$$\underline{k}_n = \prod_{p \in P} \mathbb{F}_p / \mathcal{U}_n,$$

alors $\underline{k}_n$ est une extension cyclique de $\underline{k}$ de degré n ; de plus $\tilde{k} = \bigcup_{n \geq 1} \underline{k}_n$. On en déduit que le corps $\underline{k}$ est quasi fini (cf. [8], chap. XIII, § 2). On peut donc associer au corps de valuation discrète $K_p = \prod_{p \in P} \mathbb{Q}_p / \mathcal{U}$ une formation de classes (cf. [8], chap. XIII, § 4).

RÉFÉRENCES

- [1] AX (J.) and KOCHEN (S.). - Diophantine problems over local fields, I, Amer. J. of Math., t. 87, 1965, p. 605-630.
- [2] BELL (J. L.) and SLOMSON (A. B.). - Models and ultraproducts. - Amsterdam, London, North-Holland, 1969.

- [3] DACUNHA-CASTELLE (D.) et KRIVINE (J.-L.). - Applications des ultraproducts à l'étude des espaces et des algèbres de Banach, *Studia Math*, t. 41, 1972, p. 315-334.
 - [4] DIARRA (B.). - Ultraproduits de corps munis d'une valeur absolue ultramétrique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 284, 1977, p. 1261-1263.
 - [5] GRUSON (L.) and PUT (M. van der). - Banach spaces, *Table ronde d'Analyse non archimédienne [1972. Paris]*, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 39-40, 1974, p. 56-100.
 - [6] KOCHEN (S.). - Ultraproduits in the theory of models, *Annals of Math.*, t. 74, 1961, p. 221-261.
 - [7] KRASNER (M.). - Nombre des extensions d'un degré donné d'un corps p -adique, "Colloques internationaux C. N. R. S. n° 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964. Clermont-Ferrand], p. 143-169. Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966.
 - [8] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. A. S. I. 1296. - Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1296 ; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 8).
-