

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERNARD JACOB

Algèbre de Banach des éléments analytiques sur un corps valué non archimédien

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 10, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A9_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

24 janvier 1977

ALGÈBRE DE BANACH DES ÉLÉMENTS ANALYTIQUES
SUR UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN

par Bernard JACOB
(d'après Alain ESCASSUT [1])

Avertissement.

L'étude suivante conduit à énoncer des conditions nécessaires et suffisantes sur un domaine D d'un corps valué complet non archimédien et algébriquement clos pour que l'algèbre $H(D)$ des éléments analytiques sur D soit intègre d'une part, noethérienne ou principale d'autre part. L'introduction de la notion de filtre percé permettra de résoudre le problème.

La présente rédaction, excluant les démonstrations, se borne à exposer les résultats importants et les liens logiques entre eux.

La plupart des résultats sont issus de la thèse d'Alain ESCASSUT : Algèbre de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner (1970).

Introduction.

Nous appellerons D une partie d'un corps K , valué, complet et algébriquement clos. Rappelons que si $K(D)$ est l'algèbre des fractions rationnelles sur K , sans pôle dans D , plongée par l'homomorphisme canonique ϕ dans K^D , de manière injective pour D infini, on appelle élément analytique sur D , toute application f appartenant au complété $H(D)$ de $\phi(K(D))$, dans K^D , muni de la topologie de la convergence uniforme sur D .

$H(D)$ est alors une K -algèbre unitaire, ultramétrique et de Banach pour la norme,

$$\|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)|$$

si, et seulement si, D est fermé et borné.

Nous supposerons donc toujours D fermé, borné et infini.

1. Premières propriétés de $H(D)$.

(a) Les éléments inversibles de $H(D)$ se caractérisent par la propriété suivante:

$$f \text{ inversible} \iff \exists \delta > 0, \forall x \in D, |f(x)| \geq \delta \quad ([1] \text{ I, } \S 5).$$

(b) Lorsque D est un disque d , circonférencié ou non, l'algèbre $H(d)$ possède les propriétés suivantes :

(i) La norme de $H(d)$ est multiplicative,

(ii) Tout élément non identiquement nul a , au plus, un nombre fini de zéros dans D ,

(iii) Le module des valeurs d'une application f de $H(D)$, ne s'annulant pas sur D , est constant sur ce disque ([1], I, § 5).

(c) Les éléments de $H(D)$ possèdent la propriété de factorisation suivante : Si f est élément de $H(D)$ et a , au plus, un nombre fini de zéros, tous intérieurs à D , il existe un polynôme P de $K[X]$, et un élément g de $H(D)$ qui ne s'annule pas sur D , tels que

$$f = Pg.$$

Nous dirons qu'un élément f de $H(D)$ est quasi inversible s'il existe un polynôme P de $K[X]$, dont les zéros sont tous intérieurs à D , et un élément g de $H(D)$, inversible, tels que

$$f = Pg.$$

Nous pouvons alors énoncer les deux résultats suivants :

PROPOSITION 1. - Si tous les éléments de $H(D)$ sont quasi inversibles, $H(D)$ est intègre.

PROPOSITION 2. - D étant d'intérieur non vide, soit I un idéal de $H(D)$ contenant un élément quasi inversible. I est alors engendré par un polynôme dont les zéros sont intérieurs à D ([1], I, § 5).

(d) Nous dirons qu'un élément f de $H(D)$ est quasi minoré si toute suite $(a_m)_{m \geq 0}$ de D , telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(a_m) = 0$, admet une sous-suite de Cauchy.

On vérifie alors que

(i) Si f est un élément quasi inversible de $H(D)$, il est quasi minoré.

(ii) Si D est ouvert, ces deux propriétés sont équivalentes ([1], I, § 6)

(e) L'étude de l'intégrité de $H(D)$ conduit à celle des idempotents. A ce propos, rappelons que D est dit infraconnexe si, $\forall a \in D$, la fermeture dans $\mathbb{R}$ de l'ensemble $\{|x - a|; x \in D\}$ est un intervalle, et notons le résultat suivant.

PROPOSITION 3. - Si $H(D)$ n'a pas d'idempotents non triviaux, D est infraconnexe.

Une condition nécessaire d'intégrité est donc l'infraconnexité de D ([1], I, § 7).

2. Filtre percé sur un infraconnexe.

Nous supposons à partir de maintenant que le corps K est en outre maximale-ment complet. Cette hypothèse ne restreint en fait en rien la généralité des résultats établis, mais en simplifie l'exposition.

Dans ce paragraphe, nous supposons que D est un fermé borné infraconnexe.

