GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

GILLES CHRISTOL

Introduction aux travaux de Dwork

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. nº 12, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 12, 9 p.
20 mars et 24 avril 1978

INTRODUCTION AUX TRAVAUX DE DWORK

par Gilles CHRISTOL

Nous nous proposons d'exposer, aussi élémentairement que possible, les idées qui ont conduit DWORK de l'étude des fonctions zêta des variétés algébriques sur les corps finis aux équations différentielles p-adiques.

1. p est un nombre premier, q une puissance de p fixée dans la suite, et $\underset{\sim}{F}_q$ désigne le corps à q éléments. V est une variété projective sur $\underset{\sim}{F}_q$ définie par la forme homogène de degré d, à coefficients dans $\underset{\sim}{F}_q$,

$$\bar{F}(X) = \bar{F}(X_1, \ldots, X_{n+1}) .$$

N_s désigne le nombre de points (projectifs) de V dans $\underset{\sim}{F}_{q^s}$ (i. e. le nombre de solutions dans $\underset{\sim}{F}_{q^s}$ de $\bar{F}(X) = 0$). Par définition, la fonction zêta de V est donnée par

$$Z_V(t) = \exp(\textstyle\sum_s N_s(t^s/s)) = \prod_P \frac{1}{1 - t^{\deg(P)}} ,$$

où P parcourt l'ensemble des "points fermés" de V (à chaque P correspond l'anneau des fonctions sur V sans singularités en P, le corps des restes de cet anneau <u>local</u> est $\underset{\sim}{F}_{q^{\deg(P)}}$. La deuxième égalité se démontre immédiatement en passant aux dérivées logarithmiques, et en remarquant qu'à un P correspond $\deg(P)$ solutions dans N_s). Ordinairement on réserve le terme fonction zêta à la fonction

$$\zeta(V , s) = Z_V(q^{-s}) .$$

2. Soit Ω le complété de la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, la valuation est normalisée par $v(p) = 1$. π désigne une racine $(p - 1)$-ième de $(- p)$ fixée dans la suite.

Soit $\theta(z)$ la série formelle définie par $\exp(\pi z - \pi z^p)$, on a :

(i) $\theta(z)$ converge pour $v(z) > (1 - p)/p^2$ (et vaut $(\exp \pi z) \exp(- \pi z^p)$ pour $v(z) > 0$),

(ii) $\theta(1) = \zeta$ est une racine p-ième de 1, primitive car $\theta(z) = 1 + \pi z \pmod{\pi^2}$, donc $\zeta = 1 + \pi \pmod{\pi^2}$

(iii) si $\alpha \in \Omega$, $\alpha^{p^\nu} = \alpha$ (i. e. α représentant multiplicatif d'un élément $\bar{\alpha}$ de $\underset{\sim}{F}_{p^\nu}$) on obtient l'identité formelle :

$$\prod_{j=0}^{\nu-1} \theta(\alpha^{p^j} z) = \theta(z)^{\alpha+\alpha^p+\cdots+\alpha^{p^{\nu-1}}} \quad \text{(vérification immédiate pour } v(z) > 0 \text{)}$$

qui donne, pour $z = 1$,

$$\exp(\pi z - \pi z^{p^\nu})_{z=\alpha} = \prod_{j=0}^{\nu-1} \theta(\alpha^{p^j}) = \zeta^{\alpha+\dots+\alpha^{p^{\nu-1}}} = \zeta^{\,\mathrm{tr}(\bar\alpha)} ,$$

où tr désigne la trace absolue (de $\underset{\sim}{F}_{p^\nu}$ dans $\underset{\sim}{F}_p$).

