JEAN-PAUL BEZIVIN

Quelques questions ouvertes en analyse ultramétrique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J6, p. J1-J5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J6, 5 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

QUELQUES QUESTIONS OUVERTES EN ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

par Jean-Paul BEZIVIN

On signale, dans cet exposé, un certain nombre de questions ouvertes dans la théorie des fonctions analytiques en analyse ultramétrique.

Dans tout ce qui suit, K est un corps ultramétrique complet, et, bien que certaines questions deviennent triviales quand le corps K est supposé à valuation discrète, on ne fera pas d'autres hypothèses sur K.

1. Fonctions analytiques bornées.

On note D le disque unité ouvert de K, c'est-à-dire

$$D = \{x \in K \; ; \; |x| < 1\} ,$$

et D_n le polydisque ouvert, unité de K^n. Les fonctions analytiques bornées sur D_n à coefficients dans K s'identifient alors aux séries

$$f = \sum_{\nu \in \underset{\sim}{N}^n} a_\nu \, x^\nu \; , \quad \nu = \nu_1 , \ldots , \nu_n \; , \quad X^\nu = X_1^{\nu_1} \ldots X_n^{\nu_n} \; ,$$

avec $\sup_\nu |a_\nu| < +\infty$, on fait de cet espace B_n une algèbre de Banach ultramétrique en posant $\|f\| = \sup_\nu |a_\nu|$. On sait que cette norme est multiplicative.

On désigne par V le disque unité fermé de K : $V = \{u \in K \; ; \; |u| \leq 1\}$ (qui est aussi l'anneau de valuation de K), et par V_n le polydisque unité fermé de K^n.

On note $K\langle X_1 , \ldots , X_n \rangle$ l'espace des fonctions analytiques convergeant sur V_n, que l'on appelle séries restreintes ; cet espace s'identifie aux séries

$$f = \sum_{\nu \in \underset{\sim}{N}^n} a_\nu \, X^\nu \quad \text{avec} \quad \lim_{\nu \to \infty} |a_\nu| = 0 \; ,$$

c'est une sous-algèbre de Banach de B_n.

On commence par rappeler certaines questions de VAN DER PUT [11] :

QUESTION n° 1. - Soit I un idéal de type fini de B_n. Il est facile de voir que si $I = (g_1 , \ldots , g_s)$,

$$I = B \Rightarrow \inf_{x \in D_n , 1 \leq i \leq s} \sup |g_i(x)| > 0 \; .$$

La réciproque est-elle vraie ?

On se place dans l'espace

$$E_n = V\langle X_1 , \ldots , X_n \rangle = \{f \in K\langle X_1 , \ldots , X_n \rangle \; ; \; \|f\| \leq 1\} \; .$$

Soit I un idéal de type finni de l'anneau E_n, tel que $I \cap V \neq \{0\}$. On note

$$\alpha(I) = \sup\{|\alpha| \; ; \; \alpha \in I \cap V\}$$

et :

$$\delta(I) = \inf \sup_{\lambda \in V_n, f \in I} |f(\lambda)| .$$

On a évidemment $0 < \alpha(I) \leq \delta(I)$.

QUESTION n° 2. - Existe-t-il une constante $c(n, s) < +\infty$, telle que, $\forall$ I idéal de type fini de E_n, tel que $I \cap V \neq \{0\}$ on ait

$$\alpha(I) \geqslant \delta(I)^{c(n,s)}$$

si I a un système générateur de s éléments ?

VAN DER PUT, dans [11], démontre que si la question n° 2 est résolue par l'affirmative, on sait alors résoudre, par l'affirmative, la question n° 1. Dans le même article, il prouve que l'on peut prendre

$$c(1, s) = 2, \quad \forall s, \text{ et } c(n, 2) = 2, \quad \forall n,$$

ce qui permet de résoudre la question n° 1 pour $n = 1$, s quelconque, et $s = 2$, n quelconque. On ne connaît pas d'autres résultats à l'heure actuelle.

On peut généraliser ces deux questions de la manière suivante :

QUESTION n° 3. - Soit I un idéal de type fini de B_n, $I = (g_1, \ldots, g_s)$. Si $g \in I$, il est facile de voir qu'il existe $C > 0$ telle que l'on ait

(*) $$|g(x)| \leqslant C \sup_{1 \leq i \leq s} |g_i(x)| , \; \forall x \in D_n .$$

Etudier la réciproque. Existe-t-il une constante entière $A > 0$ telle que (*) implique $g^A \in I$?

D'après la méthode de VAN DER PUT, citée plus haut, cette question serait résolue si l'on savait répondre à la question n° 4.

QUESTION n° 4. - Soit I un idéal de type fini de E_n, $I = (g_1, \ldots, g_s)$. Il est facile de voir que $t_I(x) = \sup_J |g_J(x)|$ ne dépend que de I, et pas du système générateur choisi. Si $g \in I$, on a

(**) $$|g(x)| \leq t_I(x) , \quad \forall x \in V_n .$$

Réciproquement, si (**) est vérifiée, existe-t-il une constante A ne dépendant que de n et s telle que $g^A \in I$?

On sait résoudre la question n° 4, par l'affirmative, avec $A = 2$, dans les cas $s = 2$, n quelconque, et $n = 1$, s quelconque, et on a même dans le cas $n = 1$ un résultat un peu plus général pour la question n° 3, puisque l'on peut traiter le cas d'une infinité de générateurs g_k, $k \in \mathbb{N}$, avec la condition

$$\|g_k\| \to 0 \text{ si } k \to +\infty \; [1].$$

Dans le cas $n = 1$, s quelconque, la constante $A = 2$ est la meilleure possible.

Il peut être intéressant de regarder ce qui se passe dans le cas complexe ; il y a d'abord à constater que les analogues des questions posées (des n° 1 et n° 3) se formulent en remplaçant $\sup|g_i(x)|$ par $(\sum_{i=1}^{i=s}|g_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}$.

La question n° 1 a alors été résolue par CARLESON [4]. Pour $n = 1$, un contre-exemple de RAO montre que si la condition (*) de la question n° 3 est réalisée, on n'a pas toujours $g \in I$, mais aucun résultat du type $g^A \in I$ n'est connu. Il n'y a aucun résultat en dimension plus grande que 1 . Pour le contre-exemple de RAO, voir VON RENTELN [12].

Si l'on quitte le cadre des fonctions analytiques bornées, on a des résultats de ce type pour des fonctions analytiques qui sont dans L^2 pour certaines mesures sur un domaine Ω de $\underset{\sim}{C}$ (voir SKODA [9]). On connaît aussi des résultats de ce type pour des algèbres de fonctions analytiques à croissance (voir KELLEHER et TAYLOR [6]).

D'ailleurs, on peut se poser des questions analogues pour des fonctions analytiques sur D . Si l'on note $A(D)$ l'espace des fonctions analytiques sur D , on a la proposition suivante, dont la démonstration est tout à fait analogue à celle de la question n° 3 , dans le cas $n = 1$.

PROPOSITION. - <u>Soient</u> $f_1, \dots, f_s \in A(D)$, <u>et</u> M <u>le sous-B-module de</u> $A(D)$ <u>engendré par les</u> f_i .

<u>Soit</u> $g \in A(D)$ <u>tel qu'il existe</u> $C > 0$, $\forall x \in D$,

$$|g(x)| \leq C(\sup_i |f_i(x)|)^2 .$$

<u>Alors</u> $g \in M$.

Pour finir, on notera que si l'on se place dans $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, une inégalité du type (*) (question n° 3), avec g et les g_J dans $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, implique que g est nulle sur la variété des zéros de I . Un résultat de TATE([10] ou [5]) implique alors qu'il existe $m \in \underset{\sim}{N}$, $g^m \in I$, mais on ne sait pas borner ce m indépendamment de g et de I , et si $g^m = \sum t_J g_J$, on ne sait pas borner les $\|t_J\|$, ce qui empêche de résoudre la question n° 3 dans B_n .

2. Questions sur les germes de fonctions analytiques.

On note $\mathcal{O}_n$ l'anneau des germes de fonctions analytiques en n variables au voisinage de 0 . On sait que cet anneau est noethérien. On a alors la question n° 5.

QUESTION n° 5. - <u>Soit</u> I <u>un idéal de</u> $\mathcal{O}_n$, $I = (g_1, \dots, g_s)$, <u>et soit</u> $g \in \mathcal{O}_n$ <u>tel qu'il existe</u> $C > 0$, <u>et un voisinage de</u> 0 , U , <u>où</u> g <u>et les</u> g_J <u>sont définis, vérifiant</u> :

(***) $$\forall\, x \in U\ ,\quad |g(x)| \leqslant C\ \sup_J |g_J(x)|\ .$$

<u>Existe-t-il une constante</u> A <u>ne dépendant que de</u> n <u>et</u> s <u>telle que (***) implique</u> $g^A \in I$?

On remarquera que le cas $n = 1$ est trivial, et vrai avec $A = 1$. D'autre part, une réponse affirmative à la question n° 4, résoudrait la question n° 5 ; le seul problème restant alors la détermination de la meilleure constante A possible.

Dans le cas $s = 2$, n quelconque, on a le résultat avec $A = 2$, et l'exemple $g_1 = x^2$, $g_2 = y^2$, $g = xy$ montrent que $A = 1$ ne convient pas, on a le meilleur résultat possible.

