Groupe de travail
d'analyse ultramétrique

Alain Escassut

Type de transcendance p-adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 8, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A4_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'etude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
5e année, 1977/78, n° 8, 10 p.

19 décembre 1977

TYPE DE TRANSCENDANCE p-ADIQUE

par Alain ESCASSUT

Serge LANG a introduit le type de transcendance pour une extension transcendante de type fini de $\underset{\sim}{Q}$ incluse dans $\underset{\sim}{C}$ [2], et on sait que ce type de transcendance ne peut être inférieur à 2 . Nous étudierons ici la notion de type de transcendance, pour une extension transcendante E de type fini de $\underset{\sim}{Q}$ incluse dans $\underset{\sim}{C}_p$, et nous verrons que, si E est incluse dans la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}_p$, alors elle ne peut admettre de type de transcendance inférieur à 2 . Mais, par contre, il existe des extensions transcendantes $\underset{\sim}{Q}(x)$ de $\underset{\sim}{Q}$, où x est transcendant sur $\underset{\sim}{Q}_p$, qui ont un type de transcendance $\leq 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Pour plus de précisions, les résultats seront présentés, en dissociant ce qui a trait à la hauteur et au degré des polynômes considérés, en définissant des ensembles $\mathbb{S}(\alpha , \beta)$ dont nous étudierons les propriétés.

En introduisant des outils analogues à la "taille" définie sur une extension transcendante de type fini, nous étudierons certaines propriétés d'indépendance algébrique dont une généralisation du théorème de Gel'fond-Schneider.

1. Les ensembles $\mathbb{S}(\alpha , \beta)$.

On note $|.|$ la valeur absolue de $\underset{\sim}{C}_p$, et $|.|_\infty$ la valeur absolue archimédienne de $\underset{\sim}{C}$. La fonction logarithme de base p de $\underset{\sim}{R}^+$ dans $\underset{\sim}{R}$ est noté log .

Pour tout polynôme

$$P(X_1 , \dots , X_n) = \sum a_{i_1,\dots i_n} \in \underset{\sim}{Z}[X_1 , \dots , X_n] ,$$

H(P) désigne $\max_{i_1,\dots,i_n} |a_{i_1,\dots,i_n}|_\infty$, et t(P) désigne

$$\max(\log H(P) , \deg(P) + 1) .$$

Soient α et $\beta \in \underset{\sim}{R}^+$; soit $\mathbb{S}_\infty(\alpha , \beta)$ l'ensemble des $x \in \underset{\sim}{C}$ tels qu'il existe une constante $C \in \underset{\sim}{R}^+$ satisfaisant $P(x) = 0$ ou bien

$$- \log |P(x)|_\infty \leq C((\log H(P))^\alpha + \deg P^\beta) , \text{ pour tout } P \in \underset{\sim}{Z}[X] .$$

Il est facile de voir que $\mathbb{S}_\infty(1 , 1)$ est égal à la clôture algébrique de $\underset{\sim}{Q}$ dans $\underset{\sim}{C}$ (et, bien sûr, si α ou $\beta < 1$, $\mathbb{S}_\infty(\alpha , \beta) = \emptyset$) [4].

De plus, si x est transcendant, et si $x \in \mathbb{S}_\infty(\alpha , \beta)$, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, il est immédiat de voir que $\alpha + \beta \leq \alpha\beta$.

Maintenant, on peut considérer des expressions similaires dans $\underset{\sim}{C}_p$. Soit $\mathbb{S}(\alpha, \beta)$ l'ensemble des $x \in \underset{\sim}{C}_p$ pour lesquels existe une constante $C \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que, pour

tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$, on ait ou bien $P(x) = 0$, ou bien

$$- \log |P(x)| \leqslant C[(\log H(P))^{\alpha} + (\deg P)^{\beta}] .$$

(Alors il est clair que, si $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ et $\beta_1 \leqslant \beta_2$, on a $\mathbb{S}(\alpha_1 , \beta_1) \subset \mathbb{S}(\alpha_2 , \beta_2)$.)