Soit F le relèvement de $\bar F$ dont les coefficients sont des représentants multiplicatifs. $\zeta^{\mathrm{tr}(\ )}$ étant multiplicatif, en décomposant F en somme de monômes, il vient, pour α et β_i racines $(q^s - 1)$-ièmes de 1 , avec

$$H_s(z , X) = \exp(\pi z F(X) - \pi z^{q^s} F(X^{q^s})) :$$

$$\zeta^{\mathrm{tr}(\bar\alpha\bar F(\beta))} = H_s(\alpha , \beta) .$$

Comme $\zeta^{\mathrm{tr}(\ )}$ est un caractère <u>non trivial</u> de $\underset{\sim}{F}_{q^s}$, on obtient

$$\sum_{\alpha\in \underset{\sim}{F}_{q^s}} \zeta^{\mathrm{tr}(\bar\alpha\bar\beta)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \bar\beta \neq 0 \\ q^s & \text{si } \bar\beta = 0 \end{cases} .$$

Notons alors N_s^* le nombre de points (projectifs) à coordonnées dans $\underset{\sim}{F}_{q^s}$ de $V \cap (\prod_i X_i \neq 0)$, il vient

$$(q^s - 1)N_s^* = \frac{1}{q^s} \Big((q^s - 1)^{n+1} + \sum_{z,X_i \text{ racines } (q^s-1)\text{-ièmes de } 1} H_s(z , X)\Big)$$

(le terme $(q^s - 1)^{n+1}$ correspond, pour chaque X , à $z = 0$).

3. Nous notons I l'ensemble des multi-indices $u = (u_0 , u_1 , \dots , u_{n+1})$ tels que u_i soit un entier positif ou nul, et que $du_0 = u_1 + \dots + u_{n+1}$, et nous posons :

$$L(b) = \{\textstyle\sum_{u\in I} A_u X^u ; \ \inf_u(v(A_u) - bu_0) > -\infty\} .$$

On vérifie que $H_s(X_0 , X)$ appartient à $L((p - 1)/pq^s)$. Comme $L(b)$ est un anneau, on peut définir sur $L(\underset{\sim}{b}/q^s)$ (avec $\underset{\sim}{b} = (p - 1)/p$) l'opérateur "multiplication par H_s". On définit par ailleurs l'opérateur ψ par

$$\psi(\sum A_u X^u) = \sum A_{qu} X^u .$$

ψ envoie $L(b)$ dans $L(qb)$.

Avec $H_s(X_0 , X) = \sum a_u X^u$ et $\psi^s(H_s \sum b_u X^u) = \sum c_u X^u$, il vient

$$c_u = \sum_v a_{q^s u-v} b_v ,$$

or on trouve immédiatement que

$$\sum_{z,X_i \text{ racines } (q^s-1)\text{-ièmes de } 1} H_s(z , X) = \sum_u a_{(q^s-1)u} (q^s - 1)^{n+2} .$$

Cette somme n'est donc autre que $(q^s - 1)^{n+2}$ fois la trace de la "matrice infinie" associée à l'opérateur $\psi^s \circ H_s$. Le résultat de 2 s'écrit donc

$$N_s^* = \frac{1}{q^s}((q^s - 1)^n + (q^s - 1)^{n+1} \mathrm{tr}(\psi^s \circ H_s)) .$$

4. Posons $\alpha = \psi \circ H_1$, il vient $\psi^s \circ H_s = \alpha^s$. α est défini par

$$L(\underset{\sim}{b}) \xrightarrow{\text{identité}} L(\underset{\sim}{b}/q) \xrightarrow{H_1} L(\underset{\sim}{b}/q) \xrightarrow{\psi} L(\underset{\sim}{b}) ,$$

$L(b)$ étant muni de sa topologie naturelle ($v(\sum A_u X^u) = \inf(v(A_u) - bu_0)$). On vérifie que H_1 et ψ sont continus, et que le plongement de $L(\underset{\sim}{b})$ dans $L(\underset{\sim}{b}/q)$ est complètement continu [5], il en est de même de α. Un opérateur complètement continu vérifie (presque) les mêmes formules qu'un opérateur en dimension finie, en particulier

$$\Delta(t) = \det(1 - t\alpha) = \prod_{\text{valeurs propres}} (1 - \lambda t)^{\operatorname{mult}(\lambda)}$$

$$= \exp\{- \textstyle\sum_{s=1}^{\infty} \operatorname{tr}(\alpha^s)\, t^s/s\} .$$

La formule du § 3, ainsi que la définition de Z_V, permettent d'écrire, en développant les $(q^s - 1)^n$:

$$Z_V^*(qt) = \prod_{i=0}^{n} (1 - q^{n-i}\, t)^{(-)^{i+1}\binom{n}{i}} \prod_{i=0}^{n+1} \Delta(q^{n+1-i}\, t)^{(-)^{i+1}\binom{n+1}{i}} ,$$

où Z_V^* est la fonction zêta associée à la variété $V \cap (\prod_i X_i \neq 0)$.

5. α n'est autre que l'opérateur ψ "tordu" par la fonction $\exp(\pi X_0\, F(X))$. Cette dernière n'appartient pas à $L(\underset{\sim}{b})$, cependant l'opérateur

$$D_i = X_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \pi X_0\, F_i \quad \text{avec} \quad F_i = X_i\, \partial F(X)/\partial X_i$$

obtenu en "tordant" $X_i\, \partial/\partial X_i$ par $\exp(\pi X_0\, F(X))$ opère sur $L(b)$. On obtient la formule fondamentale

$$D_i \circ \alpha = q\alpha \circ D_i .$$

On peut alors construire le "complexe de l'algèbre extérieure"

$$0 \longrightarrow L(\underset{\sim}{b}) \xrightarrow{d} L(\underset{\sim}{b})^{(n+1)} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} L(\underset{\sim}{b})^{\binom{n+1}{i}}$$

$$\longrightarrow \dots \xrightarrow{d} L(\underset{\sim}{b})^{\binom{n+1}{n}} \xrightarrow{d} L(\underset{\sim}{b})^{\binom{n+1}{n+1}} \longrightarrow W \longrightarrow 0 ,$$

où d n'est autre que la différentiation extérieure. L'image par la dernière application d donne, avec $(dX)_{\hat{i}} = \bigwedge_{j \neq i} dX_j$:

$$d[L(\underset{\sim}{b})^{\binom{n+1}{n}}] = \{d[\sum f_i (dX)_{\hat{i}}]\} = \{\sum (-)^{i+1}\, D_i\, f_i \wedge dX_j\} .$$

On choisit donc $W = L(\underset{\sim}{b})/\sum D_i\, L(\underset{\sim}{b})$.

Lorsque les polynômes $\bar{F}_i$ n'ont pas de zéros (non trivial) en commun (V est alors dit en position générale), on obtient que

(i) la suite ci-dessus est exacte,

(ii) W est de dimension finie, $\dim W = d^n$.

On montre même qu'il existe $V(\underset{\sim}{b})$ tel que $L(\underset{\sim}{b}) = V(\underset{\sim}{b}) \oplus \sum D_i\, L(\underset{\sim}{b})$.

6. Nous munissons l'espace $L(b)^{\binom{n+1}{i}}$ de l'opérateur $\alpha_i = q^{n+1-i}\,\alpha$ agissant sur chaque composante. La formule fondamentale donnée dans le § 5 permet de voir que ces opérateurs commutent à d . Cette même formule montre que $D_i\, L(b)$ est stable par α , c'est-à-dire que W peut être muni d'un opérateur $\bar{\alpha}$ obtenu par passage au quotient à partir de α . Les α_i étant complètement continus et commutant aux d , la suite exacte du § 5 donne

$$\prod_{i=0}^{n+1} \det(1 - t\alpha_i)^{(-)^i}.\det(1 - t\bar{\alpha})^{(-)^{n+2}} = 1 .$$

Comme

$$\det(1 - t\alpha_i) = \det(1 - tq^{n+1-i}\,\alpha)^{\binom{n+1}{i}} = \Delta(q^{n+1-i}\,t)^{\binom{n+1}{i}} ,$$

La formule obtenue au § 4 s'écrit

$$Z_V^*(qt) = \prod_{i=0}^{n}(1 - q^{n-i}\,t)^{(-)^{i+1}\binom{n}{i}}.\det(1 - t\bar{\alpha})^{(-)^n} .$$

7. Il reste à passer de Z_V^* à Z_V . Soit A un sous-ensemble de $S = \{1 , \ldots , n + 1\}$. Posons $V^A = V \cap (X_i = 0$ pour $i \notin A$, $X_i \neq 0$ pour $i \in A)$, et soit Z^A la fonction Z de V^A (en particulier $Z^S = Z_V^*$). Comme $V = \bigcup V^A$, il vient $Z_V = \prod Z^A$. Pour chaque V^A , on peut appliquer la formule obtenue au § 6, avec $1 + n = |A|$ = nombre d'éléments de A .