Dans le cas complexe, la question n° 5 a été résolue par J. BRIANÇON et H. SKODA [3].

DÉFINITION. - <u>Soit</u> A <u>un anneau, et</u> I <u>un idéal de</u> A . <u>On dit que</u> $g \in A$ <u>est entier sur</u> I <u>s'il existe</u> $n \in \underset{\sim}{N}$ <u>et</u> $a_k \in I^k$ <u>tels que</u>

$$g^n + a_1\, g^{n-1} + \dots + a_n = 0\ .$$

L'ensemble des éléments entiers sur I constitue un idéal J de A , qui contient I , on consultera [13] pour plus d'informations.

QUESTION n° 6. - <u>Soit</u> I <u>un idéal de</u> $\mathcal{O}_n$, $I = (g_1, \dots, g_s)$. <u>On note</u> I^* <u>l'ensemble des</u> $g \in \mathcal{O}_n$ <u>vérifiant la condition (***) de la question n° 5, et</u> J <u>l'idéal des éléments entiers sur</u> I . <u>On voit facilement que</u> $J \subset I^*$. <u>A-t-on</u> $J = I^*$?

Dans le cas de $\underset{\sim}{C}$, la question n° 6 est résolue par l'affirmative (voir LEJEUNE-TEISSIER [7], J. BRIANÇON [2]).

Bien entendu, on peut formuler la question n° 6 en remplaçant $\mathcal{O}_n$ par B_n ou $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, en rajoutant J de type fini dans le cas de B_n .

3. Autres questions.

DÉFINITION. - <u>On dit qu'un anneau unitaire commutatif est cohérent, si l'intersection de deux idéaux de type fini est encore de type fini.</u>

QUESTION n° 7. - <u>L'anneau</u> B_n <u>est-il cohérent</u> ?

La question ne se pose évidemment pas pour $\mathcal{O}_n$ et $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, qui sont noethériens.

Dans le cas complexe, on sait répondre affirmativement dans le cas $n = 1$ (voir MAC VOY, RUBEL [8]).

Enfin, la plupart des questions posées dans les § 1 et 2 se généralisent. En notant A un anneau parmi B_n , $K\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, $V\langle X_1, \dots, X_n\rangle$, $\mathcal{O}_n$, on a donc la question n° 8 (voir [6]).

QUESTION n° 8. - <u>Soit</u> d <u>un entier</u> $\geqslant 1$, M <u>un sous-module de type fini de</u> A^d. <u>Soit</u> $g \in A^d$. <u>Trouver des conditions nécessaires et</u> (<u>ou</u>) <u>suffisantes pour que</u> $g \in M$, <u>en terme de</u> g <u>et d'un système générateur</u> $(f_1 , \dots , f_s)$ <u>de</u> M .

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEZIVIN (J.-P.). - Idéaux de type fini d'algèbre de fonctions analytiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 15, 7 p.

[2] BRIANÇON (J.). - Sur la clôture intégrale d'un idéal de $\underset{\sim}{C}\{X , Y\}$, Université de Nice, 1973.

[3] BRIANÇON (J.) et SKODA (H.). - Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes dans $\underset{\sim}{C}^n$, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 278, 1974, p. 949-951.

[4] CARLESON (L.). - The corona theorem, "Proceedings of the 15th Scandinavian Congress [1968. Oslo]", p. 121-132. - Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Mathematics, 118).

[5] HOUZEL (C.). - Espaces analytiques rigides sur un corps ultramétrique, Colloque Poitou-Aquitaine de la section régionale de la Société mathématique de France, 1965 (Exposé non publié).

[6] KELLEHER (J.) and TAYLOR (B. A.). - Finitely generated ideals in rings of analytic functions, Math. Annalen, t. 193, 1971, p. 225-237.

[7] LEJEUNE-JALABERT (M.) et TEISSIER (B.). - Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, Séminaire de l'Ecole Polytechnique, 1972.

[8] MAC VOY (W. S.) and RUBEL (L. A.). - Coherence of some rings of functions, J. functional Analysis, t. 21, 1976, p. 76-87.

[9] SKODA (H.). - Application des techniques L^e à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 5, 1972, p. 545-579.

[10] TATE (J.). - Rigid analytic spaces, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 257-289.

[11] VAN DER PUT (Marius). - The non-archimedean corona problem, "Table ronde ultramétrique" [1972, Paris], Bull. Soc. math. France, t. 39-40, 1974, p. 287-317.

[12] VON RENTELN (M.). - Finitely generated ideals in the Banach algebra H^∞ , Collect. Math., t. 26, 1975, p. 115-126.

[13] ZARISKI (A.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra, Vol 2. - Princeton, D. Van Nostrand, 1960 (University Series in higher Mathematics).

(Texte reçu le 8 novembre 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
Mathématiques, Tour 46
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX