

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN FRESNEL

BERNARD DE MATHAN

Transformation de Fourier p -adique et produit tensoriel de corps valués

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J1, p. J1-J6

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A1_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRANSFORMATION DE FOURIER p -ADIQUE
ET PRODUIT TENSORIEL DE CORPS VALUÉS

par Jean FRESNEL et Bernard de MATHAN

Soient \tilde{C}_p un complété d'une clôture algébrique du corps p -adique \tilde{Q}_p , L une extension algébrique de \tilde{Q}_p , et \hat{L} sa fermeture (topologique) dans \tilde{C}_p . Soient Γ_n le groupe des racines p^n -ième de l'unité, et $\Gamma = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n$ la limite inductive des algèbres de groupe $\hat{L}[\Gamma_n]$ est l'algèbre du groupe Γ . Nous nous intéressons ici à la limite inductive topologique des $\hat{L}[\Gamma_n]$ que nous notons

$$\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L}).$$

C'est l'algèbre des fonctions définies sur Γ à valeurs dans \hat{L} qui tendent vers zéro à "l'infini", muni du produit de convolution habituel

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta \in \Gamma} f(\delta) g(\gamma \delta^{-1}).$$

Le dual de Γ n'est autre que la limite projective des $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$, c'est-à-dire \mathbb{Z}_p , si bien que l'on peut définir une transformation de Fourier \mathfrak{F} de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ dans l'algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \hat{L}K_\infty)$ des fonctions continues sur \mathbb{Z}_p à valeurs dans $\hat{L}K_\infty$ de la façon suivante

$$\mathfrak{F}(f)(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^x$$

(K_∞ est le corps engendré par Γ sur \tilde{Q}_p , et $\hat{L}K_\infty$ est la fermeture du corps LK_∞).

L'algèbre $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ a déjà été étudiée ainsi que sa transformation de Fourier lorsque $L \supset K_\infty$ (théorème 2) [3] [4], nous en déduisons ici une étude de la même algèbre lorsque $L \cap K_\infty = K_1 = \tilde{Q}_p(\sqrt[p]{1})$. Nous montrons que l'homomorphisme \mathfrak{F} est injectif si, et seulement si, la différentielle de L sur K_1 est non "nulle" (théorème 3). D'autre part si la différentielle de L sur K_1 est nulle, le quotient $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})/\ker \mathfrak{F}$ est isomorphe et isométrique à une sous-algèbre fermée de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \hat{L}K_\infty)$, satisfaisant une équation fonctionnelle simple (théorème 4). De plus, l'idéal des nilpotents de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ est dense dans le radical de Jacobson, et n'est pas fermé.

Nous nous intéressons ensuite au problème du produit tensoriel topologique de corps valués. Il se présente ainsi. Soit k un sous-corps fermé de \tilde{C}_p , L et M deux extensions algébriques de k contenues dans \tilde{C}_p , et linéairement disjointes sur k . Cela veut dire que le produit tensoriel $L \otimes_k M$ est isomorphe au compositum LM de ces deux corps. Sur le corps LM , nous pouvons considérer deux topologies, d'une part la valeur absolue induite par celle de \tilde{C}_p , d'autre part,

la norme tensorielle définie sur LM regardé comme produit tensoriel de deux algèbres normées.

Nous conjecturons que le complété de LM pour la valeur absolue est le quotient du produit tensoriel complété $L \hat{\otimes}_k M$ par son unique idéal maximal.

Nous démontrons la conjecture dans le cas où $M = K_\infty$, $k = K_1$, et L quelconque. Nous montrons d'abord que la norme tensorielle sur LK_∞ est équivalente à la valeur absolue si, et seulement si, la différentielle de L sur K_1 est non nulle, et nous résolvons la conjecture en utilisant notre étude sur $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ (théorème 6).

I. L'algèbre $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$.

I.0. Les idéaux maximaux. - L'objet de notre étude est de préciser le radical de Jacobson \mathfrak{R} (intersection des idéaux maximaux), le nilradical (intersection des idéaux premiers ou idéal des nilpotents) ainsi que le quotient $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})/\mathfrak{R}$.

Rappelons tout d'abord un résultat de SCHIKHOF [5] [7].

THÉORÈME 1. - Les idéaux maximaux de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ sont les images réciproques par la transformation de Fourier des idéaux maximaux de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \hat{LK}_\infty)$.

Ceci montre en particulier que $\mathfrak{R} = \ker \mathfrak{F}$.

I.1. Le corps L contient K_∞ . - Dans ce cas, nous avons une bonne description de la transformation de Fourier \mathfrak{F} et de l'algèbre $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ que nous allons résumer dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2. ([3] [4]). - Si $L \supset K_\infty$, la transformation de Fourier \mathfrak{F} de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \hat{L})$ n'est pas injective, elle est surjective. Le quotient $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})/\ker \mathfrak{F}$ est isomorphe et isométrique à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \hat{L})$. L'idéal \mathfrak{N} des nilpotents est dense dans le radical de Jacobson \mathfrak{R} (intersection des maximaux) et distinct de \mathfrak{R} .

I.2. Image de la transformation de Fourier. - Déterminons l'adhérence B dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \hat{LK}_\infty)$ de l'image de la transformation de Fourier \mathfrak{F} .

Nous savons que

$$\text{Gal}(LK_\infty/L) \simeq \text{Gal}(K_\infty/K_\infty \cap L) \simeq H \subset \mathbb{Z}_{\sim p}^*$$

Nous désignons par $\mathbb{Z}_{\sim p}^*$ le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}_{\sim p}$. L'identification avec le sous-groupe H se fait de la façon suivante, soit $\tau \in \text{Gal}(LK_\infty/L)$, alors il existe α unique dans $\mathbb{Z}_{\sim p}^*$ tel que

$$\tau(\gamma) = \gamma^\alpha \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma,$$

nous noterons τ_α l'automorphisme ainsi associé à $\alpha \in H$.

Soit

$$g = \mathfrak{F}(f) \in \text{Im. } \mathfrak{F}$$

$$g(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \gamma^x,$$

appliquons τ_α , nous obtenons

$$\tau_\alpha(g(x)) = g(x_\alpha).$$

Soit donc B la sous-algèbre de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \widehat{\text{LK}}_\infty)$ suivante :

$$B = \{g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_{\sim p}, \widehat{\text{LK}}_\infty) ; \tau_\alpha(g(x)) = g(x_\alpha), \forall \alpha \in H\}.$$

PROPOSITION 1 [5]. - L'adhérence de l'image de la transformation de Fourier est l'algèbre B.

I.3. La différentielle de L sur K_1 est non nulle. - Supposons pour simplifier que $L \cap K_\infty = K_1$. Si L_i est une extension finie de K_1 , nous notons \mathcal{O}_{L_i/K_1} la différentielle de L_i sur K_1 , soit

$$d = \sup_{K_1 \subset L_i \subset L, [L_i:K_1] < \infty} v(\mathcal{O}_{L_i/K_1}).$$

L'expression $v(\mathcal{O}_{L_i/K_1})$ désigne la valuation de l'idéal \mathcal{O}_{L_i/K_1} (normalisée sur le corps K_1).

Définition. - Nous dirons que la différentielle de L sur K_1 est nulle si $d = +\infty$, ce que nous désignerons par $\mathcal{O}_{L/K_1} = \{0\}$.

THÉORÈME 3 [5]. - Si la différentielle de L sur K_1 est non nulle, alors la transformation de Fourier \mathfrak{F} de $\mathcal{L}^1(\Gamma, \widehat{L})$ dans B est injective et non surjective.

On montre que la forme LK_s -linéaire

$$t_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{p^N} \text{Tr}_{\text{LK}_{N+s}/\text{LK}_s}$$

est continu et que

$$t_s(\gamma) = 0 \text{ pour } \gamma \in \Gamma - \Gamma_s.$$

I.4. La différentielle de L sur K_1 est nulle. - Si E est un sous-corps de $\mathbb{C}_{\sim p}$, nous noterons \mathcal{O}_E son anneau de valuation et \mathfrak{M}_E son idéal de valuation.

PROPOSITION 2 [5]. - Si la différentielle de L sur K_1 est nulle, alors pour tout entier N

$$\text{Tr}_{\text{LK}_N/\text{LK}_{N-1}}(\mathcal{O}_{\text{LK}_N}) \supset \mathfrak{M}_{\text{LK}_{N-1}}.$$

Ceci nous permet de construire une forme L-linéaire continue sur LK_∞ . Soit $\epsilon > 0$, la proposition 2 montre qu'il existe une suite $\eta = (\eta_N)$ de LK_∞ possédant les propriétés suivantes

$$(1) \eta_N \in \text{LK}_N$$

(2) $|\eta_N| < 1 + \epsilon$

(3) $\text{Tr}_{\text{LK}_{N+1}/\text{LK}_N}(\eta_N) = \eta_{N-1}$ et $\eta_1 = 1$.

Alors la forme L-linéaire t_η , définie par

$$t_\eta(x) = \text{Tr}_{\text{LK}_N/L}(\eta_N x), \text{ si } x \in \text{LK}_N$$

est continue, $\|t_\eta\| < 1 + \epsilon$ et $t_\eta(1) = 1$.

Notons aussi t_η le prolongement continu de t_η à $\widehat{\text{LK}}_\infty$, et enfin notons aussi t_η l'application \widehat{L} -linéaire $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{\text{LK}}_\infty)$ sur $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{L})$ définie par

$$f \rightarrow t_\eta \circ f.$$

THÉOREME 4 [5]. - Soit L une extension algébrique de \mathbb{Q}_p dont la différentielle sur \mathbb{Q}_p est nulle. Alors la transformation de Fourier \mathfrak{F}_1 de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{L})$ dans la sous-algèbre B de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \widehat{\text{LK}}_\infty)$ est surjective, et $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{L})/\ker \mathfrak{F}_1$ est isomorphe et isométrique à B. De plus,

(a) $\ker \mathfrak{F}_1 = t_\eta(\ker \mathfrak{F})$ (où \mathfrak{F} est la transformation de Fourier de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{\text{LK}}_\infty)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \widehat{\text{LK}}_\infty)$)

(b) l'idéal \mathfrak{N}_1 des nilpotents de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{L})$ constitue une partie dense de $\ker \mathfrak{F}_1$ et distincte de $\ker \mathfrak{F}_1$.

II. Produit tensoriel de corps valués.

Nous allons maintenant appliquer nos résultats sur $\mathcal{E}^1(\Gamma, \widehat{L})$ à l'étude de l'algèbre $L \otimes_{K_1} K_\infty$.

II.1. Linéaire disjonction. - Notons toujours \mathbb{Q}_p le corps p-adique, $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ sa clôture algébrique, et \mathbb{C}_p le complété de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$. Si F est un sous-corps de \mathbb{C}_p , on notera \widehat{F} sa fermeture topologique dans \mathbb{C}_p . Rappelons le théorème de Tate-Sen-Ax.

THÉOREME 5 ([11], [8] [1]). - Soit G le groupe de Galois de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ sur \mathbb{Q}_p , il agit par continuité sur \mathbb{C}_p . Soit H un sous-groupe de G, alors le corps des éléments de \mathbb{C}_p , invariants par H est l'adhérence du corps des éléments de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$ invariants par H. Ceci s'écrit donc ainsi

$$\mathbb{C}_p^H = \widehat{\mathbb{Q}_p^H}.$$

Ce théorème permet de décrire les sous-corps fermés de \mathbb{C}_p comme étant les adhérences des sous-corps de $\widetilde{\mathbb{Q}}_p$.

COROLLAIRE [5]. - Soit F un sous-corps topologiquement fermé de \mathbb{C}_p . Alors

$$F = \widehat{\mathbb{Q}_p} \cap F.$$

On déduit de ce corollaire la proposition suivante.

PROPOSITION 3 [5]. - Soit k un sous-corps fermé de $\mathbb{C}_{\sim p}$, L et M deux sous-corps de $\mathbb{C}_{\sim p}$, extensions algébriques de k et linéairement disjointes sur k . Alors les fermetures \hat{L} et \hat{M} de L et M sont linéairement disjointes sur k .

II.2. Produit tensoriel topologique de corps. - Soient toujours k un sous-corps fermé de $\mathbb{C}_{\sim p}$, L et M deux extensions algébriques de k linéairement disjointes sur k . Ainsi $L \otimes_k M$ est isomorphe à LM par l'application

$$l \otimes m \rightarrow lm.$$

Rappelons la définition de la norme tensorielle sur $L \otimes_k M$ [8]. Soit

$$x = \sum_i l_i \otimes m_i \in L \otimes_k M,$$

on pose

$$\|x\| = \inf \sup_i |l_i| |m_i|,$$

où "inf" est pris sur toutes les décompositions de x sous la forme $\sum_i l_i \otimes m_i$.

Cette norme possède les propriétés suivantes :

$$|l| = \|l\| \quad \text{et} \quad \|m\| = |m| \quad \text{si} \quad l \in L \quad \text{et} \quad m \in M$$

$$|x| \leq \|x\| \quad \text{pour tout} \quad x \in LM$$

(après identification de $L \otimes_k M$ et LM).

La boule unité est \mathcal{O}_{LM} pour la valeur absolue, et $\mathcal{O}_L \mathcal{O}_M$ pour norme tensorielle (à une homothétie près).

Notons $\hat{L} \otimes_k M$ le complété de $L \otimes_k M$ pour la norme tensorielle. L'isomorphisme de $L \otimes M$ dans LM se prolonge par continuité en un homomorphisme de $\hat{L} \otimes M$ dans \hat{LM} .

PROPOSITION 4 [5]. - L'algèbre $\hat{L} \otimes_k M$ admet un seul idéal maximal, c'est le noyau de l'homomorphisme φ de $\hat{L} \otimes_k M$ dans \hat{LM} .

Ainsi $\varphi(\hat{L} \otimes_k M)$ est un corps normé complet intermédiaire entre LM et \hat{LM} , dont la norme coïncide sur L avec la valeur absolue et sur M aussi.

CONJECTURE. - Soit k un sous-corps fermé de $\mathbb{C}_{\sim p}$, L et M deux extensions algébriques de k , linéairement disjointes sur k . Alors le quotient de $\hat{L} \otimes_k M$ par l'unique idéal maximal \mathfrak{m} est isomorphe et isométrique à \hat{LM} .

II.3. Produit tensoriel avec la \mathbb{Z}_p -extension cyclotonique. - On montre d'abord que la norme tensorielle est équivalente à la valeur absolue de LK_{∞} si, et seulement si, le conducteur [9] de $\mathcal{O}_L \mathcal{O}_K$ dans \mathcal{O}_{LK} n'est pas nul. Et ceci est satisfait si, et seulement si, la différentielle de L sur K_1 est non nulle.

Ensuite on considère l'idempotent ε de $\mathcal{E}^1(\Gamma, \hat{L})$, défini par

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^{-1}}{p} & \text{si } \gamma \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{si } \gamma \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

On montre ensuite que l'algèbre $\varepsilon * \mathcal{L}^1(\Gamma, \hat{L})$ est isomorphe à $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$ et en utilisant le théorème 4 on obtient

THÉOREME 5. - Si la différentielle de L sur K_1 est nulle, l'algèbre $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$ a un seul idéal maximal \mathfrak{M} , il est non nul et le quotient $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty / \mathfrak{M}$ est isomorphe et isométrique à $\hat{L}K_\infty$. De plus l'idéal \mathfrak{N} des nilpotents de $L \hat{\otimes}_{K_1} K_\infty$ est dense dans \mathfrak{M} et distinct de \mathfrak{M} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields : The Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.
- [2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, chapitre 5 : Corps commutatifs. 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11). [Voir en particulier, Extensions linéairement disjointes, V, § 2, n° 3]
- [3] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Transformation de Fourier p-adique, Astérisque n° 24-25, 1975 : Journées arithmétiques [1974. Bordeaux], p. 139-155.
- [4] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Le résultat sur l'idéal \mathfrak{N} des nilpotents n'a pas encore été publié. Il a été exposé à Oberwolfach en septembre 1976.
- [5] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - Algèbre du groupe infini Γ et produit tensoriel de corps valués, Séminaire de Théorie des nombres, Bordeaux, 1975/76.
- [6] PARMENTER (M. M.) and SEHGAL (S. K.). - Non-archimedean group algebras, J. of Number Theory, t. 7, 1975, p. 376-384.
- [7] SCHIKHOF (W. H.). - Non-archimedean harmonic analysis, Thèse Nijmegen, 1967.
- [8] SEN (S.). - On automorphisms of local fields, Annals of math, t. 90, 1969, p. 33-40.
- [9] SERRE (J.-P.). - Corps locaux. 2e édition. - Paris, Hermann, 1968.
- [10] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).
- [11] TATE (J. T.). - p-divisible groups, "Proceedings of a Conference on local fields [1966. Driebergen], p. 158-183. - Berlin, Springer-Verlag, 1967.
- [12] WOODCOCK (C. F.). - Fourier analysis for p-adic Lipschitz functions, J. of London math. Soc., Series 2, t. 7, 1974, p. 681-693.

(Texte reçu le 14 octobre 1976)

Jean FRESNEL
 Mathématiques
 Université de Bordeaux-I
 351 cours de la Libération
 33405 TALENCE