L'espace W_A associé à V^A par cette technique n'est autre que l'image dans W des éléments de $L(b)$ qui ne comprennent pas de termes contenant un X_i avec $i \notin A$. On construit alors une suite exacte :

$$0 \longrightarrow W^S \longrightarrow W = W_S \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} \prod_{|A|=n+1-i} W_A \xrightarrow{\partial} \ldots \xrightarrow{\partial} W_\emptyset = \Omega \longrightarrow 0 ,$$

où ∂ est l'opérateur "différentiation extérieure" associé à

$$\partial(f) = \sum_i f(X)_{X_i=0}\, dX_i ,$$

et où, par conséquent, W^S est l'image dans W des éléments de $L(b)$ tels que $\partial(f) = 0$, c'est-à-dire qui sont divisibles par $X_1 \ldots X_{n+1}$. En notant $\bar{\alpha}^S$ la restriction de $\bar{\alpha}$ à W^S , et $\bar{\alpha}_A$ la restriction de $\bar{\alpha}$ à W^A (c'est $\bar{\alpha}_A$ qui intervient dans Z^A), en remarquant que $\bar{\alpha}_A$ et ∂ commutent, on obtient

$$\det(1 - t\bar{\alpha}^S) \prod_A \det(1 - t\bar{\alpha}_A)^{(-)^{n-|A|}} = 1 ,$$

ce qui nous donne (il y a $\binom{n+1}{r}$ ensembles A tels que $|A| = r$)

$$Z_V(qt) = \det(1 - t\bar{\alpha}^S)^{(-)^n} \prod_{r=0}^{n+1} \prod_{i=0}^{r-1}(1 - q^{n-i}\,t)^{(-)^{i+1}\binom{r-1}{i}\binom{n+1}{r}} ,$$

et on obtient :

$$Z_V(t) = (P(t)^{(-)^n})/(\prod_{i=0}^{n-1}(1 - q^i\,t)) \quad \text{avec} \quad P(qt) = \det(1 - t\bar{\alpha}^S) ,$$

en particulier on vérifie que P est un polynôme de degré $\dim W^S$, c'est-à-dire, en utilisant la suite exacte ci-dessus et $\dim W_A = d^{|A|-1}$,

$$d^{-1}\{(d-1)^{n+1} + (-)^{n+1}(d-1)\} .$$

En particulier, pour les courbes, on trouve $(n=2)$ $(d-1)(d-2)$ c'est-à-dire deux fois le genre.

L'existence de suites exactes de "dérivations extérieures" suggère une interprétation cohomologique de ce qui précède. Celle-ci a été faite par KATZ [4].

8. Nous introduisons maintenant les duaux des espaces W . Soit

$$L\_(b) = \{\Sigma_{u\in I} A_u X^{-u} , \ \inf(v(A_u) + bu_0) > -\infty\} .$$

Si $b > b'$, $L\_(b')$ et $L(b)$ sont mis en dualité par $\langle f^* , f\rangle$ = terme constant du produit $f^* f$. Nous obtenons alors les opérateurs adjoints :

$$\alpha^* = \gamma\_ H_1 \circ \Phi \quad \text{avec} \quad \Phi(X^u) = X^{qu} , \quad \gamma\_(X^u) = \begin{cases} 0 & \text{si un des } u_i \text{ est } > 0 \\ X^u & \text{sinon} \end{cases} ,$$

$$D_i^* = - X_i \frac{\partial}{\partial X_i} + \gamma\_ \pi X_0 F_i .$$

Soit alors K l'espace des solutions de $D_i^* f^* = 0$, $i = 1 , \ldots , n+1$. Si $f \in K$, f est dans le dual de W . Comme on montre que $\dim K = d^n$, on voit que K est le dual de W .