Avant d'étudier les premières propriétés des ensembles $\mathbb{S}(\alpha , \beta)$, il est nécessaire de rappeler quelques définitions et notations. Si x est un nombre algébrique, on appelle <u>dénominateur</u>, $d(x)$, de x le plus petit des entiers t tels que tx soit un entier algébrique. Soit Θ l'ensemble des homomorphismes de corps de $\mathbb{Q}(x)$ dans $\mathbb{C}$. Alors, $|\bar{x}|$ désigne $\max_{\sigma \in \Theta} |\sigma(x)|$, et $s(x)$ désigne $\max(\log |\bar{x}| , d(x))$.

Alors, dans $\mathbb{C}_p$, on a maintenant la proposition 1.1.

PROPOSITION 1.1.

(i) <u>La clôture algébrique de</u> $\mathbb{Q}$ <u>dans</u> $\mathbb{C}$ <u>est incluse dans</u> $\mathbb{S}(1 , 1)$.

(ii) <u>Si</u> α <u>ou</u> $\beta < 1$, <u>alors</u> $\mathbb{S}(\alpha , \beta) = \emptyset$.

<u>Preuve</u>. - Soit x algébrique, soient $x_2 , \ldots , x_\ell$ ses conjugués sur $\mathbb{Q}$, et soit d son dénominateur. Pour tout polynôme P de degré k de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$, on vérifie que

$$|d^k P(x)| \geqslant \frac{1}{|d^{\ell k} P(x) \prod_{i=2}^{\ell} P(x_i)|_\infty}$$

tandis que, par ailleurs, $|\overline{P(x)}| \leqslant H(P) \, |\bar{x}|^k \, (k + 1)$. D'où

$$\log |P(x)| \geqslant t(P)[(\ell + 1) \, s(x) + 1] .$$

La preuve de (ii) est immédiate. Soit $x \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$. En considérant des suites $n \longrightarrow p^n Q$ $(Q \in \mathbb{Z}[X])$, on voit que $\alpha \geqslant 1$, et, en considérant des suites $n \longrightarrow Q^n$, on a $\beta \geqslant 1$.

PROPOSITION 1.2. - <u>Soit</u> $a \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$, <u>et soit</u> b <u>algébrique. Alors</u> $ab \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$.

<u>Preuve</u>. - D'après 1.1 (i), on peut supposer a transcendant, et la preuve est immédiate en considérant les conjugués de b .

PROPOSITION 1.3. - <u>Soient</u> α <u>et</u> $\beta \in \mathbb{R}^+$ <u>tels que</u> $\alpha + \beta > \alpha\beta$. <u>Alors, tout nombre transcendant qui appartient à</u> $\mathbb{S}(\alpha , \beta)$ <u>est transcendant sur</u> $\mathbb{Q}_p$.

<u>Preuve</u>. - Soit $x \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$ algébrique sur $\mathbb{Q}_p$, et soit $K = \mathbb{Q}(x)$. Comme le corps résiduel et le groupe de valuations de K sont finis, il existe $A > 0$ tel que le nombre des disques de diamètre $1/p^n$, inclus dans U , est majoré par $A \, p^n$ Alors on peut appliquer le principe des tiroirs de Dirichlet, et il est immédiat de voir que, pour tout couple $(m , q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il existe au moins un polynôme $P_{m,q} \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\deg(P_{m,q}) \leqslant q$, et

$$\log H(P_{m,q}) \leqslant m \quad \text{et} \quad \log |P_{m,q}(x)| \leqslant - mq .$$

Alors, comme $x \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$, on a donc

$$(\log H(P_{m,q}))^{\alpha} + (\deg P_{m,q})^{\beta} \geqslant mq \geqslant \log H(P_{m,q}) \deg P_{m,q} .$$

On en déduit que, si $(\deg P_{m,q})^{\beta} \leqslant (\log H(P_{m,q}))^{\alpha}$, on a

$$2(\log H(P_{m,q}))^{\alpha} \geqslant mq \geqslant (\log H(P_{m,q}))^{1+(\alpha/\beta)} ,$$

et de même, si $(\log H(P_{m,q}))^{\alpha} \leqslant (\deg P_{m,q})^{\beta}$, on a

$$2(\deg P_{m,q})^{\beta} \geqslant mq \geqslant (\deg P_{m,q})^{1+(\beta/\alpha)} .$$

Et comme le couple (m , q) parcourt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, il est clair que l'on a $\alpha\beta \geqslant \alpha + \beta$.

Notations.

1° Si $|x| < p^{-(1/(p-1))}$, on notera $\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$, et si $|x - 1| < 1$, on notera $\mathrm{Lg}(1 - x) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n$. Enfin si $|a - 1| < 1$, et si $|b \, \mathrm{Lg}\, a| < p^{-(1/(p-1))}$, on notera $a^b = \exp(b \, \mathrm{Lg}\, a)$.

2° Pour tout $r > 0$, on notera $\mathcal{A}(r)$ l'algèbre des fonctions analytiques $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ convergeant pour $|x| = r$ [1].

PROPOSITION 1.4. - Soit K une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}_p$, soit $r > 0$, et soit $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n \in \mathcal{A}(r)$ telle que $a_n \in K$, pour tout n . Alors, pour tout $x \in K$ tel que $|x| = r$, $f(x) \in K$.

COROLLAIRE 1.5. - Soit $a \in \mathbb{C}_p$, transcendant sur $\mathbb{Q}_p$.

(i) Si $|a - 1| < 1$, $\mathrm{Lg}(a)$ est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$.

(ii) Si $|a| < p^{-(1/(p-1))}$, $\exp a$ est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$.

(iii) Pour tout b tel que $\max(|b| , |ab|) < p^{-(1/(p-1))}$, l'un au moins des nombres $\exp b$, $\exp ab$ est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$.

Preuve.

(i) Pour n assez grand, $|a^{(p^n)} - 1| < p^{-(1/(p-1))}$ donc $|\mathrm{Lg}(a^{p^n})| < p^{-(1/(p-1))}$ d'où a est algébrique sur K .

(ii) De même, si $\exp a$ est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$, $a = \mathrm{Lg}(\exp a)$ est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$.

(iii) On considère $K = \mathbb{Q}_p[\exp b , \exp ab]$. Alors, si K est une extension algébrique de $\mathbb{Q}_p$, b et $ab \in K$, donc $a = b/ab \in K$, et a est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$

COROLLAIRE 1.6. - Soit a algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ tel que $|a - 1| < 1$, et soit b transcendant sur $\mathbb{Q}_p$ tel que $|b \, \mathrm{Lg}\, a| < p^{-(1/(p-1))}$. Alors a^b est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$.

Preuve. - C'est une conséquence du corollaire 1.5 (iii).

D'autre part, le corollaire 1.5 admet une conséquence immédiate exprimée à l'aide des ensembles $\mathbb{S}(\alpha , \beta)$.

COROLLAIRE 1.7. - Soient α et $\beta \in \mathbb{R}^+$ tels que $\alpha\beta < \alpha + \beta$, et soit $a \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$.

(i) Si $|a - 1| < 1$, $\mathcal{L}g(a)$ est transcendnat sur $\mathbb{Q}$.

(ii) Si $|a| < p^{-(1/(p-1))}$, exp a est transcendant sur $\mathbb{Q}$.

Preuve. - Puisque $\alpha\beta < \alpha + \beta$, on voit que a est transcendant sur $\mathbb{Q}_p$, ou bien algébrique sur $\mathbb{Q}$. Dans le premier cas, le résultat provient du corollaire 1.6. Si a est algébrique sur $\mathbb{Q}$, alors (i) et (ii) proviennent du théorème de Hermite-Lindenmann p-adique dû à MAHLER [3].

Maintenant, nous allons voir que, contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{C}$, les ensembles $\mathbb{S}(1 , 1+\varepsilon)$ contiennent des nombres transcendants (sur $\mathbb{Q}_p$), quel que soit $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 1.8. - Pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{S}(1 , 1 + \varepsilon) \setminus \tilde{\mathbb{Q}}$ n'est pas vide.

Preuve. - Plus précisément, on va construire de la façon suivante des nombres transcendants dans $\mathbb{S}(1 , 1 + \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$, soit $r_n = u_n/v_n$ une suite de $\mathbb{Q}$, et soit a_n une suite de $\mathbb{C}_p$ telles que :

(i) $r_n \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$.

(ii) $r_n < n^{\varepsilon}$.

(iii) a_n est une racine v_n-ième de p^{u_n} .

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $m = 1 , \ldots , n$, mr_n n'appartient pas au groupe de valuation du corps $\chi_{n-1} = \mathbb{Q}(a_1 , \ldots , a_{n-1})$.

Alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est un nombre transcendant qui appartient à $\mathbb{S}(1 , 1 + \varepsilon)$.

Pour tout nombre $\omega > 0$, on notera $\mathcal{R}(\omega)$ la relation d'équivalence définie sur $\mathbb{C}_p$ par $x \, \mathcal{R}(\omega) \, y$ si $\log |x - y| < \omega$.

Pour tout n , on notera $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pour établir que $a \in \mathbb{S}(1 , 1 + \varepsilon)$, il suffit de montrer que, pour tout $q \in \mathbb{N}$ et pour tout $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\|P\| = 1$ et $\deg P = q$, on a $\log |P(a)| \geqslant - q^{1+\varepsilon}$. En effet, pour tout $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, on peut mettre P sous la forme $p^{\pi} P_0$, où $P_0 \in \mathbb{Z}[X]$ et $\|P_0\| = 1$, d'où $\log |P(a)| \geqslant - \pi - q^{1+\varepsilon}$. Or il est clair que

$$\log |P(a)| \geqslant - (\log H(P) + (\deg P)^{1+\varepsilon}) .$$

Nous allons d'abord montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[a_1 , \ldots , a_{q-1}][X]$, de degré $\leqslant q - 1$ tel que $\|P\| = 1$, on a $P(a_q) \neq 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon})$. Considérons donc un polynôme $P(X) = \sum_{m=0}^{q} c_m X^m \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(a_q) \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon})$. Il est immédiat de voir que, pour tout entier $m < q$, on a

(1) $$|C_m| < \frac{1}{p^{(q-m)r_q}} .$$

En effet, puisque

$$C_0 + C_1 a_q + \ldots + C_q a_q^q \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon}) ,$$

on voit que $|C_0| \leqslant 1/p^{r_q}$, et par suite, on en déduit

$$(\frac{C_0}{a_q} + C_1) + C_2 a_q + \ldots + C_q a_q^{q-1} \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon} - r_q) .$$

Alors de même, on voit que $|(C_0/a_q) + C_1| \leqslant (1/p^{r_q})$. Mais, comme r_q n'appartient pas au groupe de valuation de χ_{q-1} , on voit que

$$\max(|\frac{C_0}{a_q}| , |C_1|) < \frac{1}{p^{r_q}} ,$$

et ainsi de suite. On montre la relation (1) par récurrence, ce qui prouve ensuite $|C_q| = 1$, puisque $\|P\| = 1$. Alors on en déduit que

$$(\frac{C_0}{a_q^q}) + \ldots + (\frac{C_{q-1}}{a_q}) + C_q \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon} - qr_q) ,$$

et comme $q^{1+\varepsilon} > qr_q$, on a donc $|\Sigma(C_m/(a_q)^m)| < 1$, et par suite, d'après (1), on a $|C_q| < 1$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc établi qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{Q}[a_1 , \ldots , a_{q-1}]$ de degré $\leqslant q$ tel que $\|P\| = 1$, et $P(a_q) \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon})$.

Pour démontrer la proposition, il suffirait naturellement de montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\|P\| = 1$, et $\deg P \leqslant q$, on a $\log|P(b_q)| \geqslant q^{1+\varepsilon}$. En effet, il est clair que $a \equiv b_q \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon})$.

Considérons donc un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $\|P\| = 1$, et $\deg P \leqslant q$, et tel que $P(b_q) \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon})$. On a évidemment

$$P(b_q) = P(b_{q-1}) + a_q \frac{P^1(b_{q-1})}{1!} + \ldots + a_q^q \frac{P^{(q)}(b_{q-1})}{q!} \equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon}) .$$

Comme

$$|a_q| = \frac{1}{p^{r_q}} > \frac{1}{p^{(q^\varepsilon)}} ,$$

on voit que

$$\log |a_q^s| = - sr_q > -(sq)^\varepsilon > - q^{1+\varepsilon} ,$$

et par suite

$$(a_q)^s \not\equiv 0 \mod \mathcal{R}(q^{1+\varepsilon}) , \text{ quel que soit } s \leqslant q .$$

Maintenant, d'après ce qui précède, il n'existe aucun polynôme

$$Q \in \mathbb{Q}[a_1 , \ldots , a_{q-1}][X]$$

tel que

$$\|Q\| = 1 \ , \quad \deg Q \leqslant q \ , \quad Q(a_q) \equiv o \mod R(q^{1+\varepsilon}) \ ,$$

et on voit donc que $|(P^{(n)}(b_{q-1}))/n!| < 1$, $\forall\, n \leqslant q$. Or, puisque $\|P\| = 1$, il est clair que l'un au moins des $(P^{(n)}(b_{q-1}))/n!$ est égal à 1 . On voit donc que le polynôme P n'existe pas, et la proposition est donc démontrée.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $S(1 \ , \ 1 + \varepsilon)$ contient des nombres transcendants, et d'après la proposition 1.3, nécessairement, ils sont dans $\mathbb{C}_p \setminus \tilde{\mathbb{Q}}_p$. Mais par contre, on ne peut préciser si $S(1 \ , \ 1)$ contient lui aussi des nombres transcendants, ou si, à l'instar de $S_\infty(1 \ , \ 1)$, il est réduit à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. En fait, il est très vraisemblable que $S(1 \ , \ 1)$ contienne des nombres transcendants.

2. Fonctions η et δ , et type de transcendance p-adique.

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ admettant une base de transcendance finie $(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_n)$ sur $\mathbb{Q}$. Alors, il existe $y \in K$ entier sur $\mathbb{Z}(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q)$ tel que $K = \mathbb{Q}(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q \ , \ y)$. On appelle <u>système privilégié de</u> K <u>sur</u> $\mathbb{Q}$ un tel système.

Soit $v = [K : \mathbb{Q}(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q)]$. Tout $x \in K$ peut s'écrire sous la forme

$$x = \sum_{i=0}^{v-1} \frac{Q_i(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q)}{R_i(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q)} \, y^i \ ,$$

où Q_i et R_i sont deux polynômes premiers entre eux de $\mathbb{Z}[X_1 \ , \ \dots \ , \ X_q]$. On appelle <u>dénominateur</u> de x relativement au système privilégié $(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q \ , \ y)$ le ppcm Q des R_i $(0 \leqslant i \leqslant v - 1)$. Alors $x\, Q(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q)$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $\sum_{i=0}^{v-1} P_i(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q) y^i$ $(P_i \in \mathbb{Z}[X_1 \ , \ \dots \ , \ X_q])$.

Maintenant, sur K , on peut définir les fonctions η et δ relativement au système privilégié $(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q \ , \ y)$.

Soit

$$\eta(x) = \max(\log H(Q) \ , \ \log H(P_0) \ , \ \dots \ , \ \log H(P_{v-1}))$$

et soit

$$\delta(x) = 1 + \max(\deg Q \ , \ \deg P_0 \ , \ \dots \ , \ \deg P_{v-1}) \ .$$

<u>Remarque</u>. - Si L est un sous-corps de K , et si L est algébrique sur $\mathbb{Q}$, évidemment il existe des constantes A_1 et $A_2 \in \mathbb{R}^+$ telles que

$$A_1 \, s(x) \leqslant \eta(x) \leqslant A_2 \, s(x) \ , \text{ pour tout } x \in L \ .$$

Les principales propriétés des fonctions η et δ sont résumées par les lemmes 2.1, 2.2, 2.3, 2.4. Dans ces lemmes, K est un corps qui admet un système privilégié $(a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q \ , \ y)$, et η et δ sont les fonctions associées à ce système.

LEMME 2.1.

(i) <u>Pour tout</u> $x_1 \ , \ \dots \ , \ x_n \in \mathbb{Z}[a_1 \ , \ \dots \ , \ a_q \ , \ y]$, <u>on a</u>

$$\eta(x_1 + \ldots + x_n) \leq \max_{1\leq i\leq n} \eta(x_i) + \log n \quad \underline{\text{et}} \quad \delta(x_1 + \ldots + x_n) \leq \max_{1\leq i\leq n} \delta(x_i) .$$

(ii) Il existe une constante $C \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que, pour tout $x_1 , \ldots , x_n \in K$, on ait

$$\eta(x_1 + \ldots + x_n) \leq C(\textstyle\sum_{i=1}^n \eta(x_i) + \log \delta(x_i))$$

et

$$\delta(x_1 \times \ldots \times x_n) \leq C(\textstyle\sum_{i=1}^n \delta(x_i)) \quad ([4], \text{ preuve du lemme } 4.2.5)$$

LEMME 2.2. - Soit $(a'_1 , \ldots , a'_q , y')$ un autre système privilégié de K, et soit η' et δ' les fonctions associées à ce système. Alors, il existe A et $B \in \underset{\sim}{R}^+$ telles que

$$A\,\eta(x) \leq \eta'(x) \leq B\,\eta(x) \quad \underline{\text{et}} \quad A\,\delta(x) \leq \delta'(x) \leq B\,\delta(x) \quad \underline{\text{pour tout}} \quad x \in K .$$

([4], lemme 4.2.22).

Ainsi les fonctions η et δ ne dépendent pas (à une constante près) du système privilégié choisi.

LEMME 2.3. - Soit $a \in \mathcal{S}(\alpha , \beta)$, et soit K un sous-corps de $\underset{\sim}{C}_p$, algébrique sur $\underset{\sim}{Q}(a)$. Alors, il existe une constante $D \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que

$$- \log |x| \leq D(\eta(x)^\alpha + \delta(x)^\beta) ,$$

pour tout $x \in K$.

Preuve. - Une relation analogue est bien connue dans $\underset{\sim}{C}$. Ici, la traduction dans $\underset{\sim}{C}_p$ est obtenue à l'aide de la relation $|n| \geq (1/|n|_\infty)$, pour tout $n \in \underset{\sim}{Z}$ ([4], 4.2.23).

On connait le lemme de Siegel pour les extensions transcendantes de type fini [4]. Ici, on obtient les résultats suivants à l'aide des fonctions η et δ.

LEMME 2.4. - Soit $A = \underset{\sim}{Z}[a_1 , \ldots , a_q , y]$. Il existe une constante $S \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que, pour toute famille finie $(b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq r}$ de A telle que $2r \leq n$, il existe $(\xi_1 , \ldots , \xi_n) \in A^n$ et $(\xi_1 , \ldots , \xi_n) \neq (0 , \ldots , 0)$ satisfaisant $\sum_{i=1}^n b_{ij}\,\xi_i = 0$, pour tout $j = 1 , \ldots , r$,

$$\max_i \eta(\xi_i) \leq S(\max_{i,j} \eta(b_{ij}) + \log \max_{i,j} \delta(b_{ij}) + \log n) ,$$

et

$$\max_i \delta(\xi_i) \leq S \max_{i,j} \delta(b_{ij}) \quad ([4], \text{ preuve du lemme } 4.3.1).$$

Comme dans $\underset{\sim}{C}$, on peut définir dans $\underset{\sim}{C}_p$ le type de transcendance [2]. Soit K un corps tel que $\underset{\sim}{Q} \subset K \subset \underset{\sim}{C}_p$. Alors, on dira que K a un type de transcendance inférieur ou égal à α s'il a une base de transcendance finie sur $\underset{\sim}{Q}$ $(a_1 , \ldots , a_q)$ et s'il existe une constante $C \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que

$$- \log |P(a_1 , \ldots , a_q)| \leq C(t(P))^\alpha ,$$

pour tout polunôme $P(X_1 , \dots , X_q) \in \underset{\sim}{Z}[X_1 , \dots , X_q]$. De plus, on dira que K a un type de transcendance strictement inférieur à α s'il a un type de transcendance inférieur ou égal à un nombre $\beta < \alpha$.

Alors, d'après le lemme 2.2, il est facile de voir que l'existence de C (donc du type de transcendance) ne dépend pas de la base de transcendance choisie.

PROPOSITION 2.5. - Soit $K \subset \underset{\sim}{C}_p$ un corps qui a un type de transcendance inférieur ou égal à α .

(i) Pour toute base de transcendance $(b_1 , \dots , b_q)$ de K sur $\underset{\sim}{Q}$, il existe une constante $C \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que

$$- \log |P(b_1 , \dots , b_q)| \leq C(t(P))^{\alpha} ,$$

pour tout $P(X_1 , \dots , X_q) \in \underset{\sim}{Z}[X_1 , \dots , X_q]$.

(ii) Toute extension algébrique de K a aussi un type de transcendance inférieur ou égal à α .

Dans la même voie que la proposition 2.5, en nous limitant au cas où $q = 1$, mais en dissociant ce qui a trait aux fonctions η et δ , on obtient la proposition 2.6.

PROPOSITION 2.6. - Soient α et $\beta \in \underset{\sim}{R}^+$, soit $x \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$, et soit y algébrique sur $\underset{\sim}{Q}(x)$. Alors, $y \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$.

Il est clair que, si $\underset{\sim}{Q}(x)$ a un type de transcendance $\leq \alpha$, alors $x \in \mathbb{S}(\alpha , \alpha)$. Les propositions 2.5 ou 2.6 permettent d'établir la réciproque.

COROLLAIRE 2.7. - Un corps $\underset{\sim}{Q}(x)$ a un type de transcendance inférieur ou égal à α si, et seulement si, $x \in \mathbb{S}(\alpha , \alpha)$.

Alors, grâce aux propositions 1.3 et 2.5 et au théorème 1.6, on obtient le corollaire 2.8.

COROLLAIRE 2.8.

(i) Aucun sous-corps de $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$, transcendant sur $\underset{\sim}{Q}$, n'a un type de transcendance strictement inférieur à 2 .

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il y a des sous-corps de $\underset{\sim}{C}_p$ transcendants sur $\underset{\sim}{Q}_p$ qui ont un type de transcendance inférieur ou égal à $1 + \varepsilon$.

Remarque. - Dans $\underset{\sim}{C}$, une extension transcendante de degré q sur $\underset{\sim}{Q}$ ne peut avoir un type de transcendance strictement inférieur à $q + 1$. De même ici, en fait, le principe des tiroirs de Dirichlet montrerait qu'un sous-corps de $\tilde{\underset{\sim}{Q}}_p$ de degré de transcendance q sur $\underset{\sim}{Q}$ ne peut avoir un degré de transcendance strictement inférieur à $q + 1$.

3. Problèmes d'exponentielles p-adiques.

Nous avons vu au § 1 . Quelques propriétés immédiates de transcendance d'exponentielles p-adiques. Maintenant, nous pouvons utiliser les outils η et δ , définis au § 2, pour appliquer, dans le cas p-adique, les procédés classiques (de Gel'fond et Schneider, notamment). Ainsi, grâce à une méthode de Schneider (comme au théorème 7.2.9 de [4]), on démontre le théorème 3.1.

THÉORÈME 3.1. - *Soit* $\tau \in \underset{\sim}{R}^+$, *et soit* K *un sous-corps de* $\underset{\sim}{C}_p$ *de type de transcendance* $\leqslant \tau$. *Soient* $u_1 , \dots , u_m$ (*resp.* $v_1 , \dots , v_n$) *des nombres* $\underset{\sim}{Q}$*-linéairement indépendants de* $\underset{\sim}{C}_p$ *tels que* $\max_{i,j} |u_i v_j| < p^{-(1/(p-1))}$. *Alors, si* $\tau \leqslant (m(n+1))/(m+n)$, *l'un au moins des nombres* u_i *et* $\exp(u_i v_j)$ $(1 \leqslant i \leqslant m ; 1 \leqslant j \leqslant n)$ *est transcendant sur* K .

Ce théorème, appliqué dans le cas où $n = 1$, u_1 est algébrique, et où $n = 2$, permet avec l'aide du corollaire 1.5 (iii) de montrer le corollaire 3.2.

COROLLAIRE 3.2. - *Soient* α *et* $\beta \in \underset{\sim}{R}^+$ *tels que* $\alpha\beta < \alpha + \beta$, *et soit* $a \in \mathbb{S}(\alpha , \beta) \setminus \underset{\sim}{Q}$, *et soit* $b \in \underset{\sim}{C}_p$ *tel que* $\max(|b| , |ab|) < p^{-(1/(p-1))}$. *Alors l'un au moins des nombres* $\exp b$ *et* $\exp ab$ *est transcendant.*

Maintenant, en reprenant la démonstration du théorème 3.1 dans le cas où $m = 1$, $n = 2$, en supposant $u \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$, et en dissociant ce qui a trait aux fonctions η et δ , avec l'aide de la proposition 2.6, on obtient une généralisation du théorème de Gel'fond-Schneider.

THÉORÈME 3.3. - *Soient* α *et* $\beta \in \underset{\sim}{R}^+$ *tels que* $3\alpha\beta - 2\alpha - 2\beta < 0$ *et* $\alpha \leqslant \beta$, *soit* $u \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$ *tel que* $|u - 1| < 1$, *et soit* $v \in \underset{\sim}{C}_p \setminus \underset{\sim}{Q}$ *algébrique sur* $\underset{\sim}{Q}(u)$ *tel que* $|v \pounds g\, u| < p^{-(1/(p-1))}$. *Alors* u^v *est transcendant sur* $\underset{\sim}{Q}(u)$.

De même grâce à une méthode de Gel'fond (similairement à la démonstration du théorème 7.3.5 de [4]), on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3.4. - *Soient* $\alpha , \beta \in \underset{\sim}{R}^+$ *tels que* $3\alpha\beta - 3\beta - 2\alpha < 0$ *et* $\alpha \leqslant \beta$. *Soient* u *et* $v \in \underset{\sim}{C}_p$, $\underset{\sim}{Q}$*-linéairement indépendants et tels que* v *soit algébrique sur* $\underset{\sim}{Q}(u)$, $u \in \mathbb{S}(\alpha , \beta)$ *et* $\max(|u| , |v|) < p^{-(1/(p-1))}$.

Alors $\underset{\sim}{Q}(u , \exp u , \exp v)$ *est une extension transcendante de* $\underset{\sim}{Q}(u)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection Sup. "Le Mathématicien", 14).

[2] LANG (Serge). - Introduction to transcendental numbers. - Reading, Addison-Wesley publishing Company, 1966 (Addison-Wesley Series in Mathematics).

[3] MAHLER (Kurt). - Zur Approximation der Exponential-funktion und des Logarithmes, I, J. für die reine und angew. Math., t. 166, 1931, p. 118-150.

[4] WALDSCHMIDT (Michel). - Nombres transcendants. - Berlin, Springer-Verlag, 1974 (Lecture Notes in Mathematics, 402).

(Texte reçu le 29 juin 1978)

Alain ESCASSUT
Département de Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE