PHILIPPE ROBBA

Points singuliers d'équations différentielles

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. nº 5, p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
6e année, 1978/79, n° 5, 2 p.
4 et 11 décembre 1978

POINTS SINGULIERS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(d'après Francesco BALDASSARRI)

par Philippe ROBBA (*)
[Univ. Paris-Sud, Orsay]

Soit k un corps de caractéristique 0 algébriquement clos. Posons $K = k((x))$. Considérons le système différentiel

(1) $$Y' = AY ,$$

où Y est un n-vecteur, et A une $n \times n$ matrice à coefficients dans K.

Il est bien connu (FUCHS, TURRITTIN, MANIN, WASOW, etc.) qu'il existe une extension finie L de K, $L = k((x^{1/q}))$, et une $n \times n$ matrice H inversible à coefficients dans L, telle que, si $Z = HY$, Z vérifie le système différentiel

(2) $$Z' = BZ ,$$

où B est sous forme de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad B_i = \begin{pmatrix} \omega_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \omega_i \end{pmatrix} , \quad \omega_i \ L .$$

Modulo des dérivées logarithmiques, les ω_i sont des invariants du système différentiel (ou plus précisément du L module différentiel associé au système différentiel considéré).

Soit alors $k = \mathbb{C}_p$, $\mathfrak{A}$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en 0, $\mathfrak{M}$ son corps des fractions.

Suivant CLARK, on dira que $\omega \in \mathbb{C}_p$ n'est pas un nombre de Liouville (p-adique) si, pour $s \in \mathbb{Z}$, $s \to +\infty$, on a

$$\mathrm{ord}_p(\omega + s) \leqslant O(\log s) .$$

(Par exemple, tous les nombres algébriques et tous les éléments de $\mathbb{C}_p$ qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}_p$ ne sont pas des nombres de Liouville.)

Supposons alors que le système (1) ait ses coefficients dans $\mathfrak{M}$, et qu'il existe une matrice H de $\mathrm{Gl}_n(K)$ (on prend donc $L = K$) nous permettant de nous ramener à la forme canonique de Jordan (2). Le problème qui se pose est : Existe-t-il une matrice H à coefficients dans $\mathfrak{M}$ permettant de nous ramener à la forme de Jordan ? (Dans le cas complexe, la réponse est oui dans le cas fuchsien, c'est-à-dire si les ω_i n'ont pas de pôles en 0, et en général non dans le cas singulier

---

(*) Texte reçu le 4 juillet 1979.
Philippe ROBBA, 138 rue Nationale, 75013 PARIS

irrégulier.

BALDASSARRI montre que, dans le cas p-adique, la réponse est oui si chaque fois que $\omega_i - \omega_h$ a un pôle simple en 0 alors le résidu de ce pôle n'est pas un nombre de Liouville.

Pour plus de détails et en particulier pour une formulation en termes de modules différentiels, on se reportera à l'article de F. BALDASSARRI : "Differential modules and singular points of p-adic differential equations (à paraître).