On a la relation : $\alpha^* \circ D_i^* = qD_i^* \circ \alpha^*$. En particulier, α^* opère sur K . En utilisant ce fait, on peut démontrer que, si $f = \Sigma A_u X^{-u}$ appartient à K , alors $\inf(v(A_u) + n \log(u_0)/\log p) > -\infty$. Ceci montre que $K \subset \bigcap_{b>0} L\_(b)$, et donc est indépendant du choix de b . On vérifie que K est en outre indépendant (à isomorphisme près) du choix du relèvement F de $\bar{F}$ choisi (dont les coefficients ne sont donc plus forcément des représentants multiplicatifs !). C'est cette indépendance (entre autre) qui fait l'intérêt du passage au dual.

Soit K^S l'annihilateur de W^S , alors K/K^S est le dual de W^S . α^* donne, par passage au quotient, un opérateur α_S^* sur K/K^S pour lequel on a

$$P(qt) = \det(1 - t\alpha_S^*) .$$

9. Nous supposons maintenant que $F = F(X , \Gamma)$ dépend d'un paramètre Γ . $F(X , \Gamma)$ est un polynôme en X_i et Γ , homogène de degré d en X , à coefficients dans $\mathcal{O}$, anneau des entiers de Ω . Nous garderons les notations des paragraphes précédents en ajoutant un indice Γ lorsque nécessaire. En éliminant les X_i entre les $F_{i,\Gamma}$, on obtient un polynôme $R(\Gamma)$. Pour que V_Γ soit en position générale (voir § 5), il faut et il suffit que $|R(\Gamma)| = 1$, $\Gamma \lesssim 1$. C'est dans cette région que nous nous placerons.

z sera une valeur fixée de Γ , $(|R(z)| = 1)$. Soit $\mathfrak{L}$ l'ensemble des polynômes contenus dans les $L(b)$, et soit

$$A = \{u \in I \ , \ 0 \leqslant u_i < d\} \ , \text{ et } \ A' = \{u \in I \ , \ 0 < u_i < d\} \ .$$

On montre qu'il existe des f_u , $u \in A$, tels que

$$\mathfrak{L} = \sum_{u \in A} \Omega f_u + \sum D_{i,z} \mathfrak{L} \ , \text{ si } \ u \in A' \quad X_1 \ldots X_{n+1} | f_u \ .$$

Le fait intéres sant est alors que les f_u vérifient, pour presque tout Γ ,

$$\mathfrak{L}_\Gamma = \sum_{u \in A} f_u \ \Omega(\Gamma) + \sum D_{i,\Gamma} \mathfrak{L}_\Gamma$$

(on n'a à vérifier le résultat que pour les termes de degré, en u_0 , inférieur à n . Les conditions à exprimer s'écrivent alors par l'inversibilité de matrices, et Γ ne doit pas être 0 des determinants qui apparaissent).

On vérifie que K_Γ est le dual de $\mathfrak{L}_\Gamma/(\sum D_{i,\Gamma} \mathfrak{L}_\Gamma)$. On peut donc munir K_Γ de la base $f^*_{u,\Gamma}$ duale de la base f_u . Le résultat fondamental est qu'il existe un polynôme g non nul et des polynômes $G_{u,v}$ de $\mathcal{O}(\Gamma)$ tels que

$$g(\Gamma) \ f^*_{u,\Gamma} = \left(\sum_{v \in I} G_{u,v}(\Gamma) \ \pi^{-v_0} \ X^{-v}\right)/(R(\Gamma)^{v_0}) \ ,$$

et les "mauvais" Γ , pour lesquels f_u n'est pas une base, sont les zéros de $g(\Gamma) \ R(\Gamma)$ (si $f^*_{u,\Gamma} = \sum g_m X_0^m$, on trouve facilement que,

$$\forall \ m \ , \ i \ , \quad X_i \frac{\partial g_m}{\partial X_i} + \gamma_- F_i \ g_{m+1} = 0 \ ,$$

on applique alors une méthode de récurrence).

Les f_u , $u \in A'$, forment une base de W^S_Γ . On en déduit que les $f^*_{u,\Gamma}$, $u \in A'$, forment une base de $K_\Gamma/K^S_\Gamma = (W^S_\Gamma)^*$.

10. Equation différentielle. - Si $|z| \leqslant 1$, $|R(z)| = 1$ et si $|z - \Gamma| < 1$, l'opérateur

$$T_{z,\Gamma} = \gamma_- \exp(- \pi X_0 \ F(X \ , \ z) + \pi X_0 \ F(X \ , \ \Gamma))$$

envoie K_z dans K_Γ . Comme l'image de K^S_z est K^S_Γ , on vérifie que $T_{z,\Gamma}$ est une bijection de K_z/K^S_z sur K_Γ/K^S_Γ . Notons $C(z \ , \ \Gamma)$ la matrice associée pour les bases $f^*_{u,z}$ et $f^*_{u,\Gamma}$ $(u \in A')$. On trouve

$$C(z \ , \ \Gamma)_{u,v} = \langle T_{z,\Gamma} \ f^*_{u,z} \ , \ f_v \rangle \ ,$$

ce qui donne par dérivation, puisque $(\partial/\partial\Gamma) T_{z,\Gamma} \ f(X) = \pi X_0 (\partial F/\partial\Gamma) T_{z,\Gamma} \ f$,

$$\frac{\partial C_{u,v}}{\partial \Gamma} = \langle T_{z,\Gamma} \ f^*_{u,z} \ , \ \pi X_0 \frac{\partial F}{\partial \Gamma} f_v \rangle \ .$$

Si on pose $B_{w,v}(\Gamma) = \langle f^*_{w,\Gamma} \ , \ \pi X(\partial F/\partial\Gamma) f_v \rangle$, les $B_{w,v}$ sont des polynômes en Γ indépendants de z , et on trouve que $C(z \ , \ \Gamma)$ est <u>la</u> solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial C}{\partial \Gamma} = BC \tag{1}$$

qui vérifie la condition $C(z \ , \ z) = I$.

Si on interprète W^S en terme de cohomologie, l'équation différentielle que nous venons de trouver devient la connexion de Gauss-Manin (ou équation différentielle de Picard-Fuchs dans le cas des courbes). On sait montrer que cette équation différentielle n'a que des points singuliers réguliers.

11. On vérifie aussi que l'opérateur

$$\alpha_\Gamma^* = \gamma_- \exp(-\pi X_0 F(X, \Gamma) + \pi X_0^q F(X^q, \Gamma^q)) \circ \Phi$$

est une bijection de $K_{\Gamma^q}/K^S_{\Gamma^q}$ sur K_Γ/K^S_Γ. Nous notons $A(\Gamma)$ la matrice associée pour les bases $f_{u,\cdot}$.

Posons

$$\exp(-\pi X_0 F(X, \Gamma) + \pi X_0^q F(X^q, \Gamma^q)) = \sum A_u X^u .$$

Le développement trouvé au § 9 pour $f_{u,\Gamma}$ permet de calculer

$$(2) \qquad \langle \alpha_\Gamma^* f_{u,q}, X^v \rangle = \sum_w A_{wq-v} G_{u,w}(\Gamma^q) \pi^{-w_0}/g(\Gamma^q) R(\Gamma^q)^{w_0} .$$

$\{G_{u,w}/R^{w_0}\}$ est une suite de fractions rationnelles de normes inférieures à 1 sur l'ensemble $|\Gamma| \leqslant 1$, $|R(\Gamma)| = 1$. Par ailleurs, $\sum A_u X^u$ appartenant à $L((p-1)/pq)$ (cf. § 3), on a

$$v(A_{wq-v} \pi^{-w_0}) \geqslant \frac{p-1}{p} w_0 - \frac{1}{p-1} w_0 + \mathrm{Cte} ,$$

Comme $((p-1)/p) > (1/(p-1))$ (pour $p \neq 2$), la série (2) converge uniformément sur le domaine $|\Gamma| \leqslant 1$, $|R(\Gamma)| = 1$, $g(\Gamma) > \varepsilon$, et est donc un élément analytique sur ce domaine. f_v est une combinaison linéaire finie de X^v, les $A_{u,v}(\Gamma)$ sont donc des combinaisons linéaires d'expréssions du type (2) et sont donc des éléments analytiques sur ce même domaine (les zéros de g dépendent en fait du z choisi au début, et, quitte à en changer, c'est-à-dire à changer de base de K, on peut les placer en dehors d'un disque $|\Gamma - a| < 1$ fixé à l'avance).

12. Supposons, pour simplifier, que $|R(0)| = 1$. Un calcul évident montre que $T_{0,\Gamma} \circ \alpha_0^* = \alpha_\Gamma^* \circ T_{0,\Gamma^q}$, c'est-à-dire

$$(3) \qquad C(0, \Gamma) A(0) C(0, \Gamma^q)^{-1} = A(\Gamma) .$$

La matrice du premier membre n'est apparement définie que pour $|\Gamma| < 1$, le deuxième membre en est donc un prolongement analytique.

Si $\bar{\Gamma}$ appartient à $\underset{\sim}{F}_{q^s}$, nous choisissons le relèvement Γ tel que $\Gamma^{q^s} = \Gamma$. La variété $V(\bar{\Gamma})$ est définie sur $\underset{\sim}{F}_{q^s}$, et nous avons vu (§ 7, § 8) que la fonction $Z_{V(\bar{\Gamma})}$ est donnée par le polynôme P tel que

$$P(q^s t) = \det(1 - t\alpha_S^*) .$$

Une comparaison de α_S^* avec le α_Γ^* défini au § 11 donne, dans ce cas,

$$\alpha_S^* = \prod_{i=0}^{s-1} \alpha^*_{\Gamma^{q^i}} ,$$

d'où

$$(4) \qquad P(q^s t) = \det(1 - t\, A(\Gamma)\, A(\Gamma^q) \ldots A(\Gamma^{q^{s-1}})) \,.$$

Partant de l'équation différentielle (1), on peut donc trouver $C(0\,,\Gamma)$, ce qui, par (3), donne $A(\Gamma)$ donc la fonction $Z_{V(\bar{\Gamma})}$, par (4).

L'étude des équations différentielles ayant une structure analogue à (3) constitue l'étude des structures de Frobénius des équations différentielles. Avec un langage de géométrie algébrique, ceci a conduit à la notion de cristal (voir [9] par exemple).

Les zéros de P sont directement donnés par les valeurs propres de

$$A(\Gamma) \ldots A(\Gamma^{q^{s-1}}) = C(0\,,\Gamma)\, A(0)^s\, C(0\,,\Gamma^{q^s})^{-1} \,.$$

Leur valeur absolue est alors liée à la croissance des solutions de l'équation différentielle (1). Les théorèmes de décomposition, selon cette croissance, des équations différentielles conduisent à donner une décomposition de P sous forme d'un produit de polynômes dont chacun a la forme (4), et dont les zéros ont même valeur absolue p-adique.

Signalons pour terminer que les inverses des zéros de P ont une valeur absolue complexe égale à $q^{(n-1)/2}$ (ex-conjectures de Weil démontrées par DELIGNE).

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math, t. 82, 1960, p. 631-648.

[2] DWORK (B.). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

[3] DWORK (B.). - On the zeta function of a hypersurface, II, Annals of Math. Series 2, t. 80, 1964, p. 227-299.

[4] KATZ (N.). - On the differential equation satisfied by period matrices. - Paris, Presses Universitaires de France, 1968 (Institut des hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 35, p. 223-258).

[5] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

Pour approfondir la situation du dernier paragraphe, on pourra lire :

[6] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris, Presses Universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 37, p. 27-116).
[Cas des courbes elliptiques].

[7] DWORK (B.). - Normalized period matrices, I : Plane curves, Annals of Math., Series 2, t. 94, 1971, p. 337-388.
[Généralisation aux courbes planes].

[8] DWORK (B.). - Normalized period matrices II, Annals of Math., Series 2, t. 98, 1973, p. 1-57.
[Cas des hypersurfaces].

[9] KATZ (N.). - Travaux de Dwork, "Séminaire Bourbaki", 24e année, 1971/72, n° 409, 34 p. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 317).

Pour une application de techniques identiques à l'étude d'équations différentielles à points singuliers non réguliers (cf. § 10).

[10] DWORK (B.). - Bessel functions as p-adic functions of the argument, Duke math. J., t. 41, 1974, p. 711-738.

[11] SPERBER (S.). - p-adic hypergeometric functions and their cohomology, Duke math. J., t. 44, 1977, p. 535-589.

(Texte reçu le 30 mai 1978)

Gilles CHRISTOL
5 allées des Gradins
91350 GRIGNY