(a) Un filtre $\mathfrak{F}$ sur D annule un élément f de $H(D)$ lorsque, $(D_i)_{i \in I}$ étant une base de ce filtre, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists i_\varepsilon \in I, \|f\|_{D_{i_\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Nous dirons que f est proprement annulé par $\mathfrak{F}$ si $\mathfrak{F}$ annule f , et en outre, pour tout i de I , $\|f\|_{D_i} > 0$.

$\mathfrak{F}$ est appelé filtre annulateur s'il existe au moins un élément f de $H(D)$, proprement annulé par $\mathfrak{F}$.

(b) Une suite de trous de D , $(T_m)_{m \geq 0}$, sera dite respectivement monotone, croissante, décroissante ou de Cauchy si la suite réelle définie par $d_m = d(T_m, T_{m+1})$ est strictement monotone, strictement croissante, strictement décroissante de limite non nulle, strictement décroissante et tendant vers 0.

A partir d'une suite décroissante (resp. de Cauchy) de trous $(T_m)_{m \geq 0}$ de D , si K est maximalement complet, on peut trouver un point a de K tel que

$$\forall m \geq 0, d(a, T_m) = d_m = d(T_m, T_{m+1}).$$

Si l'on pose $R = \lim_{m \rightarrow +\infty} d_m$, et si l'on considère les ensembles

$$D_m = \{x \in D; R < |x - a| < d_m\},$$

la famille $(D_m)_{m \geq 0}$ engendre un filtre de D , indépendant du choix de a , vérifiant la propriété ci-dessus, et appelé filtre percé décroissant de diamètre R (resp. de Cauchy), et de centre a .

On trouve de la même façon, étant donnée une suite croissante de trous de D , $(T_m)_{m \geq 0}$, telle que $R = \lim_{m \rightarrow +\infty} d_m$, un point a de K vérifiant

$$\forall m \geq 0, d(a, T_m) = d_m,$$

et les ensembles $D_m = \{x \in D; d_m \leq |x - a| < R\}$ engendrent encore un filtre de D , indépendant de a vérifiant la propriété précédente, appelé filtre percé croissant de diamètre R et de centre a .

(c) - Un filtre percé croissant ou décroissant (à l'exclusion des filtres de Cauchy) est dit large.

- Une suite $(a_m)_{m \geq 0}$ de D décrit le filtre $\mathfrak{F}$ s'il existe une base $(D_m)_{m \geq 0}$ de $\mathfrak{F}$ telle que

$$\forall m \geq 0, \exists n(m) \in \mathbb{N}, a_{n(m)} \in D_m.$$

- Nous appellerons plage d'un filtre percé $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\rho(\mathfrak{F}) = \{x \in D; |x - a| \leq R\}$ si $\mathfrak{F}$ est décroissant ou de Cauchy, $\rho(\mathfrak{F}) = \{x \in D; |x - a| \geq R\}$ si $\mathfrak{F}$ est croissant.

(d) La notion de filtre percé ainsi introduite va être fondamentale pour la caractérisation des algèbres $H(D)$ intègres ou noethériennes. Il nous faut toutefois la

préciser par celle de filtre percé auto-annulateur.

Si R_0 est le diamètre de l'infraconnexe D , et $\mathfrak{F}$ un filtre percé décroissant de centre a et de diamètre R , I étant l'intervalle $(-\log R_0, -\log R[$, nous dirons que $\mathfrak{F}$ est auto-annulateur s'il existe un élément f de $H(D)$ vérifiant :

- (i) $\lim_{\mu \rightarrow -\log R} v(f_a, \mu) = +\infty$,
- (ii) Pour μ dans I , $v(f_a, \mu)$ est fini,
- (iii) Pour x dans $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$, $v(f(x)) = +\infty$.

Lorsque $\mathfrak{F}$ est croissant, la définition est analogue, en remplaçant I par $]-\log R, +\infty[$.

On vérifie alors qu'un filtre percé auto-annulateur est annulateur.

On peut aussi donner une autre définition, équivalente à celle de filtre auto-annulateur ([1], IV, § 7), qui est celle de T-filtre. Plus "géométrique", elle fournit des exemples de tels filtres, et intervient dans certaines démonstrations basées sur ces exemples. On appelle T-filtre décroissant un filtre percé décroissant défini par une suite décroissante de cercles percés emboîtés (procédé analogue à la définition précédente) C_m , de rayons d_m , et vérifiant la propriété :

C_m admet au moins un nombre fini $k(m)$ de classes $\Gamma_{m,i}$ où $1 \leq i \leq k(m)$; il existe de plus des entiers $q_{m,i}$ ($1 \leq i \leq k(m)$) tels que si l'on pose

$$\gamma_m = \sup [\gamma_{\Gamma_{m,i}}, q_{m,i}] \quad \text{et} \quad q_m = \sum_{i=1}^{k(m)} q_{m,i},$$

on a la relation

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \gamma_m \prod_{j=1}^{j=m-1} \left(\frac{d_m}{d_j}\right)^{q_j} = 0.$$

Rappelons que si A est un disque non circonférencié de diamètre au plus égal à celui de D , tel que $A \cap D \neq A$, et si $\varepsilon(A, q)$ désigne l'ensemble des polynômes unitaires de degré q , à zéros dans $A - A \cap D$, on définit alors :

$$\gamma(A, q) = r^q \inf_{p \in \varepsilon(A, q)} \left\| \frac{1}{p} \right\|_{A \cap D} \quad \text{si } A \cap D \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \gamma(A, q) = 1 \quad \text{sinon.}$$

(e) Nous avons vu (Proposition 2) que la présence d'un élément quasi inversible, dans un idéal de $H(D)$, en définit la structure. Ils jouent un rôle capital dans la caractérisation des algèbres $H(D)$ noethériennes et principales. L'étude des éléments non quasi inversibles de $H(D)$ permet de montrer la propriété suivante ([1], III, § 6).

PROPOSITION 4. - Soit f un élément non identiquement nul de $H(D)$ et non quasi-inversible, alors

- (i) Il existe un filtre percé annulateur $\mathfrak{F}$, annulant proprement f ,
- (ii) Pour toute suite $(a_m)_{m \geq 0}$ de D telle que $f(a_m) \neq 0$ pour tout $m \geq 0$, que $\lim_{m \rightarrow +\infty} f(a_m) = 0$, et que $(|a_m - a_{m+1}|)_{m \geq 0}$, soit une suite strictement mono-

tone de limite non nulle, alors il existe un filtre percé large annulateur $\mathfrak{F}$ décrit par la suite $(a_m)_{m \geq 0}$, et annulant proprement f .

Et l'on déduit de ceci la propriété suivante ([1], III, § 6) :

PROPOSITION 5. - Si $\mathfrak{F}$ est un filtre percé de D , l'idéal $I(\mathfrak{F})$ des éléments de $H(D)$, annulés par $\mathfrak{F}$, est premier et fermé.

Les propositions 2 et 4 prouvent donc qu'un tel idéal $I(\mathfrak{F})$ est soit principal, soit formé d'éléments proprement annulés par des filtres percés.

3. Caractérisation des algèbres $H(D)$ intègres et principales.

A l'aide des outils précédents, nous nous proposons à présent de déterminer les conditions à satisfaire par un fermé borné D pour que $H(D)$ soit intègre ou noethérienne et principale.

3. 1. Etude de l'intégrité.

(a) La proposition 3 a fourni une condition nécessaire d'intégrité.

(b) Nous dirons que deux T -filtres $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ (ou filtres percés auto-annulateurs) sont complémentaires si l'on a

$$D = \mathcal{P}(\mathfrak{F}_1) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{F}_2) .$$

On vérifie alors immédiatement que si D est infraconnexe, et admet un couple de T -filtres $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ complémentaires, $H(D)$ n'est pas intègre. La réciproque est vraie car, à partir de deux éléments non identiquement nuls f et g de $H(D)$ tels que $fg \equiv 0$, on peut construire deux T -filtres complémentaires $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ annulant proprement f et g respectivement ([1], V, § 2).

(c) Nous sommes donc en mesure d'énoncer les deux résultats fondamentaux :

PROPOSITION 6. - Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre $H(D)$ soit intègre est que D soit infraconnexe, sans couple de T -filtres complémentaires.

PROPOSITION 6 bis. - Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algèbre $H(D)$ admette des idempotents non triviaux est que D ne soit pas infraconnexe.

3. 2. Etude de l'algèbre noethérienne.

(d) Nous supposons à présent D infraconnexe.

PROPOSITION 7. - Si $\mathfrak{F}$ est un T -filtre percé (annulateur), $I(\mathfrak{F})$ n'est pas de type fini ([1], V, § 4).

(e) A l'aide de ce résultat et des précédents, on établit le théorème final résumant les caractérisations annoncées ([1], V, § 5).

THÉOREME. - Soit D un infraconnexe ouvert non vide. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Tout idéal de $H(D)$ est fermé ;
- (2) Tout idéal premier et fermé de $H(D)$ est de type fini ;
- (3) $H(D)$ est noethérienne ;
- (4) $H(D)$ est principale ;
- (5) Tout élément de $H(D)$ est quasi inversible ;
- (6) D est sans T-filtre.

N.-B. - Pour prouver que $(3) \implies (1)$, il faut utiliser un théorème de J. TATE [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (A.). - Algèbres de Banach d'éléments analytiques au sens de Krasner, Thèse Sc. math. Univ. Bordeaux-I, 1970.
- [2] TATE (J.). - Rigid analytic spaces, Private note, Institut des Hautes Études Scientifiques, Bures-sur-Yvette (multigraphié).

(Texte reçu le 7 juin 1977)

Bernard JACOB
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU
